ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

DERS KİTABI

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının **28.05.2018** tarih ve **78** sayılı kurul kararı ile **2018-2019** öğretim yılından itibaren 5 yıl süreyle **Ders Kitabı** olarak kabul edilmiştir.

Yazarlar

Dr. Ayten ERDURAN **Mehmet Fatih ÖZDEMİR**

TOP YAYINCILIK PAZARLAMA SANAYİ VE TİCARET LİMİTET ŞİRKETİ
Dr. Faik Muhittin Adam Cad. Nu.: 38/Z - 1 Konak - İZMİR
Telefon: (0232) 425 79 63 - 445 91 12 Belgegeçer: (0232) 489 37 37 / www.top.com.tr

ISBN 978-605-9360-51-7

© Bu kitabın her hakkı saklıdır ve
TOP Yayıncılık Pazarlama Sanayi ve Ticaret Limited Şirketine aittir.
Yazı, resim, fotoğraf, harita ve soruları başka bir esere aynen veya değiştirilerek
alınamaz ve yayımlanamaz.

Sertifika No: 12172

Dil Uzmanı
Rahmi HÜYÜK

Görsel Tasarım
Ahmet Sadık PALA

Baskı
Korza Yayıncılık Basım San. ve Tic. A.Ş.
Yenice Mahallesi No:3 Esenboğa / ANKARA
Sertifika No: 40961

ANKARA - HAZİRAN 2019

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar-ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder - varsa - taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

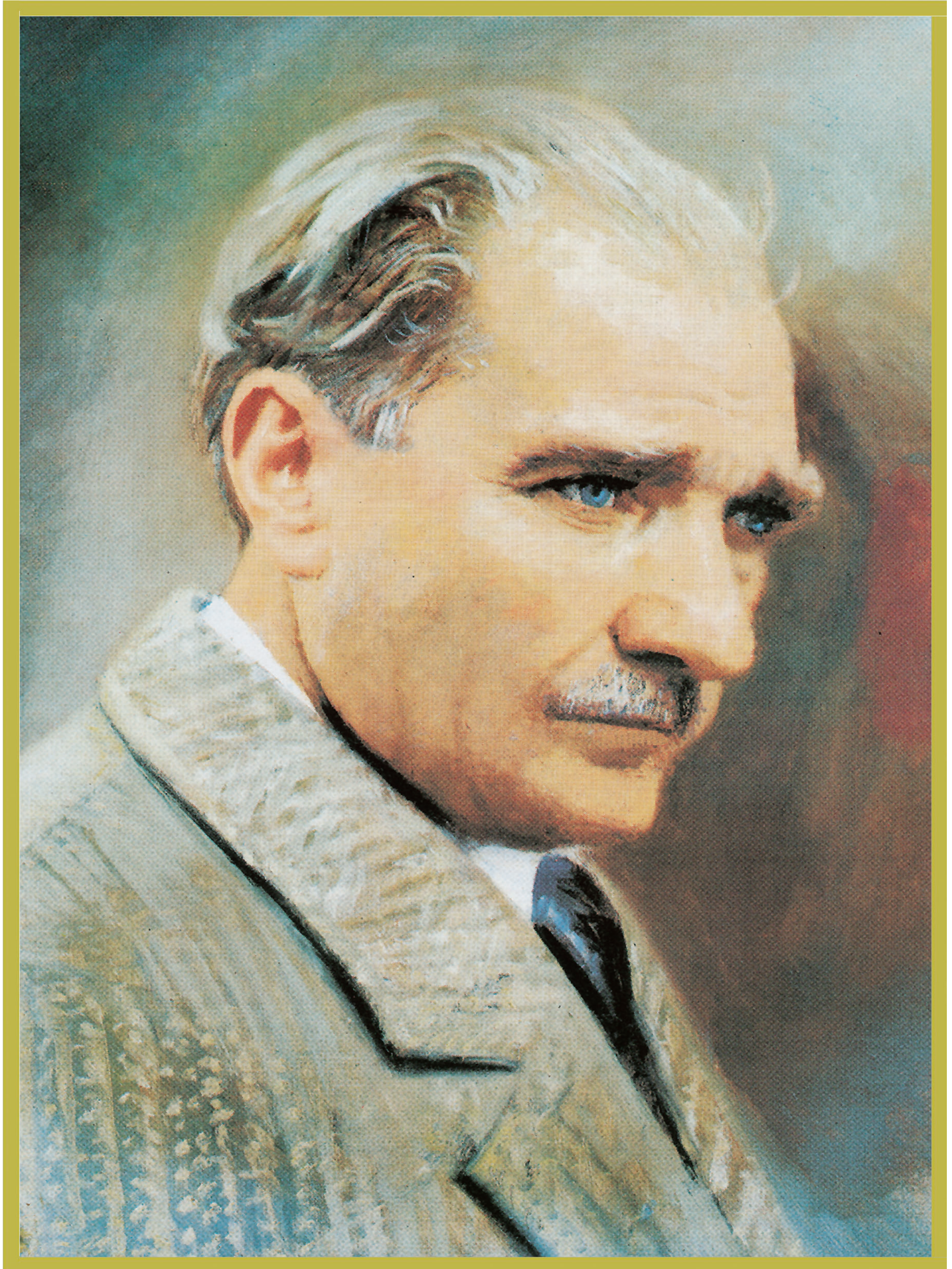
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

ÖĞRENME ALANI: VERİ, SAYMA VE OLASILIK

KİTABIN TANITIMI

GEOMETRİ	Öğrenme alanıdır.
1.1. Yönlü Açılar	Konu başlığıdır.
1.2.2. Kosinüs Teoremi	Kazanım başlığıdır.
	Konuya giriş amaçlı motivasyon kısmıdır.
Keşfedelim:	Kavrama ulaşmak için izlenen her türlü çalışma ve etkinliktir.
Hatırlayalım:	Konu ile ilgili ön bilgileri açıklayan çalışmalardır.
Öğrenelim:	Her türlü etkinlik veya uygulamanın sonucunu ortaya koyan bilimsel metindir.
Uygulayalım:	Kavramların işlemsel bilgi ile ilişkilendirildiği çözümlü sorulardır.
Dikkat Edelim!	Kavram yanılgısını önleme amaçlı bilgilerdir.
Problem	Günlük yaşamla ilgili çözümlü problemlerdir.
Düşünelim:	Üst düzey bilgi basamaklarını ölçen sorudur.

Araştıralım:

Konu ile ilgili araştırma çalışmasıdır.

Tanıyalım:

Günlük yaşamdan ve tarihten alınan bilgilerdir.

Pekiştirelim:

İlgili kazanıma yönelik ölçme ve değerlendirme çalışmalarıdır.

Genel Değerlendirme Soruları

Alt öğrenme alanları içindeki kazanımlarla ilgili ulaşılan seviyeyi değerlendirme amaçlı sorulardan oluşan ölçme aracıdır.

Genel Değerlendirme Testi

Alt öğrenme alanları içindeki kazanımlarla ilgili ulaşılan seviyeyi değerlendirme amaçlı çoktan seçmeli sorulardan oluşan ölçme aracıdır.

"Pekiştirelim", "Genel Değerlendirme Soruları" ve "Genel Değerlendirme Testi" kısımlarında işlem gerektiren çözümlerinizi defterinize yapınız.

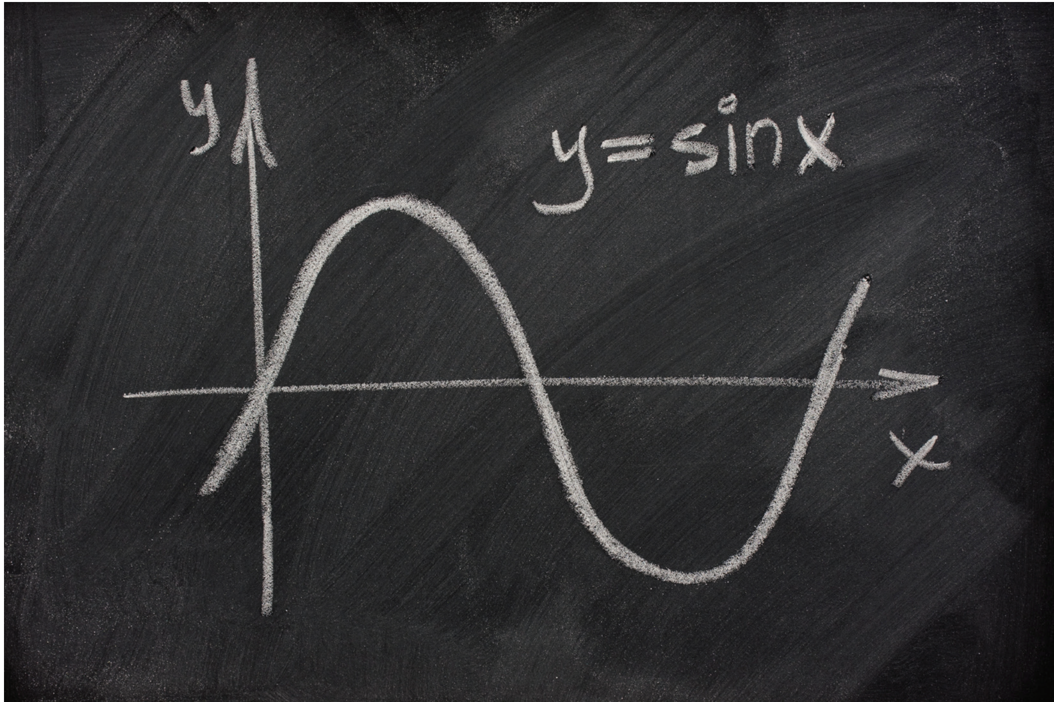
11. Sınıf Matematik Ders Kitabı Alt Öğrenme Alanları ve Bu Alt Öğrenme Alanları İçin Öngörülen Süreler

Alt Öğrenme Alanı Nu.	Alt Öğrenme Alanı Adı	Kazanım Sayısı	Ders Saati	Ağırlık (%)
1	TRİGONOMETRİ	7	56	26
2	ANALİTİK GEOMETRİ	4	24	11
3	FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR	4	36	17
4	DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ	3	40	18
5	ÇEMBER VE DAİRE	5	28	13
6	UZAY GEOMETRİ	1	14	7
7	OLASILIK	4	18	8
	TOPLAM	28	216	100

1. Alt Öğrenme Alanı: TRİGONOMETRİ

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

- Yönlü açıyı açıklamanız, açı ölçü birimlerini açıklayarak birbiri ile ilişkilendirmeniz, bir açının trigonometrik oranlarını birim çember yardımıyla hesaplamanız,
- Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla açıklamanız, kosinüs ve sinüs teoremleriyle ilgili problemler çözmeniz, trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizmeniz ve sinüs, kosinüs, tanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını açıklamanız amaçlanmaktadır.

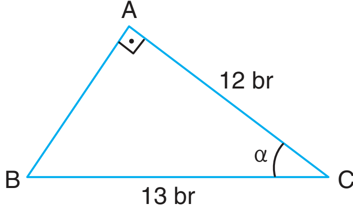


"İnsanların ortaya koyduğu hiçbir şey, matematikte yerini bulmadan bilim olamaz."

Leonardo Da Vinci (Leanardo Da Vinci)

1. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1.



Yukarıda ABC dik üçgeninde verilenlere göre aşağıdakileri bulunuz.

a. $\sin\alpha \cdot \cot\alpha =$

b. $\cos\alpha \cdot \tan\alpha =$

2. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\sin 30° \cdot \cos 60° \cdot \tan 30° \cdot \cot 30° =$

b. $\dfrac{2\sin 45° - \cos 45°}{\tan 60° + \cot 60°} =$

3. $25x^2 - 81y^2$ cebirsel ifadesini çarpanlarına ayırınız.

4. $1 + \dfrac{1}{x} = 5$ ise $1 - \dfrac{1}{x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

5. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y harfi getiriniz.

a. (...) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonu bire bir (1 - 1) fonksiyondur.

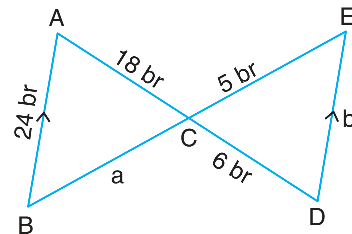
b. (...) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu örten bir fonksiyondur.

c. (...) Bir fonksiyonun tersinin olması için o fonksiyonun 1 - 1 ve örten fonksiyon olması gerekir.

6. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \dfrac{3x - 1}{5}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

7. Bugün günlerden pazartesi ise 200 gün sonra takvim hangi günü gösterir?

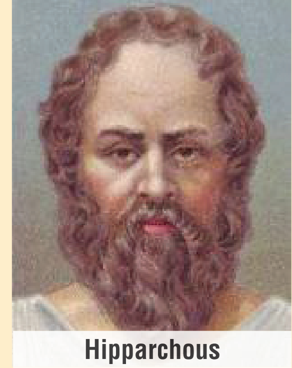
8.



Şekilde A, C, D ve B, C, E doğrusal, [AB] // [ED] dir. Buna göre a + b toplamını bulunuz.

1.1. Yönlü Açılar

Hipparchous (Hipparkos); astronomi, matematik, coğrafya ve tıp alanlarında çalışmalar yapmış Yunan asıllı bir bilim insanıdır. Hipparchous; bir daireyi 360, çapı da 120 eşit birime bölen ve bunu sistematik olarak kullanan ilk kişidir. Hipparchous'un ilgisi büyük oranda daireler ve kirişler üzerinedir. Hatta bu konuda on iki ciltlik kitap yazmıştır. Açıların yaylarla değil kirişlerle ölçülmesi gerektiğini öne süren Hipparchous'tur. Bu yaklaşımı; matematik tarihinde çok önemli bir başlangıcı, yani trigonometrinin doğuşunu sağlaması bakımından değerlidir. Bu sebeple trigonometrinin kurucusu olarak bilinir. Aynı zamanda kentlerin yerlerini belirlemek için ilk defa enlem ve boylam derecelerini kullanmıştır. Bugünkü anlamda Dünya'yı 360 boylam ve 180 enlem derecesine bölmüştür (Topdemir, 2011).


Hipparchous

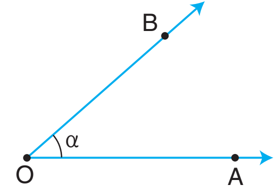
Ülkemizin yaklaşık olarak 36° ve 42° kuzey paralelleri ile 26° ve 45° batı meridyenleri arasında konumlandığına ilişkin bilgilerin kaynağında Hipparchous'un payı vardır.

1.1.1. Yönlü Açı Kavramı

Hatırlayalım:

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine **açı** adı verilir. Bu ışınlara **açının kenarları**, ışının başlangıç noktasına **açının köşesi** denir. Örneğin aşağıdaki şekilde verilen açının gösterildiği sembolleri yazalım.

Şekilde [OA ile [OB ışınları, açının kenarları ve O noktası, açının başlangıç noktasıdır.

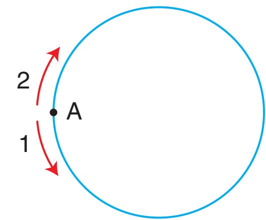


Bu durumda verilen açı, $[OA \cup [OB = \widehat{AOB}$ şeklinde ya da $[OB \cup [OA = \widehat{BOA}$ şeklinde gösterilir.

$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOA}) = \alpha$ dır.

Keşfedelim:

1. Şekildeki dairesel pistin A noktasında bulunan bir koşucu, 1 ve 2 yönlerinde bu pistin çevresi üzerinde hareket edecektir. Saatin dönme yönü negatif yön olarak kabul edildiğinde koşucunun hangi yöndeki hareketi pozitif, hangi yöndeki hareketi negatif olarak adlandırılır? Tartışınız.



2. Buna göre bir musluğun açma ve kapama yönünü nasıl adlandırırsınız?

▶ Yönü belirlemede kullanılan terimlerin önemini tartışınız.

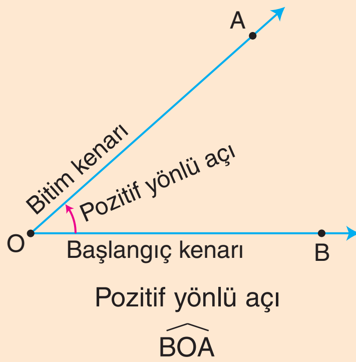
Öğrenelim:

Yol tarifi yaparken veya bulunduğumuz yeri anlatırken yön kavramından yararlanırız. Yön bulma çalışmaları, geçmişte farklı yollarla yapılmıştır. Karıncaların yuvalarını takip etme, Kutup Yıldızı sayesinde yer belirleme, pusulanın keşfi bu çalışmalara örnektir.

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından biri başlangıç kenarı, diğeri bitim kenarı olarak alındığında oluşan açıya **yönlü açı** adı verilir.

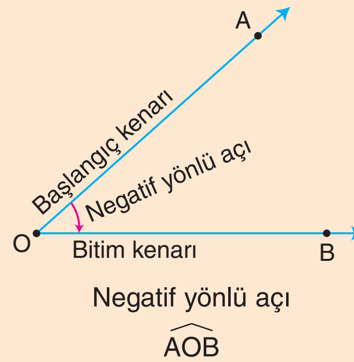
Aşağıdaki şekilde [OB ışınını açının başlangıç kenarı, [OA ışınını açının bitim kenarı olarak aldığımızda oluşan açı **pozitif yönlü** açı olur.

[OA ışınını açının başlangıç kenarı, [OB ışınını açının bitim kenarı olarak aldığımızda ise oluşan açı **negatif yönlü** açı olur.



Pozitif yönlü açı

$\widehat{BOA}$



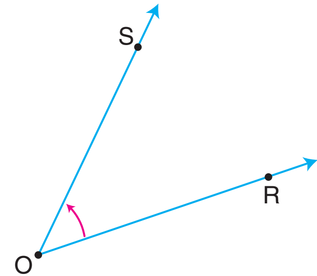
Negatif yönlü açı

$\widehat{AOB}$

Saatin ibrelerinin dönme yönünde olan açılar, negatif yönlü; ters yönünde olan açılar, pozitif yönlü açılardır.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde verilen açının başlangıç kenarını, bitim kenarını, bunların sembolle gösterimini ve yönünü bulalım.



Çözelim:

Başlangıç kenarı: [OR

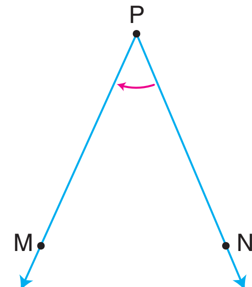
Bitim kenarı: [OS

Açının sembolle gösterimi: $\widehat{ROS}$

Açının yönü, saatin dönme yönünün tersi olduğundan pozitiftir.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde verilen açının başlangıç kenarını, bitim kenarını, sembolle gösterimini ve yönünü bulalım.



Çözelim:

Başlangıç kenarı: [PN

Bitim kenarı: [PM

Açının sembolle gösterimi: $\widehat{NPM}$

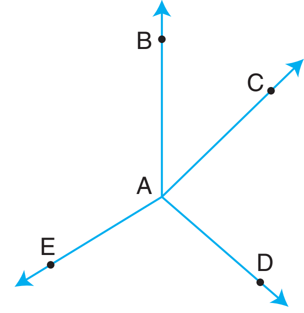
Açının yönü, saatin dönme yönünün aynısı olduğundan negatiftir.

Uygulayalım:

Verilen şekle göre $\widehat{BAC}$, $\widehat{DAB}$ ve $\widehat{EAC}$ açılarının başlangıç ve bitiş kenarlarını belirleyerek yönlerini bulalım.

Çözelim:

$\widehat{BAC}$ söylendiğinde önce B nin bulunduğu ışından başlanıp A ya ve C nin bulunduğu ışına gidilmesi gerektiği anlaşılır. Böylece açının yönü bulunur. Diğer açılar da benzer şekilde düşünülüp yönleri belirlenebilir. Buna göre istenenleri aşağıdaki tabloda gösterelim.



Sembolle Gösterim	$\widehat{BAC}$	$\widehat{DAB}$	$\widehat{EAC}$
Açı	B, C, A	B, A, D	C, A, E
Başlangıç Kenarı	[AB	[AD	[AE
Bitiş Kenarı	[AC	[AB	[AC
Yönü	Negatif	Pozitif	Negatif

Pekiştirelim:

Aşağıda verilen açılar için boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Sembolik Gösterim	$\widehat{BOA}$			
Açı	A, B, O	O, P, R	C, O, D	F, O, E
Başlangıç Kenarı		[OP		
Bitim Kenarı			[OC	
Yönü				Negatif

1.1.2. Açı Ölçü Birimleri

Öğrenelim:

Nasıl farklı uzunluk ölçme birimleri (m, cm, km gibi) ve farklı kütle ölçme birimleri (kg, g, ton gibi) varsa farklı açı ölçme birimleri de vardır. Bunlardan ikisi ve en sık kullanılanları derece ve radyandır.

Bir tam çember yayının 360 eş parçaya bölünmesinden elde edilen, eş yaylardan birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir ve **1°** ile gösterilir.

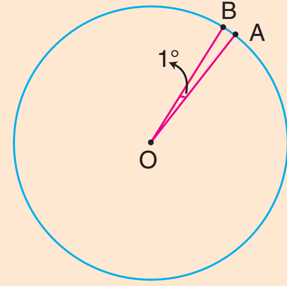
Derecenin $\frac{1}{60}$ ına **dakika** denir ve (′) sembolü ile gösterilir.

Dakikanın $\frac{1}{60}$ ına **saniye** denir ve (″) sembolü ile gösterilir.

Yani 1 derece = 60 dakika veya $1° = 60'$ ya da $1' = \frac{1°}{60}$ dır.

1 derece = 60 . 60 = 3600 saniye veya $1° = 3600''$ olur.

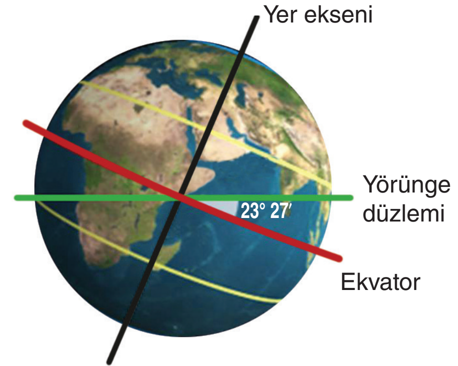
$1' = 60''$ ise $1° = 60' = 59'\,60''$ dir.



Yandaki şekilde O merkezli çemberde AOB merkez açısı görülmektedir. $m(\widehat{AOB}) = 1°$ veya $m(\widehat{AOB}) = 60'$ ya da $m(\widehat{AOB}) = 3600''$ yazılır.

Uygulayalım:

İlk oluştuğu kütledeki madde dağılımı yüzünden Dünya'nın eksen eğikliği 23° 27′ dır. Yandaki şekilde bu durum görülmektedir. Yer ekseniyle Ekvator birbirine diktir. Buna göre yörünge düzlemi ile yer ekseni arasındaki açının kaç derece olduğunu bulalım.



Çözelim:

Yer ekseniyle Ekvator birbirine dik ise yörünge düzlemi ile yer ekseni arasındaki açının ölçüsü

$90° - (23°\,27')$ olur. Buradan

$$\begin{array}{rcrl} 90°\,00' & \rightarrow & 89°\,60' & (1° = 60') \\ -\ 23°\,27' & & -\ 23°\,27' & \\ \hline & & 66°\,33' & \text{bulunur.} \end{array}$$

Uygulayalım:

Ölçüleri sırayla $a = 23°\,17'$ ve $b = 15°\,18'$ olan iki açı için $2.a + 3.b$ nin kaç dakika olduğunu bulalım.

Çözelim:

$2.a = 2.(23°\,17') = 46°\,34'$ ve $3.b = 3.(15°\,18') = 45°\,54'$ olur.

$2.a + 3.b = 46°\,34' + 45°\,54' = 91°\,88'$ bulunur.

$1° = 60' \Rightarrow 91° = 91.60 = 5460'$ olduğundan

$91°\,88' = 5460' + 88' = 5548'$ bulunur.

Uygulayalım:

Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 65°40'30''$ ve $m(\widehat{C}) = 38°20'45''$ ise $m(\widehat{B})$ nü bulalım.

Çözelim:

Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ dir.

$65°\ 40'\ 30'' + m(\widehat{B}) + 38°20'45'' = 180°$ olur.

Burada önce $\widehat{A}$ ve $\widehat{C}$ nın ölçülerini toplayalım.

$$
\begin{array}{rrrrl}
m(\widehat{A}) = & 65° & 40' & 30'' & \\
+\ m(\widehat{C}) = & 38° & 20' & 45'' & \\
\hline
m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = & 103° & 60' & 75'' & (60'' = 1') \\
= & 103° & 61' & 15'' & (60' = 1°) \\
= & 104° & 1' & 15'' & \text{bulunur.}
\end{array}
$$

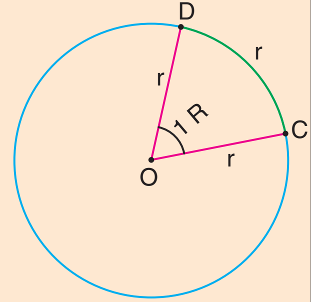
Şimdi de 180° den $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})$ toplamını çıkaralım.

O hâlde istenen $m(\widehat{B}) = 75°\ 58'\ 45''$ elde edilir.

$$
\begin{array}{rrrrl}
180° \rightarrow & 179° & 59' & 60'' & \\
- & 104° & 1' & 15'' & \\
\hline
 & 75° & 58' & 45'' & \text{bulunur.}
\end{array}
$$

Öğrenelim:

Radyan, merkez açının gördüğü yay uzunluğunun çemberin yarıçap uzunluğuna oranıdır. Bir çemberde yarıçap uzunluğuna eşit uzunluktaki yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 **radyan** denir ve bu, 1 **R** ile gösterilir. Radyan, iki uzunluğun oranını verir. Bu yüzden radyan açı ölçü birimi, bir gerçek sayı ile ifade edilir. Yandaki şekilde O merkezli çemberde COD merkez açısı görülmektedir. Çemberin yarıçap uzunluğu r ve $|\widehat{DC}| = r$ ise $m(\widehat{COD}) = 1$ R olur.



360° lik merkez açının gördüğü yayın ölçüsü, 2π radyandır. O hâlde derece ve radyan ölçü birimleri arasında $|DC| = r$ ise $m(\widehat{COD}) = 1$ R olur.

D: derece ve R : radyan olmak üzere

$\dfrac{D}{360°} = \dfrac{R}{2\pi}$ veya $\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi}$ ilişkisi vardır.

Uygulayalım:

240° ölçüye sahip bir açının radyan cinsinden ölçüsünü bulalım.

Çözelim:

1. Yol:

$\dfrac{D}{360°} = \dfrac{R}{2\pi}$ ilişkisinde D = 240° ise

$\dfrac{240°}{360°} = \dfrac{R}{2\pi} \Rightarrow R = \dfrac{480°.\pi}{360°} \Rightarrow R = \dfrac{4\pi}{3}$

radyan elde edilir.

2. Yol:

$180° = \pi$ radyan ise doğru orantı ile istenen sonuç bulunur.

$$
\begin{array}{ll}
180° & \pi \text{ radyan} \\
240° & x \text{ radyan} \\
\hline
\end{array}
$$

$180°.x = 240°\pi \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$ radyan bulunur.

Uygulayalım:

$\frac{3\pi}{4}$ ve $\frac{11\pi}{6}$ radyanlık ölçülere sahip açıların derece cinsinden ölçülerini bulalım.

Çözelim:

Önce $\frac{3\pi}{4}$ radyanlık ölçüye sahip açının derece cinsinden ölçüsünü bulalım.

$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ ilişkisinde $R = \frac{3\pi}{4}$ değeri yerine yazıldığında

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{3\pi.180^\circ}{4\pi} \Rightarrow D = 135^\circ \text{ elde edilir.}$$

Şimdi de $\frac{11\pi}{6}$ radyanlık ölçüye sahip açının derece cinsinden ölçüsünü orantı yoluyla bulalım.

$\pi = 180°$ olduğundan doğru orantı ile istenen sonuca ulaşılabilir.

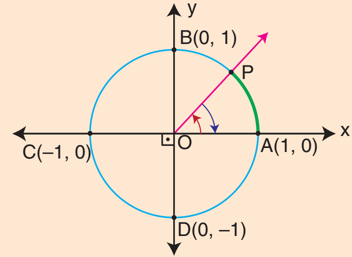
π radyan ——— $180°$ ise

$\frac{11\pi}{6}$ radyan ——— x

$$\pi.x = \frac{11\pi}{6}\cdot 180^\circ \Rightarrow x = 330^\circ \text{ bulunur.}$$

Öğrenelim:

Analitik düzlemde merkezi başlangıç noktası ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** adı verilir. Yanda analitik düzlemde verilen birim çemberi inceleyiniz.



Şekildeki birim çemberde $\widehat{AOP}$ pozitif yönlü bir açı olduğundan $\overset{\frown}{AP}$, pozitif yönlü bir yaydır.

$\widehat{POA}$ negatif yönlü bir açı olduğundan $\overset{\frown}{PA}$, negatif yönlü bir yaydır.

Uygulayalım:

Aşağıda ölçüleri radyan cinsinden verilen yayların bitim noktalarını birim çemberde bulalım.

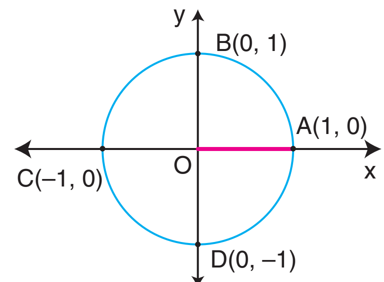
a. 0 **b.** $\frac{\pi}{2}$ **c.** π **ç.** $\frac{3\pi}{2}$ **d.** 2π

Çözelim:

Tüm açı ölçülerini yanlarında verilen analitik düzlemde göstererek istenen değerleri bulalım.

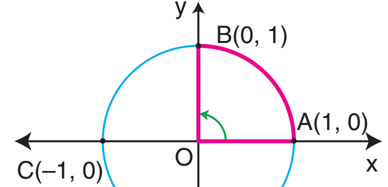
a. Ölçüsü 0 radyan olan açının başlangıç ve bitim kenarı [OA dır.

O hâlde yayın bitim noktası A(1,0) dır.



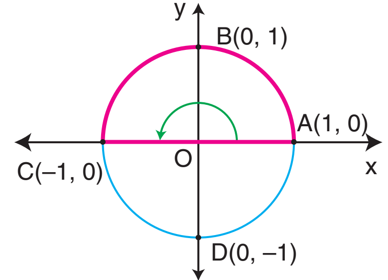
b. Ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ radyan olan açının başlangıç kenarı, [OA ve bitim kenarı [OB dır.

O hâlde açı pozitif yönlü ve yayın bitim noktası, B(0, 1) dir.



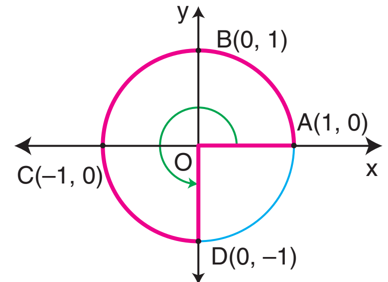
c. Ölçüsü π radyan olan açının başlangıç kenarı, [OA ve bitim kenarı [OC dır.

O hâlde yayın bitim noktası, C(–1, 0) dır.



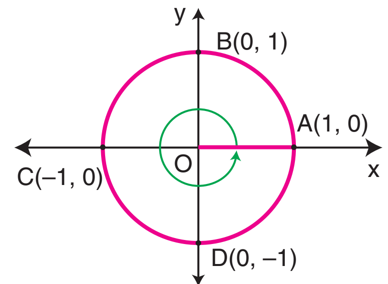
ç. Ölçüsü $\frac{3\pi}{2}$ radyan olan açının başlangıç kenarı, [OA ve bitim kenarı [OD dır.

O hâlde yayın bitim noktası, D(0, –1) dir.



d. Ölçüsü 2π radyan olan açının başlangıç kenarı [OA ve bitim kenarı da [OA dır.

O hâlde yayın bitim noktası, A(1, 0) dır.

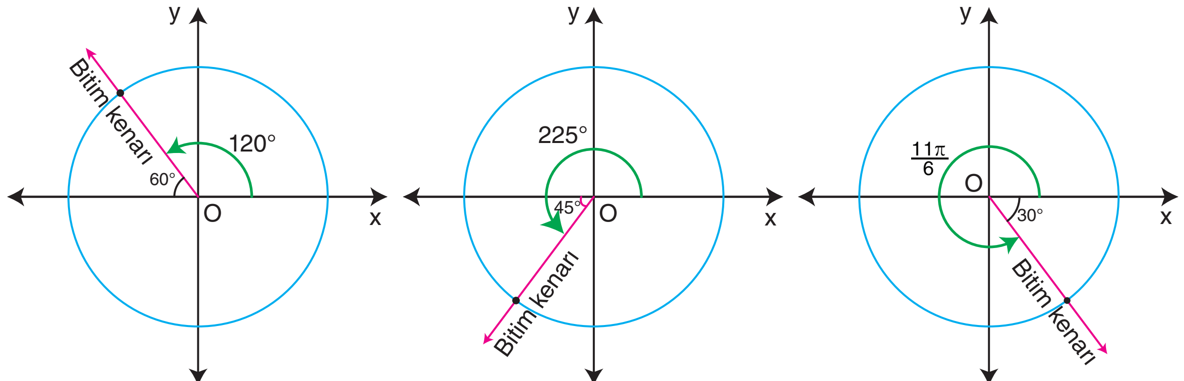


Uygulayalım:

Analitik düzlemde başlangıç kenarı [Ox ve ölçüsü 120°, 225° ve $\frac{11\pi}{6}$ radyan olan yayların bitim kenarlarını birim çemberde bulalım.

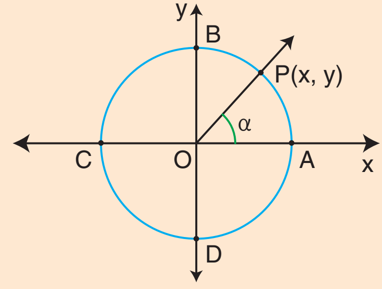
Çözelim:

Aşağıda verilen açı ölçülerinin bitim kenarları, birim çemberde gösterilmiştir.



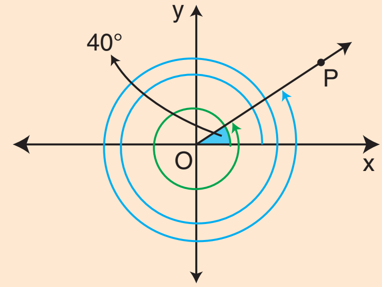
Öğrenelim:

Yandaki şekilde birim çember üzerinde verilen pozitif yönlü AOP açısının ölçüsü α olsun.



AOP açısının [OA kenarı sabit olmak üzere [OP kenarını pozitif yönde döndürerek şekildeki konuma tekrar getirelim. Bu durumda açının aldığı yayın ölçüsünün $\alpha + 360°$ olduğu görülür. [OP nın bu şekilde k kez döndüğünü kabul ettiğimizde P noktasının çizdiği yayın ölçüsü, $\alpha + k.360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ olur. Aynı şekilde [OP nı negatif yönde döndürürsek $\alpha + k.360°$ ifadesinde k, negatif tamsayı olur. Yani ölçüsü $\alpha + k.360°$ olan açıların bitim kenarı, [OP dır. AOP yönlü açısının ölçüsü pek çok gerçek sayı olabilmektedir. Bunlardan [0°, 360°) aralığında olanına AOP açısının ya da AP yayının **esas ölçüsü** adı verilir (Esas ölçü, pozitif yönlü açılar için kullanılır.).

Yandaki çemberde esas ölçüsü 40° olan açı ölçülerinden bazıları;



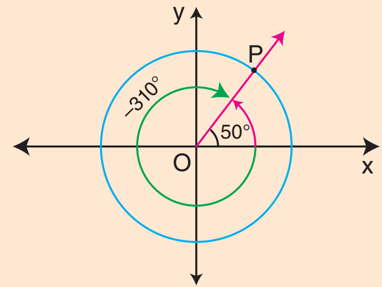
$40° + 1.360° = 40° + 360° = 400°$,

$40° + 2.360° = 40° + 720° = 760°$,

$40° + 3.360° = 40° + 1080° = 1120°$ dir.

Bu açıların bitim kolları, birim çemberi P noktasında kesmektedir.

Yanda verilen birim çemberde pozitif yönlü 50° ölçülü açı ile negatif yönlü 310° ölçülü açının bitim kenarı, birim çemberi P noktasında kesmektedir.



Esas ölçüsü 50° olan açı ölçülerinden bazıları;

$50° - 1.360° = 50° - 360° = -310°$,

$50° - 2.360° = 50° - 720° = -670°$,

$50° - 3.360° = 50° - 1080° = -1030°$ dir.

Bu açıların bitim kenarları, birim çemberi P noktasında kesmektedir.

O hâlde $k \in \mathbb{Z}$ ve $0° \leq \alpha < 360°$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k.360°$ olan açıların esas ölçüsü α derecedir.

$0 \leq \alpha < 2\pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k.2\pi$ olan açıların esas ölçüsü, α radyandır.

Uygulayalım:

Ölçüsü 1850° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözelim:

Ölçüsü 360° den büyük olan açıların esas ölçüsünü bulmak için verilen açıyı 360° ye böleriz.

$$\begin{array}{r|l} 1850 & 360 \\ \hline -\,1800 & 5 \\ \hline 50 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminin sonucunda $1850° = 50° + 5.360°$ olur.

Yani 1850° ölçüye sahip açının esas ölçüsü 50° dir.

Uygulayalım:

Ölçüsü –1290° olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözelim:

Yandaki bölme işlemine göre

$$\begin{array}{r|l} -1290 & 360 \\ \underline{-\;-1440} & -4 \\ 150 & \end{array}$$

$-1290° = 150° + (-4).360°$ olduğundan

$-1290°$ ölçüye sahip açının esas ölçüsü 150° olur.

Uygulayalım:

Sabit bir eksende 1 dakika süresince gerçekleştirilen dönüş / devir sayısına rpm ölçü birimi karşılık gelir. Bilimsel yollarla ispatlanmış ve yapılmış olan bir sabit diskte bu değer arttıkça bilgisayarın performansı da artar.

15000 rpm hızına sahip bir bilgisayarın sabit diski, 8 saniye dönmektedir. Dönüşe başladığı andan itibaren diskin üzerindeki bir noktanın bu sürede kaç derece döndüğünü ve bu açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözelim:

Sabit diskin 1 dakikada 15000 tam tur yapması hâlinde 8 saniyede kaç tur yaptığını bulalım.

1 dakikada 60 saniye olduğuna göre $8 \cdot \frac{15000}{60} = 2000$ kez döner.

Bir tur 360° lik açı oluşturduğu için oluşan açının ölçüsü,

$2000.360° = 720000°$ olarak bulunur.

Bu değer 360° nin katı olduğundan esas ölçü, 0° elde edilir.

Uygulayalım:

Ölçüsü $\frac{47\pi}{4}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulalım.

Çözelim:

$\frac{47\pi}{4}$ ifadesinin payındaki sayı olan 47 yi paydanın 2 katına (8 e) bölerek ifadenin içinde bulunan 2π sayısını bulabiliriz. Kalan sayı olan 7 ile π yi çarpıp ilk verilen paydaya (4 e) böldüğümüzde elde edilen ölçü, esas ölçüdür.

$$\begin{array}{r|l} 47 & 8 \\ \underline{-\;40} & 5 \\ 7 & \end{array}$$

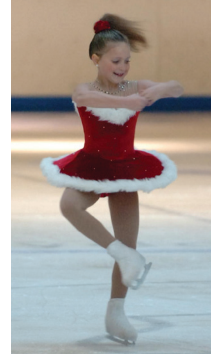
Yani $\frac{47\pi}{4}$ ölçüye sahip açının esas ölçüsü, $\frac{7\pi}{4}$ tür.

Çünkü $\frac{47\pi}{4} = 5.2\pi + \frac{7\pi}{4}$ tür.

Dikkat Edelim!

Derece cinsinden verilen bir açının esas ölçüsü bulunurken 360° ye, radyan cisinden verilen bir açının esas ölçüsü bulunurken 2π ye bölme işlemleri yapılır.

Uygulayalım:



Buz pateni yarışmasında gösteri yapan bir yarışmacı, kendi ekseni etrafında $-\frac{108\pi}{7}$ radyan ölçülü bir açıyla dönüş yapmıştır. Yarışmacının dönmeye başladığı eksene göre hangi açıyla duracağını bulalım.

Çözelim:

Sorunun çözümü için ölçüsü $-\frac{108\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsünü bulmalıyız.

$-\frac{108}{7}$ kesrinin payının mutlak değerini paydanın iki katına bölelim. Kalan sayı π ile çarpılıp ilk paydaya bölündüğünde $-\frac{10\pi}{7}$ elde edilir.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 14 \\ \hline -98 & 7 \\ \hline 10 & \end{array}$$

$2\pi - \frac{10\pi}{7} = \frac{4\pi}{7}$ radyanlık açı, esas ölçü olur.

Yani ölçüsü $\frac{-108\pi}{7}$ radyan olan açının esas ölçüsü, $\frac{4\pi}{7}$ radyandır.

O hâlde yarışmacı dönmeye başladığı eksene göre $\frac{4\pi}{7}$ radyan ölçülü bir açıyla durmuştur.

Pekiştirelim:

1. a = 25° 48′ 11″ ve b = 102° 33′ 48″ ise 2a + b değeri ile 5a – b değerini bulunuz.

2. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 71^\circ\ 31'$ ve $m(\widehat{B}) = 45^\circ\ 29'$ ise $m(\widehat{C}) = \alpha$ kaç derecedir?

3. 2840 dakikalık açıyı derece cinsinden ifade ediniz.

4. Aşağıda derece cinsinden verilen açıların ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

   a. 30 b. 90 c. 110 ç. 160 d. 300 e. 330

5. Aşağıda radyan cinsinden verilen açıların ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

   a. $\frac{\pi}{12}$ b. $\frac{\pi}{6}$ c. $\frac{3\pi}{5}$ ç. $\frac{5\pi}{3}$ d. $\frac{5\pi}{3}$ e. $\frac{11\pi}{6}$

6. Aşağıda ölçüleri verilen yönlü yayların bitim kenarlarını birim çemberde gösteriniz.

   a. $\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3}$ c. $\frac{5\pi}{6}$ ç. $\frac{5\pi}{4}$ d. $\frac{7\pi}{4}$ e. $\frac{11\pi}{6}$

7. Bir bilgisayardaki fan, 5400 rpm hızına sahiptir. 10 saniyelik bir sürede fanın üzerinde bulunan bir noktanın kaç derece döndüğünü ve bu açının esas ölçüsünü bulunuz.

8. Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

   a. 928° b. 1375° c. 2048° ç. 3545° d. 4210° e. 9636°

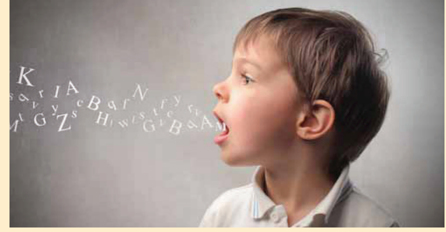
   f. –128° g. –725° h. –1218° ı. –1500° i. – 3540° j. –7260°

   k. $\frac{17\pi}{3}$ l. $\frac{29\pi}{2}$ m. $\frac{108\pi}{5}$ n. $\frac{220\pi}{9}$ o. $\frac{118\pi}{7}$ ö. $\frac{293\pi}{9}$

   p. $-\frac{\pi}{3}$ r. $-\frac{19\pi}{4}$ s. $-\frac{57\pi}{3}$ t. $-\frac{69\pi}{5}$ u. $-\frac{72\pi}{13}$ ü. $-\frac{117\pi}{4}$

1.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

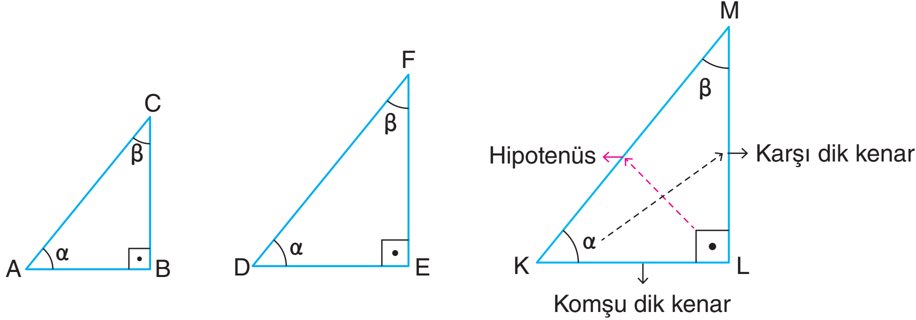
Konuşurken çıkardığımız sesler, aslında birer trigonometrik fonksiyondur. Bu ses titreşimleri, sinüs ve kosinüs fonksiyon eğrileri gibi ilerlemektedir.



1.2.1. Trigonometrik Fonksiyonları Birim Çember Yardımıyla Açıklama

Hatırlayalım:

Aşağıdaki gibi açıları eş, üç dik üçgen verilsin. En az iki açısı eş olan üçgenler, Açı - Açı (A.A.) benzerlik kuralına göre benzer üçgenlerdir. Bu nedenle aşağıda verilen üçgenler benzerdir.



$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \sim \widehat{KLM}$ olduğundan $\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|FE|}{|DF|} = \frac{|ML|}{|KM|}$ yazılabilir.

Dik üçgenler için yazılan bu oranlar, α açı ölçüsünün karşı dik kenar uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun oranına karşılık gelir. İşte bu oran, α açı ölçüsünün sinüsü olarak adlandırılır.

$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$ olarak gösterilir.

Benzer şekilde $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|} = \frac{|KL|}{|KM|}$ oranlarının eşitliği, α açısı ölçüsünün komşu dik kenar uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun oranına karşılık gelir. Bu da α açı ölçüsünün kosinüsü olarak adlandırılır.

$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$ olarak gösterilir.

Yine benzer üçgenlerde elde edilen $\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|FE|}{|DE|} = \frac{|ML|}{|KL|}$ oranlarının eşitliği, α açı ölçüsünün karşı dik kenar uzunluğu ile komşu dik kenar uzunluğunun oranıdır. Bu oran, α açı ölçüsünün tanjantı olarak adlandırılır.

$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$ olarak gösterilir.

Benzer şekilde $\dfrac{|AB|}{|CB|} = \dfrac{|DE|}{|FE|} = \dfrac{|KL|}{|ML|}$ oranlarının eşitliğinden elde edilen her bir oran, α açı ölçüsünün komşu dik kenar uzunluğunun karşı dik kenar uzunluğuna oranıdır. Bu oran da kotanjant olarak adlandırılır.

$\cot\alpha = \dfrac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$ olarak gösterilir.

Trigonometrik oranları kullanarak bazı özel üçgenlerde belirli açıların trigonometrik oranlarını rahatlıkla bulabiliriz.

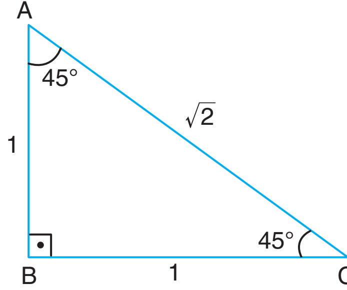
ABC ikizkenar dik üçgeninde $|AB| = |BC| = 1$ br olacak şekilde seçelim. Bu durumda $|AC| = \sqrt{2}$ br olur. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 45°$ ise

$\sin 45° = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\cot 45° = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{1}{1} = 1$ dir.



Bir kenarının uzunluğu 2 br olan ABC eşkenar üçgenini çizelim.

$|AB| = |BC| = |CA| = 2$ br olmak üzere $[AD] \perp [BC]$ ise

$|BD| = |DC| = 1$ br ve $|AD| = \sqrt{3}$ br olur. $m(\widehat{ABD}) = 60°$ ve $m(\widehat{BAD}) = 30°$ dir.

ABD dik üçgeninde

$\sin 30° = \dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$

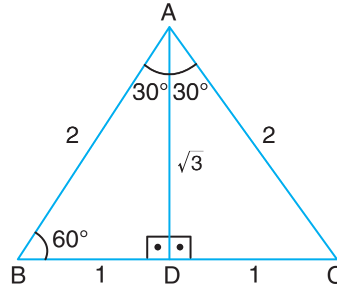
$\cos 30° = \dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{|BD|}{|AD|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30° = \dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\sin 60° = \dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$



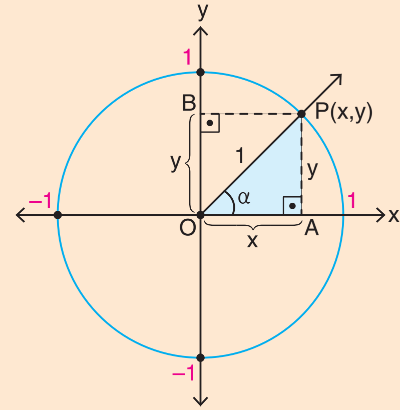
$\tan 60° = \dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ve $\cot 60° = \dfrac{|BD|}{|AD|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Dikkat Edelim!

Birbirini 90° ye tamamlayan iki açıdan (tümler açılar) birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüne; birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına eşittir. Yani $x + y = 90°$ ise $\sin x = \cos y$ ve $\tan x = \cot y$ dir.

Öğrenelim:

Trigonometri birçok alanda kullanılır. Örneğin fizikte açısal hız hesaplamalarında, coğrafyada harita oluşturmada, farklı enlemlerde yer alan iki şehir arasındaki uzaklık hesaplamalarında, herhangi bir araçla ölçülmesi güç ya da mümkün olmayan yüksekliklerin bulunmasında, astronomide yıldızlar ve gezegenler arası uzaklık bulmada, meteorolojide yıllık sıcaklık değişimlerinin hesaplanmasında trigonometriden yararlanılır. Bu hesaplamaların yapılmasında trigonometrik oranların sadece dik üçgenlerde kullanılmamasının ve birim çemberle ilişkilendirilerek analitik düzlemde de gösteriliyor olmasının payı büyüktür. Şimdi analitik düzlemde, birim çember üzerinde trigonometrik oranlardan sinüs ile kosinüsün nasıl ilişkilendirildiğini inceleyelim.



Birim çemberde P(x, y) noktası ile eşlenen açının ölçüsü $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun. OAP dik üçgeninde [OP] (hipotenüs), O merkezli birim çemberde yarıçap olduğundan $|OP| = 1$br dir. P noktasının koordinatları (x,y) olduğundan $|OA| = x$, $|OB| = y$ dolayısıyla $|PA| = y$ olur. Buradan OAP dik üçgeninde

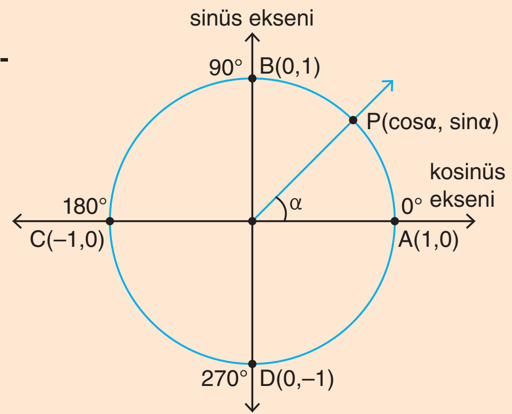
$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{|PA|}{|OP|} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{|OA|}{|OP|} = \frac{x}{1} = x \text{ olur.}$$

Bu durumda P noktasının apsisine α açısının kosinüsü ve ordinatına da α açısının sinüsü karşılık gelir. Yani

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$ bulunur.

Bu yüzden x eksenine aynı zamanda **kosinüs ekseni**, y eksenine de **sinüs ekseni** adı verilir.



Birim çemberde

A(1, 0) olduğundan $\cos 0° = 1$ ve $\sin 0° = 0$ dır.

B(0, 1) olduğundan $\cos 90° = 0$ ve $\sin 90° = 1$ dır.

C(–1, 0) olduğundan $\cos 180° = -1$ ve $\sin 180° = 0$ dır.

D(0, –1) olduğundan $\cos 270° = 0$ ve $\sin 270° = -1$ dır.

Görüldüğü gibi açıların kosinüs ve sinüs değerleri –1 ile 1 arasında değerler almaktadır.

cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ e tanımlanan bir α gerçek sayısını cosα ya dönüştüren fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(\alpha) = \cos\alpha$ ile gösterilir.

Benzer şekilde sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ e tanımlanan bir α gerçek sayısını sinα ya dönüştüren fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.

Bu fonksiyon $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(\alpha) = \sin\alpha$ ile gösterilir.

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının görüntü kümesi, [–1, 1] dir.

Yani $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos\alpha \le 1$ ve $-1 \le \sin\alpha \le 1$ olur.

Uygulayalım:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 3.\sin x - 2$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım.

Çözelim:

Sinüs fonksiyonunun görüntü kümesinin [–1, 1] olduğu bilindiğine göre alacağı değerler, $-1 \leq \sin x \leq 1$ olur. Buradan

$$3.(-1) \leq 3.\sin x \leq 3.1 \Rightarrow -3 \leq 3.\sin x \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 - 2 \leq 3.\sin x - 2 \leq 3 - 2 \Rightarrow -5 \leq 3.\sin x - 2 \leq 1$$ olduğundan

$f(x) = 3.\sin x - 2$ fonksiyonunun değer kümesi, [–5, 1] olarak bulunur.

Uygulayalım:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 4.\cos x + 3$ fonksiyonunun değer kümesini bulalım.

Çözelim:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğunu biliyoruz.

$f(x) = 4.\cos x + 3 \Rightarrow \frac{f(x) - 3}{4} = \cos x$ olur.

$-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan $-1 \leq \frac{f(x) - 3}{4} \leq 1$ ise

$4.(-1) \leq 4 \cdot \frac{f(x) - 3}{4} \leq 4.1 \Rightarrow -4 \leq f(x) - 3 \leq 4 \Rightarrow -4 + 3 \leq f(x) - 3 + 3 \leq 4 + 3$

$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 7$ elde edilir. Yani f(x) fonksiyonunun değer kümesi, $[-1, 7]$ olur.

Uygulayalım:

$\forall \alpha, \theta \in \mathbb{R}$ için $A = 5.\sin\theta - 3.\cos\alpha$ olmak üzere A nın en küçük tamsayı değeri kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow (-3).(-1) \geq (-3).\cos\alpha \geq (-3).1 \Rightarrow -3 \leq -3.\cos\alpha \leq 3$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \Rightarrow 5.(-1) \leq 5.\sin\theta \leq 5.1 \Rightarrow -5 \leq 5.\sin\theta \leq 5$

$+$

$-8 \leq 5.\sin\theta - 3.\cos\alpha \leq 8$

$-8 \leq A \leq 8$ olur.

Bu durumda A nın en küçük tam sayı değeri, –8 bulunur.

Uygulayalım:

$\sin x = \frac{a - 2}{2}$ ve $\cos y = \frac{b - 1}{3}$ olduğuna göre $a + 2b$ ifadesinin en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözelim:

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{a-2}{2} \leq 1 \Rightarrow 2.(-1) \leq 2 \cdot \frac{a-2}{2} \leq 2.1 \Rightarrow -2 \leq a - 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4$ ve

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{b-1}{3} \leq 1 \Rightarrow 3.(-1) \leq 3.\frac{b-1}{3} \leq 3.1 \Rightarrow -3 \leq b - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq b \leq 4$ olur.

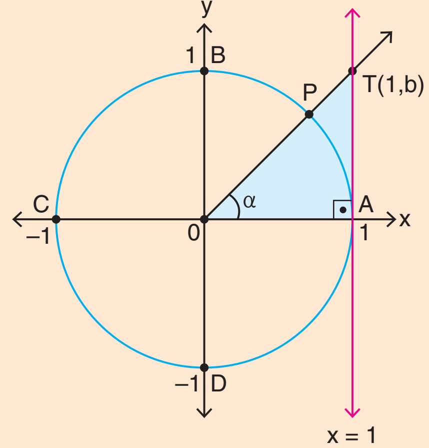
$-2 \leq b \leq 4$ ise $-4 \leq 2b \leq 8$ bulunur.

$\left.\begin{array}{r} 0 \leq a \leq 4 \\ -4 \leq 2b \leq 8 \end{array}\right\}$ toplanırsa $-4 \leq a + 2b \leq 12$ olur.

Buradan $a + 2b$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri, 12 elde edilir.

Öğrenelim:

Analitik düzlemde, birim çember üzerinde trigonometrik oranlardan tanjant ve kotanjantın nasıl ilişkilendirildiğini inceleyelim.



Yandaki gibi birim çember üzerinde P noktası ile eşlenen açının ölçüsü $m(\widehat{AOP}) = \alpha$; [OP nın x = 1 doğrusunu kestiği nokta, T(1, b) olsun.

OAT dik üçgeninde $|OA| = 1$ br ve $|TA| = b$ olduğundan

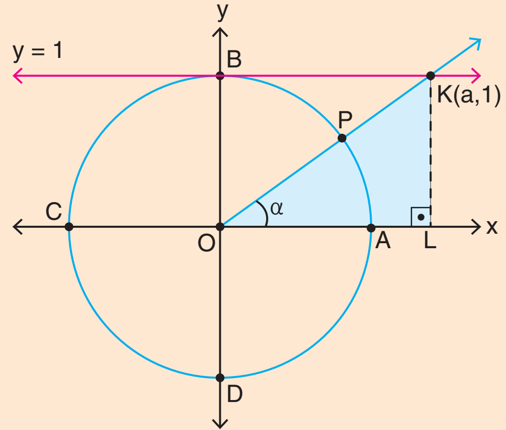
$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$$

$$= \frac{|TA|}{|OA|} = \frac{b}{1} = b \text{ bulunur.}$$

Bu durumda T noktasının ordinatına α açısının tanjantı denir. Yani $\tan\alpha = b$ olur. Bu durumda x = 1 doğrusuna da **tanjant ekseni** denir.

$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ olduğunda P ile B noktası, $\alpha = 270° = \frac{3\pi}{2}$ olduğunda da P ile D noktası çakışır. Yani bu durumlarda α açısının kolu tanjant eksenine paralel olduğundan $\tan\frac{\pi}{2}$ ile $\tan\frac{3\pi}{2}$ değerleri tanımsızdır. Bu durumda tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir α gerçek sayısını tanα ya eşleyen fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

Yani $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(\alpha) = \tan\alpha$ olur.



Yandaki gibi birim çemberde P ile eşlenen açının ölçüsü α, [OP nın y = 1 doğrusunu kestiği nokta K(a, 1) olsun. OLK dik üçgeninde $|OL| = a$ ve $|KL| = 1$ br olduğuna göre

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

$$= \frac{|OL|}{|KL|} = \frac{a}{1} = a \text{ bulunur.}$$

Bu durumda K noktasının apsisine α açısının **kotanjantı** denir. Yani $\cot\alpha = a$ olur. Burada y = 1 doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.

$\alpha = 0°$ olduğunda P ile A noktası, $\alpha = 180° = \pi$ olduğunda da P ile C noktası çakışır. Yani bu durumlarda α açısının kolu kotanjant eksenine paralel olduğundan cot0° ve cotπ değerleri tanımsız olur. Bu durumda tanım kümesi $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir α gerçek sayısını cotα ya eşleyen fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.

Yani $f: \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(\alpha) = \cot\alpha$ olur.

Uygulayalım:

f: [0, 7] → $\mathbb{R}$, f(x) = tanx – 2 fonksiyonunun tanımlı olması için fonksiyonun tanım kümesinden hangi değerlerin çıkarılması gerektiğini bulalım ($\pi \cong 3{,}14$ alalım.).

Çözelim:

Tanjant fonksiyonu; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ yani $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... değerleri için tanımsızdır. Bu değerlerin karşılıklarını bulalım.

$\frac{\pi}{2} \cong \frac{3,14}{2} \cong 1,57$ $\frac{3\pi}{2} \cong \frac{3.3,14}{2} \cong 4,71$ $\frac{5\pi}{2} \cong \frac{5.3,14}{2} \cong 7,85 \notin [0,7]$

Verilen [0, 7] aralığından $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ değerlerini çıkarırsak f(x) doğru tanımlanmış olur. Yani

$f: [0, 7] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, f(x) = tanx – 2 biçiminde tanımlanmalıdır.

Uygulayalım:

f: [3, 12] → $\mathbb{R}$, f(x) = 2cotx – 4 fonksiyonunun tanımlı olması için fonksiyonun tanım kümesinden hangi değerlerin çıkarılması gerektiğini bulalım ($\pi \cong 3{,}14$ alalım.).

Çözelim:

Kotanjant fonksiyonu; $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ yani π, 2π, 3π, 4π, ... değerlerinde tanımsızdır. Bu değerlerden [3, 12] aralığında olanları çıkarmamız gerekir.

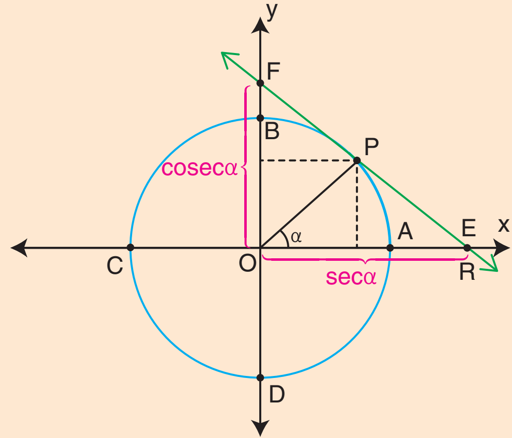
$\pi \cong 3{,}14$ $2\pi \cong 2 . 3{,}14 \cong 6{,}28$ $3\pi \cong 3 . 3{,}14 \cong 9{,}42$ $4\pi \cong 4 . 3{,}14 \cong 12{,}56 \notin [3,12]$

O hâlde verilen [3, 12] aralığından π, 2π ve 3π değerlerini çıkarırsak fonksiyonun tanım kümesi doğru olur.

$f: [3, 12] - \{\pi, 2\pi, 3\pi\} \to \mathbb{R}$, f(x) = 2cotx – 4 biçiminde tanımlanmalıdır.

Öğrenelim:

Birim çember üzerinde $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olmak üzere çemberin P noktasındaki teğetinin koordinat eksenlerini kestiği noktalardan, x eksenini kestiği E noktasının apsisine α açısının **sekantı** denir ve bu, **secα** ile gösterilir. Aynı teğetin y eksenini kestiği nokta olan F noktasının ordinatına α açısının **kosekantı** denir ve bu, **cscα** ile gösterilir.



B ve D noktalarında sekant değeri tanımsız olur. Tanım kümesi $\mathbb{R} \to \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir α gerçek sayısını secα e eşleyen fonksiyona **sekant fonksiyonu** denir. Yani

$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} - \{0\}, f(\alpha) = \sec\alpha$

olarak tanımlanır.

Birim çember üzerinde gösterilen A ve C noktalarında kosekant değerleri tanımsızdır. Tanım kümesi, $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir α gerçek sayısını cscα e eşleyen fonksiyona **kosekant fonksiyonu** denir. Yani

$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} - \{0\}, f(\alpha) = \csc\alpha$ olur.

Uygulayalım:

f: [0, 14] → $\mathbb{R}$, f(x) = 5secx – 3 fonksiyonunun tanımlı olması için verilen tanım kümesinden hangi değerlerin çıkarılması gerektiğini bulalım ($\pi \cong 3{,}14$ alalım.).

Çözelim:

Sekant fonksiyonu; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, yani $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, ... değerlerinde tanımsızdır. Bu değerlerden hangilerinin [0, 14] aralığında olduğunu belirleyelim.

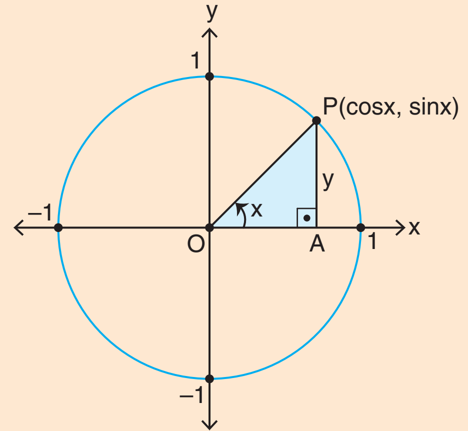
$\frac{\pi}{2} \cong 1{,}57$ $\quad \frac{3\pi}{2} \cong 4{,}71$ $\quad \frac{5\pi}{2} \cong 7{,}85$ $\quad \frac{7\pi}{2} \cong 10{,}99$ $\quad \frac{9\pi}{2} \cong 14{,}13$

$\frac{9\pi}{2} \cong 14{,}13$ verilen [0, 14] nda olmadığından bu aralıktan $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ve $\frac{7\pi}{2}$ değerlerini çıkarmamız yeterlidir. Bu durumda fonksiyonun doğru tanımlanması,

f: $[0, 7] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, f(x) = 5secx – 3 biçiminde olur.

Öğrenelim:

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları arasındaki özdeşlik, birim çember üzerinde oluşturulan dik üçgen yardımıyla bulunabilir.



Şekildeki OAP dik üçgeninde $|OA| = \cos x$, $|AP| = \sin x$ ve $|OP| = 1$ br olup Pisagor bağıntısından

$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2$ yazılabilir.

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

$\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ elde edilir.

Bu eşitlik farklı biçimlerde ifade edilirse

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = (1 - \sin x) . (1 + \sin x)$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos x) . (1 + \cos x)$

özdeşliklerine ulaşılır.

Uygulayalım:

$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ise sinx . cosx kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Verilen denklemin her iki tarafının karesini alalım.

$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2$

$\sin^2 x - 2.\sin x.\cos x + \cos^2 x = \frac{3}{25}$ $\quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$

$1 - 2.\sin x.\cos x = \frac{3}{25} \Rightarrow 2.\sin x.\cos x = 1 - \frac{3}{25}$

$\Rightarrow 2.\sin x.\cos x = \frac{22}{25} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{11}{25}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$x \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x} - \cos x - \sin x$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözelim:

$x \in \mathbb{R}$ için $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ise

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1-\cos x).(1+\cos x)$ ve

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x).(1+\sin x)$ olacağından

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} - \cos x - \sin x$$

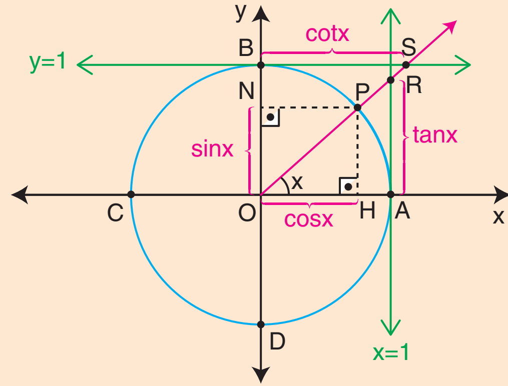
$$= \frac{\cancel{(1-\cos x)}.(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}} - \frac{(1-\sin x).\cancel{(1+\sin x)}}{\cancel{1+\sin x}} - \cos x - \sin x$$

$= 1 + \cos x - (1 - \sin x) - \cos x - \sin x$

$= 1 + \cos x - 1 + \sin x - \cos x - \sin x = 0$ bulunur.

Öğrenelim:

Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkiler, birim çemberde benzer üçgenler kullanılarak bulunabilir.



Yandaki birim çemberde

$\overset{\frown}{OHP} \backsim \overset{\frown}{OAR}$ olduğundan

$\dfrac{|OH|}{|OA|} = \dfrac{|HP|}{|AR|}$ dur. Buradan

$\dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{\sin x}{\tan x} \Rightarrow \mathbf{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ elde edilir.

$\overset{\frown}{ONP} \backsim \overset{\frown}{OBS}$ olduğundan

$\dfrac{|ON|}{|OB|} = \dfrac{|NP|}{|BS|}$ dur. Buradan

$\dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{\cos x}{\cot x} \Rightarrow \mathbf{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$ elde edilir.

$\tan x . \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} . \dfrac{\cos x}{\sin x} = 1$ olacağından **tanx . cotx = 1** dir. Buradan

$\tan x . \cot x = 1 \Rightarrow \mathbf{\tan x = \dfrac{1}{\cot x}}$ ve $\mathbf{\cot x = \dfrac{1}{\tan x}}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$\tan x - \cot x = 2$ ise $\tan^2 x + \cot^2 x$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

Verilen eşitlikte her iki tarafın karesini alalım.

$(\tan x - \cot x)^2 = 2^2 \Rightarrow \tan^2 x - 2.\underbrace{\tan . \cot x}_{1} + \cot^2 x = 4$

$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 6$ bulunur.

Uygulayalım:

$x \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{\cot^2 x + 1}{\tan^2 x + 1}$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözelim:

$\dfrac{\cot^2 x + 1}{\tan^2 x + 1}$ ifadesinde $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ve $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ değerlerini yerine yazalım.

$$\dfrac{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}$$ eşitliğinde $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ifadesini yerine yazarsak

$$= \dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{1} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \cot^2 x$$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{5\sin x - 4\cos x}{2\sin x + \cos x} = \dfrac{2}{3}$ ise tanx in değerini bulalım.

Çözelim:

$\dfrac{5\sin x - 4\cos x}{2\sin x + \cos x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 15\sin x - 12\cos x = 4\sin x + 2\cos x$

$\Rightarrow 15\sin x - 4\sin x = 2\cos x + 12\cos x \Rightarrow 11\sin x = 14\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{14}{11} \Rightarrow \tan x = \dfrac{14}{11}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\cos x}{1 - \tan x} + \dfrac{\sin x}{1 - \cot x} = \sin x + \cos x$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$$\dfrac{\cos x}{1 - \tan x} + \dfrac{\sin x}{1 - \cot x} = \dfrac{\cos x}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \dfrac{\sin x}{1 - \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{\cos x}{\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}} + \dfrac{\sin x}{\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}}$$

$$= \dfrac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \dfrac{\sin^2 x}{-(\cos x - \sin x)} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$= \sin x + \cos x$ olur.

Uygulayalım:

$\sin^2 37° - \tan 13° \,.\cot 13° + \cos^2 37°$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözelim:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 37° + \cos^2 37° = 1$ ve

$\tan x . \cot x = 1 \Rightarrow \tan 13° \,.\, \cot 13° = 1$ dir.

O hâlde $\sin^2 37° - \underbrace{\tan 13° \,.\cot 13°}_{1} + \cos^2 37° = 1 - 1 = 0$ bulunur.

Öğrenelim:

Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkiler, birim çember üzerinde benzer üçgenler yardımıyla bulunabilir.

Yandaki birim çemberde

$\widehat{OHP} \backsim \widehat{OPS}$ olduğundan

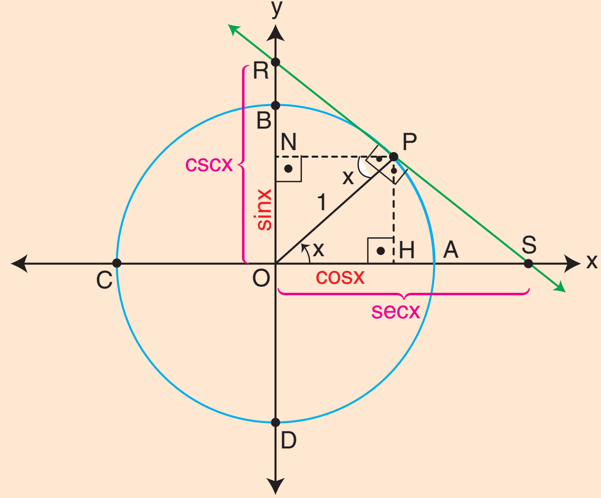
$\frac{|OH|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OS|} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{\sec x}$ ise

$\mathbf{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$ elde edilir.

$\widehat{ONP} \backsim \widehat{OPR}$ olduğundan

$\frac{|ON|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OR|} \Rightarrow \frac{\sin x}{1} = \frac{1}{\csc x}$

$\mathbf{\csc x = \frac{1}{\sin x}}$ elde edilir.



Uygulayalım:

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$

$= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$

$= (\sec x)^2 = \sec^2 x$ elde edilir.

Uygulayalım:

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$

$= 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2$

$= (\csc x)^2 = \csc^2 x$ elde edilir.

Uygulayalım:

$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözelim:

$$\underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{1 + \sin x}} + \underset{(1 + \sin x)}{\frac{1 + \sin x}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos x.(1 + \sin x)} + \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos x.(1 + \sin x)} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1} + 2\sin x + 1}{\cos x.(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2 + 2\sin x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos x}$$

$= 2\sec x$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \csc^2 x + \cot^2 x} = -1$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \csc^2 x + \cot^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \dfrac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}}$$

$$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}$$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x)$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x)$

$$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x - 1} = \dfrac{\cos^2 x}{-\cos^2 x} = -1 \text{ olur.}$$

Uygulayalım:

$\dfrac{\sin x}{\cot x + \csc x} - \dfrac{\sin x}{\cot x - \csc x} = 2$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$$\dfrac{\sin x}{\cot x + \csc x} - \dfrac{\sin x}{\cot x - \csc x} = \dfrac{\sin x}{\dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin x}} - \dfrac{\sin x}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin x}}$$

$$= \dfrac{\sin x}{\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}} - \dfrac{\sin x}{\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$$

Elde edilen son ifadede $\sin^2 x = (1 - \cos x).(1 + \cos x)$ yerine yazılırsa

$$= \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos x + 1} - \dfrac{\overset{-1}{(1 - \cos x)}(1 + \cos x)}{\cos x - 1}$$

$= 1 - \cos x + 1 + \cos x$

$= 2$ olur.

Uygulayalım:

$\cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözelim:

$$\cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \underset{(1+\cos x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} + \underset{(\sin x)}{\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}} = \dfrac{\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\sin x.(1 + \cos x)}$$

$$= \dfrac{\cos x + 1}{\sin x.(1 + \cos x)} = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x \text{ olur.}$$

Uygulayalım:

x bir dar açı olmak üzere $\sin x . \cos x = \dfrac{12}{25}$ ise sinx + cosx toplamının eşitini bulalım.

Çözelim:

$\sin x + \cos x = A \Rightarrow A^2 = \sin^2 x + 2.\sin x.\cos x + \cos^2 x$

$\Rightarrow A^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2.\underbrace{\sin x.\cos x}_{\frac{12}{25}} = 1 + \dfrac{24}{25} = \dfrac{49}{25} \Rightarrow A^2 = \dfrac{49}{25} \Rightarrow A = \dfrac{7}{5}$ $(A > 0)$ olur.

$A = \sin x + \cos x = \dfrac{7}{5}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\cot x}{\csc x - 1} - \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözelim:

$$\frac{\cot x}{\csc x - 1} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} - 1} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1 - \sin x}{\sin x}} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x}{\underset{(1 + \sin x)}{1 - \sin x}} - \frac{\cos x}{\underset{(1 - \sin x)}{1 + \sin x}}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x . \sin x - \cos x + \cos x . \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{2 \cos x . \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos x}$$

$= 2\tan x$ elde edilir.

Uygulayalım:

$\dfrac{\sec^2 x - \csc^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = -1$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

$$\frac{\sec^2 x - \csc^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x . \cos^2 x}}{\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x . \cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x . \cos^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\sin^2 x . \cos^2 x}}{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x) . \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}}$$

$= -1$ olur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x - 2}{\sin x - 1} - 4$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözelim:

$$\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x - 2}{\sin x - 1} - 4 = \frac{\sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2}{\sin x - 1} - 4$$

$$= \frac{\sin^2 x - 2 + 2\sin^2 x + \sin x - 2}{\sin x - 1} - 4 = \frac{3\sin^2 x + \sin x - 4}{\sin x - 1} - 4$$

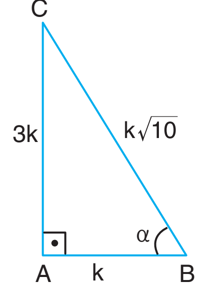
$$= \frac{(3\sin x + 4)\cancel{(\sin x - 1)}}{\cancel{\sin x - 1}} - 4 = 3\sin x + 4 - 4$$

$= 3\sin x$ elde edilir.

Uygulayalım:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan\alpha = 3$ ise $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözelim:



ABC dik üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olsun.

$\tan\alpha = 3$ ve $\tan\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$ bilindiğine göre

$|AC| = 3k$ ve $|AB| = k$ olur.

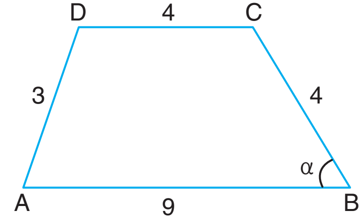
$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$ (Pisagor teoreminden)

$|BC|^2 = (3k)^2 + k^2 \Rightarrow |BC| = k\sqrt{10}$ elde edilir.

$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3k}{k\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ve $\cos\alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{k}{k\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ise

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}$ bulunur.

Uygulayalım:



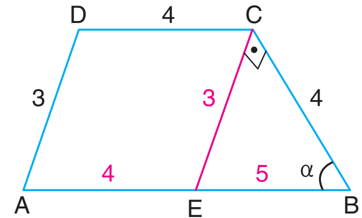
ABCD yamuk, $[AB] \parallel [DC]$,

$|AB| = 9$ cm, $m(\widehat{ABC}) = \alpha$,

$|DC| = |BC| = 4$ cm ve

$|AD| = 3$ cm dir. Buna göre $\cos\alpha$ kaçtır? Bulalım.

Çözelim:



Yandaki şekildeki gibi $[EC] \parallel [AD]$ çizilirse AECD paralelkenar olur.

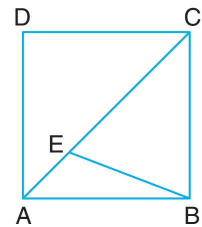
Bu durumda $|AD| = |CE| = 3$ cm ve $|AE| = |DC| = 4$ cm olur. $|EB| = |AB| - |AE| = 9 - 4 = 5$ cm dir.

Kenar uzunlukları 3 cm, 4 cm ve 5 cm olan EBC üçgeni $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliğini sağladığından dik üçgendir ve

$m(\widehat{ECB}) = 90°$ olur.

ECB dik üçgeninde $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|EB|} = \frac{4}{5}$ bulunur.

Uygulayalım:

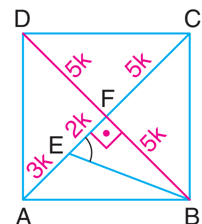


Yandaki şekilde ABCD kare ve $7|AE| = 3|EC|$ olduğuna göre $\cot(\widehat{BEC})$ kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$7|AE| = 3|EC|$ eşitliğinde $|AE| = 3k$ alınırsa $|EC| = 7k$ olur. Bu durumda $[AC]$ köşegeninin uzunluğu, $|AC| = 10k$ olur.

$[BD]$ köşegenini çizelim. Karenin köşegenleri eşit uzunlukta olup birbirini dik ortalayacağından $|AF| = 5k$, $|EF| = 2k$ ve $|DF| = |FB| = 5k$ olur.



BFE dik üçgeninde

$\cot(\widehat{BEC}) = \frac{2k}{5k} = \frac{2}{5}$ elde edilir.

Öğrenelim:

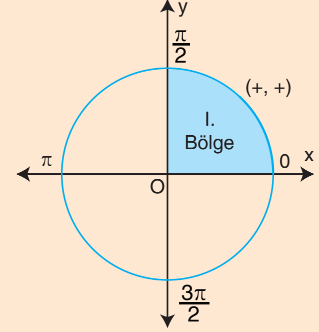
Trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini inceleyelim. Bunun için daha önce x eksenine (apsis) kosinüs ekseni, y eksenine (ordinat) sinüs ekseni dendiğini öğrenmiştik.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ve $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ olduğu kabul edilirse ölçüsü α olan açı için aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

1. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (I. Bölge)

Yani I. bölgede bütün trigonometrik fonksiyonlar pozitif değerler alır.

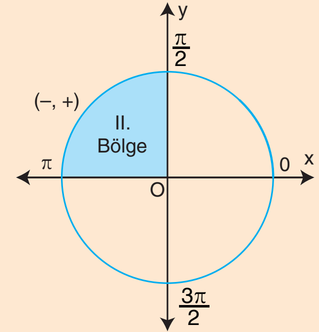
I. Bölge	İşaret
Apsis > 0	+
Ordinat > 0	+
$\cos\alpha > 0$	+
$\sin\alpha > 0$	+
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$	+
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$	+



2. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II. Bölge)

Yani II. bölgede sinüs fonksiyonu pozitif; kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları negatif değerler alır.

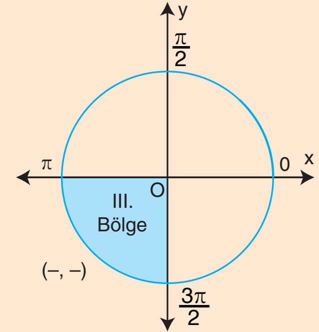
II. Bölge	İşaret
Apsis < 0	–
Ordinat > 0	+
$\cos\alpha < 0$	–
$\sin\alpha > 0$	+
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$	–
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$	–



3. $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ (III. Bölge)

Yani III. bölgede sinüs ve kosinüs fonksiyonları negatif, tanjant ve kontanjant fonksiyonları pozitif değerler alır.

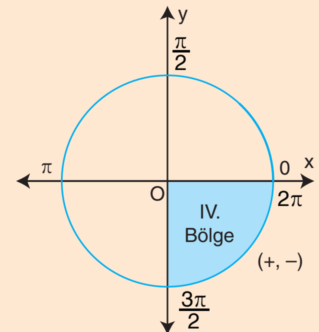
III. Bölge	İşaret
Apsis < 0	–
Ordinat < 0	–
$\cos\alpha < 0$	–
$\sin\alpha < 0$	–
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$	+
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$	+



4. $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ (IV. Bölge)

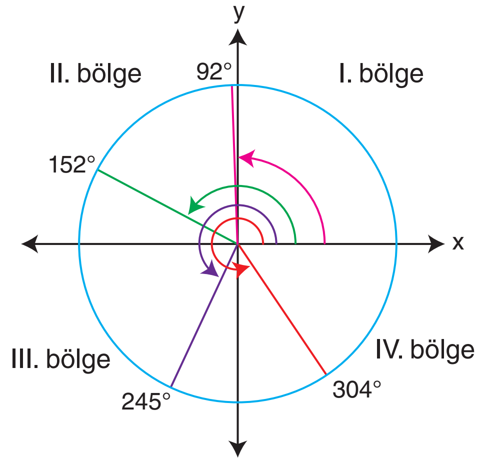
Yani IV. bölgede kosinüs fonksiyonu pozitif; sinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları negatif değerler alır.

IV. Bölge	İşaret
Apsis > 0	+
Ordinat < 0	–
$\cos\alpha > 0$	+
$\sin\alpha < 0$	–
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$	–
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$	–



Uygulayalım:

$a = \sin 152°$, $b = \cos 245°$, $c = \tan 92°$ ve $d = \cot 304°$ olmak üzere a, b, c ve d nin işaretlerini bulalım.



Çözelim:

$152° \in (90°, 180°)$ ve sinüs fonksiyonu II. bölgede pozitif değerli olduğundan $a > 0$ dır.

$245° \in (180°, 270°)$ ve kosinüs fonksiyonu III. bölgede negatif değerli olduğundan $b < 0$ dır.

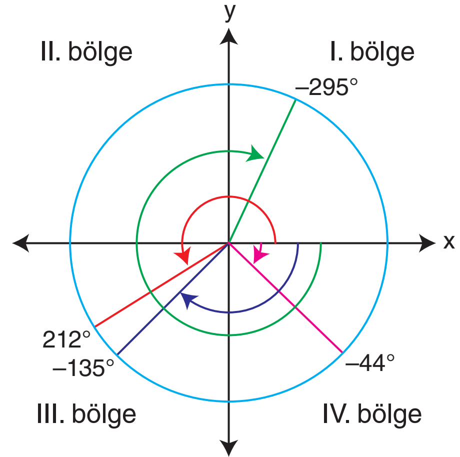
$92° \in (90°, 180°)$ ve tanjant fonksiyonu II. bölgede negatif değerli olduğundan $c < 0$ dır.

$304° \in (270°, 360°)$ ve kotanjant fonksiyonu IV. bölgede negatif değerli olduğundan $d < 0$ dır.

Yani a, b, c ve d nin işaretleri; sırasıyla +, –, –, – olur.

Uygulayalım:

$a = \sin 212°$, $b = \cos(-44°)$, $c = \tan(-135°)$ ve $d = \cot(-295°)$ olmak üzere a, b, c ve d nin işaretlerini bulalım.



Çözelim:

212°, III. bölgede olduğundan sin212° negatif,

–44°, IV. bölgede olduğundan cos(–44°) pozitif,

–135°, III. bölgede olduğundan tan(–135°) pozitif,

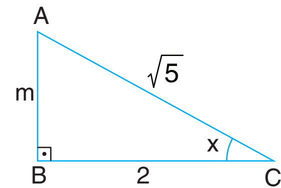
–295°, I. bölgede olduğundan cot(–295°) pozitif olur.

Yani a, b, c ve d nin işaretleri; sırasıyla – , + , + , + olur.

Uygulayalım:

$x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ise sinx, tanx ve cotx i bulalım.

Çözelim:



Yandaki dik üçgende $[AB] \perp [BC]$ ve $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ise $|BC| = 2$ br ve $|AC| = \sqrt{5}$ br seçilebilir. $|AB| = m$ br olsun.

Pisagor teoremi uygulandığında

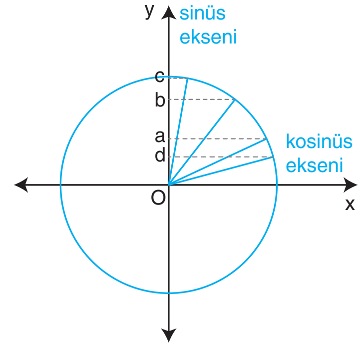
$m^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$ ise $m^2 + 4 = 5 \Rightarrow m = 1$ olur.

Bu durumda x in III. bölgede olduğu göz önüne alınarak

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan x = \frac{1}{2}$ ve $\cot x = 2$ bulunur.

Uygulayalım:

$a = \sin 25°$, $b = \cos 38°$, $c = \cos 10°$ ve $d = \cos 75°$ olduğuna göre a, b, c ve d yi sıralayalım.



Çözelim:

Değerlerin kosinüs olanlarını sinüse çevirerek

$a = \sin 25°$, $b = \cos 38° = \sin 52°$, $c = \cos 10° = \sin 80°$ ve

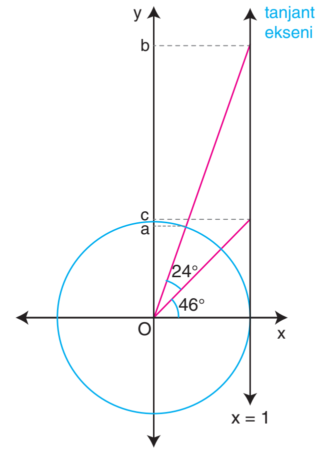
$d = \cos 75° = \sin 15°$ değerlerini yandaki birim çemberde gösterelim. Bu değerler arasındaki sıralama birim çemberden görüleceği gibi

$\sin 15° < \sin 25° < \sin 52° < \sin 80°$ olduğundan

$d < a < b < c$ elde edilir.

Uygulayalım:

$a = \sin 70°$, $b = \tan 70°$ ve $c = \tan 46°$ olduğuna göre a, b ve c yi sıralayalım.



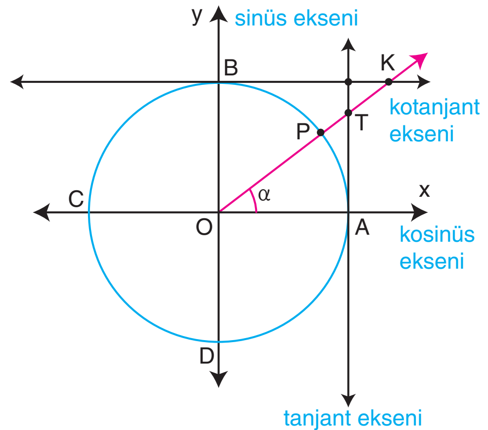
Çözelim:

$\sin 70°$, $\tan 70°$ ve $\tan 46°$ ifadelerini birim çemberde yandaki şekildeki gibi yerleştirelim. Şekilden $\tan 46°$ nin bütün sinüs değerlerinden büyük olduğu görülür. Yani $\tan 46°$, $\sin 70°$ den büyüktür. I. bölgede açı ölçüsü arttığında açının tanjant değeri de arttığından $\tan 70°$ de $\tan 46°$ den büyüktür.

O hâlde $a < c < b$ elde edilir.

Keşfedelim:

Birim çemberde P(x, y) noktası ile eşlenen açının ölçüsü $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun.



1. P noktasının y eksenine göre simetriğini alıp P′ noktasını bulunuz. P′ noktasının α açısına bağlı koordinatlarını sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak yazınız.

2. Buna göre $\widehat{OAP'}$ nın ölçüsü, α cinsinden ne olur?

3. $\widehat{OAP'}$ nın ölçüsünün sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini ifade ediniz.

4. P noktasının orijine göre simetriğini alıp P″ noktasını belirleyiniz. Buna göre $\widehat{OAP''}$ nın ölçüsünü α cinsinden yazınız.

5. Buradan P″ noktasının koordinatlarını sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak bulunuz.

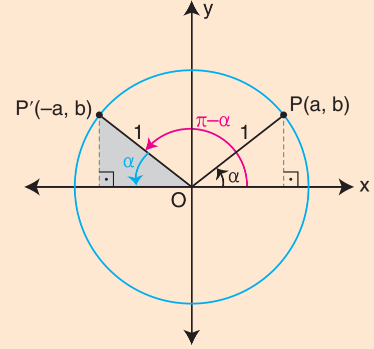
6. $\widehat{OAP''}$ nın ölçüsünün sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini belirleyiniz.

7. Birim çemberde $2\pi - \alpha$ açısını oluşturmak için ne yapmanız gerektiğini belirleyerek bu açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini α dar açısı cinsinden bulunuz.

▶ Açı ölçüsü 90° den büyük olan açıların trigonometrik değerlerinin α dar açısının trigonometrik değerlerinden yararlanarak nasıl hesaplanması gerektiğini açıklayınız.

Öğrenelim:

Şekilde birim çember üzerinde alınan α dar açı olmak üzere P(a, b) noktasının y eksenine göre simetriği, P′(–a, b) noktası olsun. O orijin olmak üzere II. bölgedeki $\pi - \alpha$ açısının trigonometrik değerlerini bulalım.



$\sin(\pi - \alpha) = \frac{b}{1} = b$, $\sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$\cos(\pi - \alpha) = -\frac{a}{1} = -a$, $\cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$\tan(\pi - \alpha) = -\frac{b}{a}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$\cot(\pi - \alpha) = -\frac{a}{b}$, $\cot\alpha = \frac{a}{b}$ olur.

Buradan

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

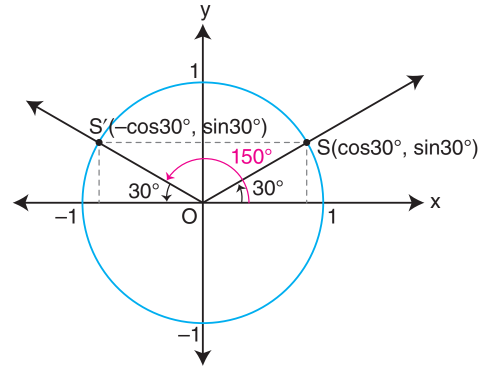
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ eşitlikleri bulunur.

Uygulayalım:

150° lik açının trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözelim:

150° lik açı 180° – 30° biçiminde yazıldığından bu açıyı 30° lik açı cinsinden bulalım.



$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

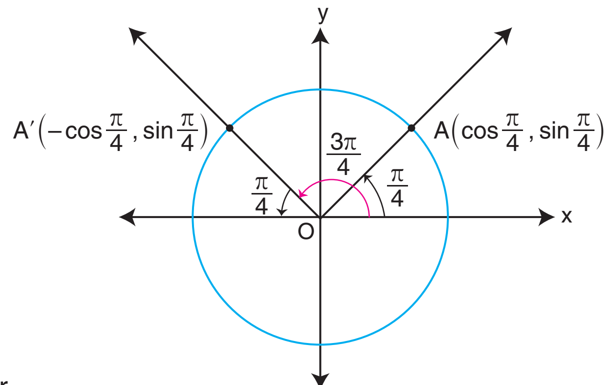
$\cot 150° = \cot(180° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\frac{3\pi}{4}$ ün trigonometrik değerlerini bulalım

Çözelim:

$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ olarak yazılır. Buradan



$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\cot\frac{3\pi}{4} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\cos 45° \,.\, \cot 120°}{\sin 135° \,.\, \tan 135°}$ değerini bulalım.

Çözelim:

Verilen ifadede her bir trigonometrik değeri ayrı ayrı bulalım.

$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cot 120° = \cot(180° - 60°) = -\cot 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

Bulduğumuz değerleri verilen ifade de yerine yazarsak

$$\frac{\cos 45° \,.\, \cot 120°}{\sin 135° \,.\, \tan 135°} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1)}$$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\sin 140° \,.\, \cos 80°}{\sin 40° \,.\, \cos 100°}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

$\sin 140° = \sin(180° - 40°) = \sin 40°$

$\cos 100° = \cos(180° - 80°) = -\cos 80°$ olur.

Buna göre

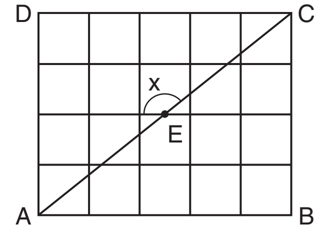
$$\frac{\sin 140° \,.\, \cos 80°}{\sin 40° \,.\, \cos 100°} = \frac{\cancel{\sin 40°} \,.\, \cancel{\cos 80°}}{\cancel{\sin 40°} \,.\, (-\cancel{\cos 80°})}$$

$= -1$ bulunur.

Uygulayalım:

Şekilde ABCD dikdörtgeni eş karelere ayrılmıştır.

Buna göre tanx değerini bulalım.



Çözelim:

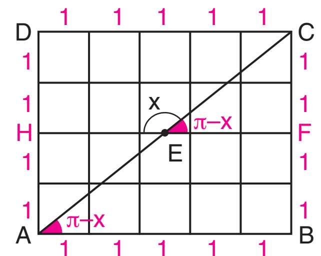
Şekilde $m(\widehat{CEH}) = x$ ise $m(\widehat{CEF}) = \pi - x$ olur.

$\widehat{CEF}$ ile $\widehat{CAB}$ yöndeş açılar olduğundan

$m\widehat{CEF} = m\widehat{CAB} = \pi - x$ elde edilir.

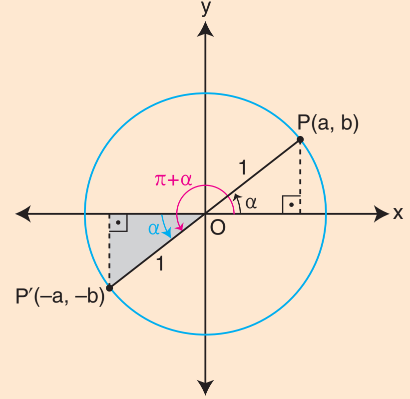
$\widehat{CAB}$ den yararlanarak $\tan(\pi - x) = \dfrac{4}{5}$ bulunur. Buradan

$\tan(\pi - x) = -\tan x = \dfrac{4}{5}$ ten $\tan x = -\dfrac{4}{5}$ elde edilir.



Öğrenelim:

Şekilde birim çember üzerinde α dar açı olmak üzere P(a, b) noktasının O orijine göre simetriği P′(–a, –b) noktası olsun. Buna göre III. bölgedeki $\pi + \alpha$ açısının trigonometrik değerlerini bulalım.



$\sin(\pi + \alpha) = -\frac{b}{1} = -b$, $\sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$\cos(\pi + \alpha) = -\frac{a}{1} = -a$, $\cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$\tan(\pi + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$\cot(\pi + \alpha) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, $\cot\alpha = \frac{a}{b}$ olur.

Buradan

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

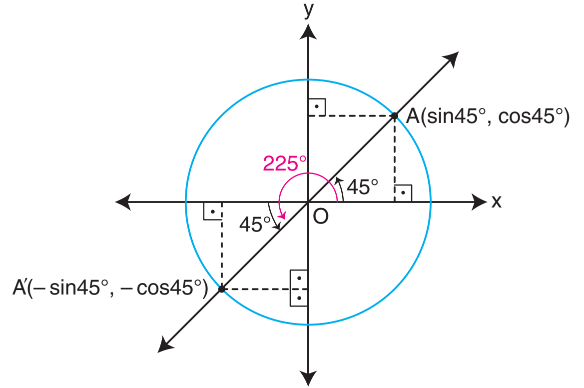
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$ elde edilir.

Uygulayalım:

225° nin trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözelim:

225° = 180° + 45° biçiminde yazılabileceğinden verilen açıyı 45° lik açı cinsinden bulabiliriz.



$\sin225° = \sin(180° + 45°) = -\sin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos225° = \cos(180° + 45°) = -\cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

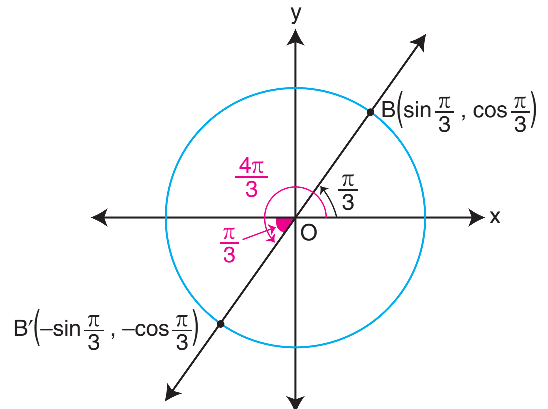
$\tan225° = \tan(180° + 45°) = \tan45° = 1$

$\cot225° = \cot(180° + 45°) = \cot45° = 1$ bulunur.

Uygulayalım:

$\frac{4\pi}{3}$ ün trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözelim:



$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ olarak yazılır. Buradan

$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\cot\frac{4\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\dfrac{\cot 15° + 2\sin 20° + \sin 200°}{\cot 195° - \sin 200°}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

Öncelikle dar açıdan farklı açıları, dar açı cinsinden yazalım.

$\sin 200° = \sin(180° + 20°) = -\sin 20°$

$\cot 195° = \cot(180° + 15°) = \cot 15°$ olur. Buna göre

$$\frac{\cot 15° + 2\sin 20° + \sin 200°}{\cot 195° - \sin 200°} = \frac{\cot 15° + 2\sin 20° - \sin 20°}{\cot 15° - (-\sin 20°)}$$

$$= \frac{\cot 15° + \sin 20°}{\cot 15° + \sin 20°}$$

$= 1$ bulunur.

Uygulayalım:

$\tan\dfrac{5\pi}{4} + \tan\dfrac{4\pi}{3} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{6}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

$\tan\dfrac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\tan\dfrac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\cos\dfrac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olur. Buradan

$$\tan\frac{5\pi}{4} + \tan\frac{4\pi}{3} \cdot \cos\frac{7\pi}{6} = 1 + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$= 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Uygulayalım:

$a + b = \pi$ için $\cos a = \dfrac{2}{3}$ olduğuna göre $\sin(a + 2b)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

$a + 2b = a + b + b = \pi + b$ olur.

Yani bizden istenen $\sin(a + 2b) = \sin(\pi + b) = -\sin b$ değeridir.

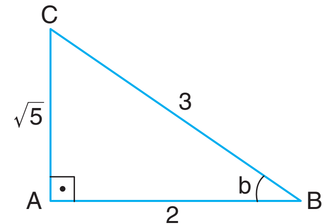
$a = \pi - b$ olarak yazılabileceğinden

$\cos a = \cos(\pi - b) = -\cos b$ olur.

$\cos a = -\cos b = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos b = -\dfrac{2}{3}$

Pisagor bağıntısından

$|AC|^2 = 9^2 - 2^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{5}$ br olur.

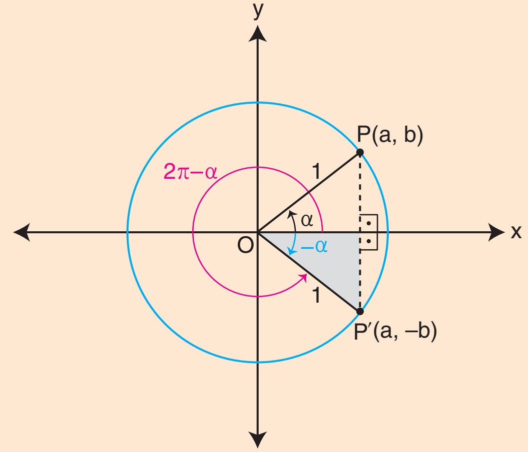


O hâlde $\sin b = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ bulunur.

Bu durumda $\sin(a + 2b) = -\sin b = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ elde edilir.

Öğrenelim:

Şekilde birim çember üzerinde α dar açı olmak üzere P(a, b) noktasının x eksenine göre simetriği, P′(a, –b) noktası olsun. O orijin olmak üzere IV. bölgedeki $2\pi-\alpha$ açısının trigonometrik değerlerini bulalım.



$\sin(2\pi-\alpha) = -\frac{b}{1} = -b$, $\sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$\cos(2\pi-\alpha) = \frac{a}{1} = a$, $\cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$\tan(2\pi-\alpha) = -\frac{b}{a}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$\cot(2\pi-\alpha) = -\frac{a}{b}$, $\cot\alpha = \frac{a}{b}$ olur.

Bu durumda

$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$ elde edilir.

Şekilde de görüldüğü gibi $2\pi-\alpha$ ile $-\alpha$, birim çember üzerinde aynı noktaya karşılık gelir. Yani eş açılardır. Bu yüzden

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

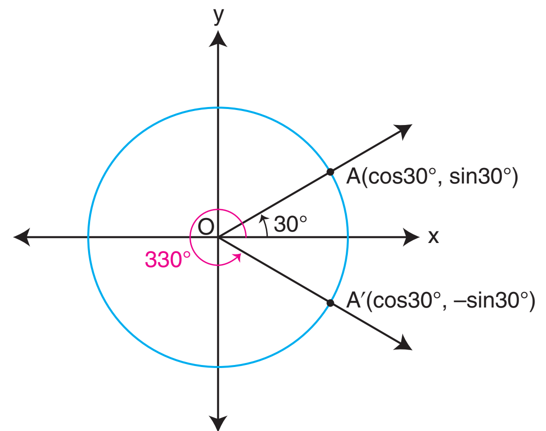
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ bulunur.

Uygulayalım:

330° nin trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözelim:

330° = 360° – 30° biçiminde yazıldığından verilen açıyı 30° lik açı cinsinden bulabiliriz.



$\sin330° = \sin(360° - 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}$

$\cos330° = \cos(360° - 30°) = \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan330° = \tan(360° - 30°) = -\tan30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot330° = \cot(360° - 30°) = -\cot30° = -\sqrt{3}$

olur.

Uygulayalım:

$\frac{7\pi}{4}$ ün trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözelim:

$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ olarak yazılır.

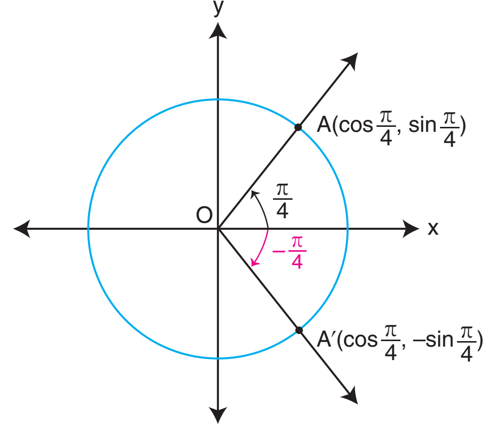
$2\pi - \frac{\pi}{4}$ açısının trigonometrik değerleri ile $-\frac{\pi}{4}$ açısının trigonometrik değerleri eşit olduğundan

$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$\cot\frac{7\pi}{4} = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$ olarak bulunur.



Uygulayalım:

$\tan 10° = a$ olduğuna göre

$\frac{\tan 100° - \tan 350°}{\tan 190° + \tan 260°}$ ifadesinin a cinsinden eşitini bulalım.

Çözelim:

$$\frac{\tan 100° - \tan 350°}{\tan 190° + \tan 260°} = \frac{\tan(180° - 80°) - \tan(360° - 10°)}{\tan(180° + 10°) + \tan(180° + 80°)}$$

$$= \frac{-\tan 80° + \tan 10°}{\tan 10° + \tan 80°}$$

$$= \frac{-\frac{1}{a} + a}{a + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{-1 + a^2}{a}}{\frac{a^2 + 1}{a}} \qquad \left(\tan 80° = \cot 10°, \cot 10° = \frac{1}{\tan 10°} \Rightarrow \tan 80° = \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$ bulunur.

Uygulayalım:

$\frac{\cos(17\pi + \alpha) + \cos(3\pi - \alpha)}{\sin(21\pi + \alpha) + \sin(\alpha - 7\pi)}$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözelim:

$$\frac{\cos(17\pi + \alpha) + \cos(3\pi - \alpha)}{\sin(21\pi + \alpha) + \sin(\alpha - 7\pi)} = \frac{\cos(16\pi + \pi + \alpha) + \cos(2\pi + \pi - \alpha)}{\sin(20\pi + \pi + \alpha) + \sin(\alpha - 7\pi + 8\pi)}$$

$$= \frac{\cos(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}$$

$$= \frac{-\cos\alpha - \cos\alpha}{-\sin\alpha - \sin\alpha} = \frac{-2\cos\alpha}{-2\sin\alpha} = \cot\alpha$$ bulunur.

Öğrenelim:

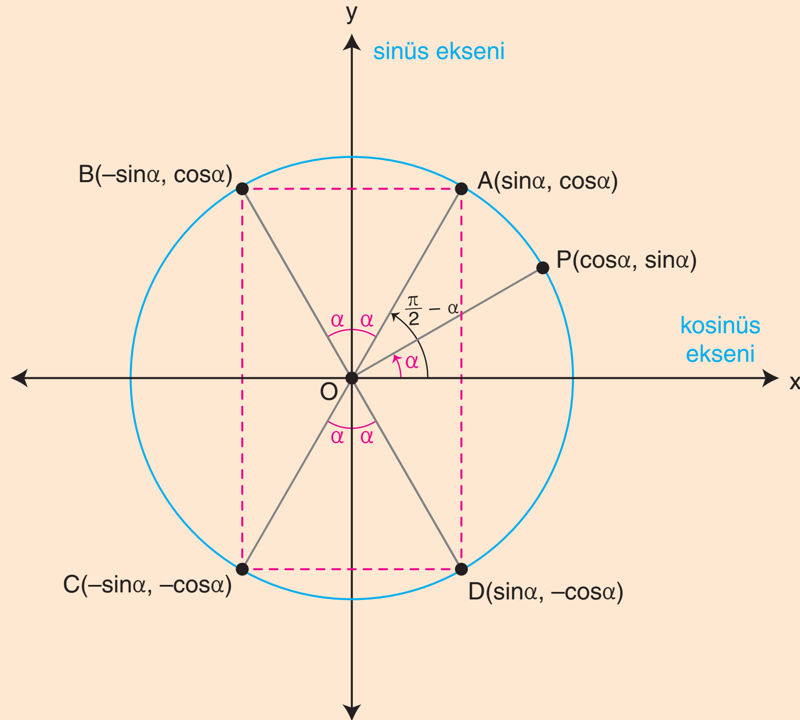
Birim çemberde A noktasının y eksenine, orijine ve x eksenine göre simetrikleri sırasıyla B, C ve D noktalarıdır.

• P ile A noktalarının koordinatları karşılaştırılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

• P ile B noktalarının koordinatları karşılaştırılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$



• P ile C noktasının koordinatları karşılaştırıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

• P ile D noktasının koordinatları karşılaştırıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

Uygulayalım:

α dar açı olmak üzere $\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right)$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözelim:

Öncelikle $\frac{11\pi}{2}$ açısının esas ölçüsünü bulalım.

$\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$ olduğundan $\frac{11\pi}{2}$ nin esas ölçüsü, $\frac{3\pi}{2}$ dir.

Buradan

$$\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= \sin\left[-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right]$$
$$= -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$= -(-\cos\alpha) = \cos\alpha \text{ elde edilir.}$$

Uygulayalım:

$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi - \alpha)}$ ifadesinin en sade hâlini bulalım.

Çözelim:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha - \sin\alpha}{-\tan\alpha . \cos\alpha}$$

$$= \frac{-2\sin\alpha}{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha}$$

$= 2$ bulunur.

Uygulayalım:

Ölçüsü $-\frac{47\pi}{3}$ olan açının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözelim:

$$\sin\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{47\pi}{3}\right) = -\sin\frac{5\pi}{3} = -\sin 300^\circ = -\sin(360^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{47\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{47\pi}{3}\right) = -\tan\frac{5\pi}{3} = -\tan 300^\circ = -\tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{47\pi}{3}\right) = -\cot\frac{5\pi}{3} = -\cot 300^\circ = -\cot(360^\circ - 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

Pekiştirelim:

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz:

a. $\dfrac{2\sin 30^\circ + \tan 45^\circ}{2\cot 45^\circ + 6\cos 60^\circ}$ **b.** $\dfrac{\tan 180^\circ + \cos 30^\circ + \sin 180^\circ}{2.\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}$

2. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\sin x = 0,6$ ise cotx değerini bulunuz.

3. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\tan x = 6$ ise cosx değerini bulunuz.

4. $0 < x < 90^\circ$ olmak üzere $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x - 2\cot x} = \dfrac{3}{4}$ ise tanx değerini bulunuz.

5. Aşağıdaki noktalı yerleri uygun şekilde doldurunuz.

a. $\sin^2 x + \cos^2 x =$ .... **b.** $\sin^2\dfrac{3\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} =$ .... **c.** $\tan x.\cot x =$ ....

ç. $\tan x = \dfrac{\sin x}{.....}$ **d.** $\cot x = \dfrac{.......}{\tan x}$ **e.** secx = ...

f. cscx = ... **g.** $1 + \cot^2 x =$ ..... **h.** $\cot x = \dfrac{\cos x}{...}$

6. Aşağıdaki ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

a. $\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ **b.** $\dfrac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$ **c.** $\dfrac{1}{1 + \tan x} + \dfrac{1}{1 + \cot x}$

ç. $\dfrac{\csc x + 1}{\cot x} + \dfrac{1}{\sec x + \tan x}$ **d.** $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$ **e.** $\sec^2 x - \tan^2 x$

7. $\tan x + \cot x = 2$ ise $\tan^2 x + \cot^2 x$ ifadesinin eşiti kaçtır?

8. Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin işaretlerini bulunuz.

a. tan200° **b.** cot1200° **c.** $\sec\dfrac{5\pi}{6}$

ç. $\csc\dfrac{7\pi}{4}$ **d.** tan(–1500°) **e.** $\cot\left(\dfrac{-11\pi}{3}\right)$

9. $A = \tan\pi + \cot\dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2}$ ve $B = \csc\dfrac{17\pi}{2} + \sec(-10\pi)$ ise A.B kaçtır?

10. Aşağıda ölçüleri verilen açıların trigonometrik değerlerini bulunuz.

a. 150° **b.** 225° **c.** 240° **ç.** 300° **d.** 330°

11. $\dfrac{\sin 240^\circ - \cos 120^\circ}{2.\tan 135^\circ.\cos 120^\circ - \tan 150^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

12. $\dfrac{\sin(3\pi + \alpha) + \sin(\alpha - 5\pi)}{\cos(4\pi + \alpha) - \cos(5\pi + \alpha)} + \dfrac{\sin(\alpha - 90^\circ) + \sin(270^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha) - \cos(-\alpha)}$ toplamını sadeleştiriniz.

13. x = sin160°, y = cot320°, z = cos170°, t = tan240°, n = cos560° ve m = cot(–260°) değerlerini sıralayınız.

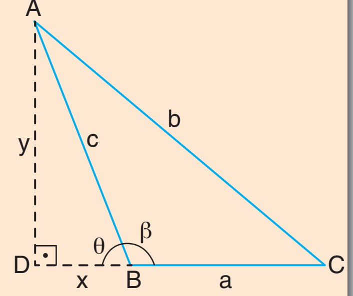
14. $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ ve $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ ise tanx değerini bulunuz.

1.2.2. Kosinüs Teoremi

Öğrenelim:

Bir üçgende bir kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamından bu kenarlar ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımının iki katı kadar eksiktir. Bu ifadeye **kosinüs teoremi** adı verilir. Şimdi, kosinüs teoreminin doğruluğunu gösterelim.

Yandaki geniş açılı ABC üçgenin açı ölçüleri ve kenar uzunlukları üzerine yazılmıştır. BC kenarına ait yükseklik çizilip, dikme ayağı D olarak adlandırılmıştır.



ADB dik üçgeninde $\cos\theta = \frac{x}{c}$ olur.

$\cos\beta = -\cos\theta = -\frac{x}{c}$ dir.

$x = -c \, . \cos\beta \Rightarrow x = -c \, . \cos\widehat{B}$ (1) olur.

ADB ve ADC dik üçgenlerinde Pisagor teoremi yazıldığında

$c^2 = x^2 + y^2$ ve $b^2 = y^2 + (x + a)^2$

$b^2 = \underbrace{y^2 + x^2}_{c^2} + 2.x.a + a^2$

$b^2 = a^2 + c^2 + 2.x.a$ eşitliğinde x yerine (1) de bulunun ifade yazıldığında

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\widehat{B}$ bulunur.

Bu eşitlik her kenar için yazıldığında

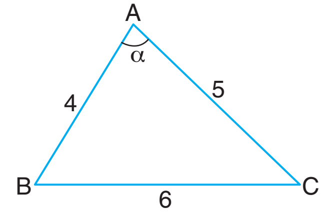
$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$, $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$ sonuçları elde edilir.

Uygulayalım:

Kenar uzunlukları 4, 5 ve 6 br olan üçgenin en uzun kenarını gören açısının kosinüs değerini bulalım.

Çözelim:

Verilere uygun üçgen, sağdaki ABC üçgenidir. Kosinüs teoremi uygulanırsa

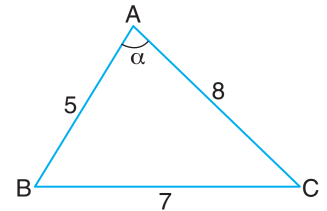


$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos\alpha$ ise $36 = 16 + 25 - 40 \, . \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-5}{-40} = \frac{1}{8}$ bulunur.

Uygulayalım:

ABC üçgeninde kenar uzunlukları, br cinsinden yandaki şekilde verilmiştir. Verilenlere göre $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos\alpha$

$49 = 25 + 64 - 80 \, . \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ olur.

Bu durumda $\alpha = 60°$ olmalıdır.

Uygulayalım:

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları; |BC| = a br , |AC| = b br ve |AB| = c br dir.
(b – c).(b + c) = a.(a – c) olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

(b – c).(b + c) = a.(a – c) eşitliğinde parantezler açılırsa

$b^2 - c^2 = a^2 - ac \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$ (1) olur.

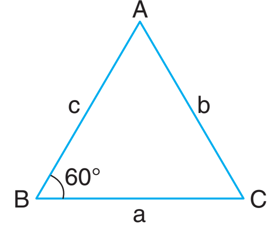
ABC üçgeninde kosinüs teoreminden

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ (2) olur. (1) ve (2) eşitlenirse

$a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B} = a^2 + c^2 - a.c \Rightarrow -2.a.c.\cos\hat{B} = -a.c$

$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{1}{2}$ bulunur.

O hâlde $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olarak bulunur.



Uygulayalım:

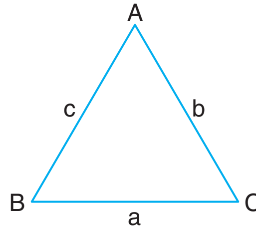
Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları; |AB| = c br , |BC| = a br ve |AC| = b br dir. Kenar uzunlukları arasında 42.a = 35.b = 30.c bağıntısı olduğuna göre $\cos\hat{A}$ nın değeri kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

42.a = 35.b = 30.c = 210.k diyelim.

6.7.5.k = 5.7.6.k = 5.6.7.k

42	35	30	2
21	35	15	3
7	35	5	5
7	7	1	7
1	1	1	



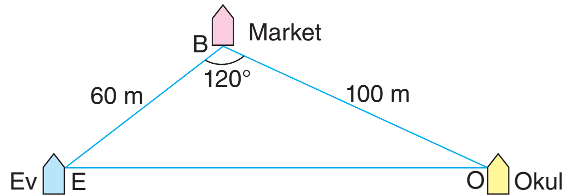
a = 5k , b = 6k ve c = 7k ise $25k^2 = 36k^2 + 49k^2 - 2.6k.7k.\cos\hat{A}$

$25k^2 = 85k^2 - 84k^2.\cos\hat{A} \Rightarrow 84k^2.\cos\hat{A} = 60k^2$ olur.

$\cos\hat{A} = \frac{60k^2}{84k^2} = \frac{5}{7}$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

Hazal, annesinin istediklerini almak için okul çıkışı markete uğrayacaktır. Okuldan çok yorgun çıkmasına rağmen sorumluluğunu yerine getirmek ve sözünde durmak adına markete uğrar ve alış veriş yapar. Yanda ev - okul - market arası uzaklıklar ve açı ölçüsü verilmiştir. Hazal, okul - market - ev güzergahını kullanırsa okul - ev yoluna göre kaç metre daha fazla yürüyecektir? Bulalım.



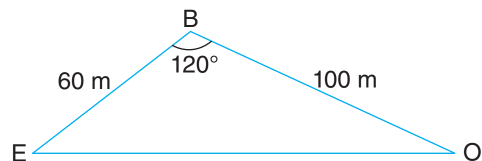
Çözelim:

EOB üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım.

$|EO|^2 = 60^2 + 100^2 - 2.60.100.\cos 120°$

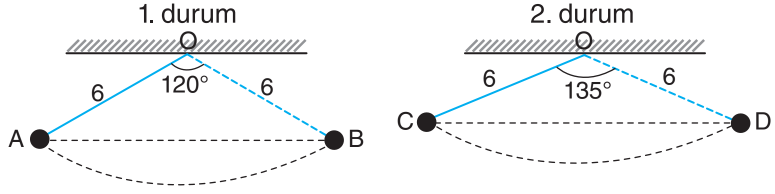
$|EO|^2 = 19600 \Rightarrow |EO| = 140$ m bulunur.

|EB| + |BO| = 60 +100 = 160 m olduğundan Hazal, 160 – 140 = 20 m daha fazla yürüyecektir.



Uygulayalım:

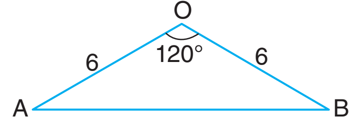
Uzunluğu 6 cm olan bir sarkaç, şekilde görüldüğü gibi 1. durumda 120° ölçülü ve 2. durumda 135° ölçülü bir salınım hareketi yapmıştır.



Verilenlere göre $\frac{|CD|}{|AB|}$ oranını bulalım.

Çözelim

AOB üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak

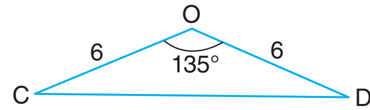


$|AB|^2 = 6^2 + 6^2 - 2.6.6.\cos 120°$

$|AB|^2 = 36 + 36 - 72 . \left(-\frac{1}{2}\right)$

$|AB|^2 = 108 \Rightarrow |AB| = 6\sqrt{3}$ cm olur.

COD üçgeninde kosinüs teoremini uygularsak



$|CD|^2 = 6^2 + 6^2 - 2.6.6.\cos 135°$

$|CD|^2 = 36 + 36 - 72 . \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

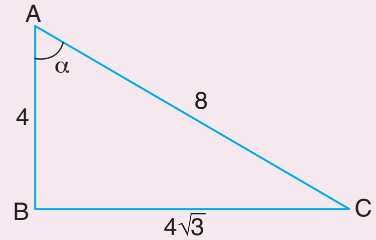
$|CD|^2 = 72 + 36\sqrt{2} = 36 . (2 + \sqrt{2}) \Rightarrow |CD| = 6 . \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ olur.

O hâlde $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{6 . \sqrt{2+\sqrt{2}}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{3}$ bulunur.

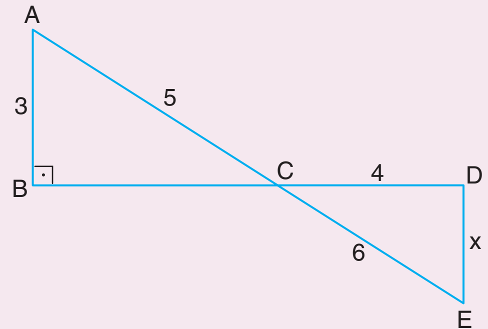
Pekiştirelim:

1. ABC üçgeninde $|AB| = 2$ br, $|AC| = 4\sqrt{3}$ br ve $m(\widehat{BAC}) = 150°$ ise $|BC|$ kaç br dir?

2. ABC üçgeninde $|AB| = 4$ br , $|BC| = 4\sqrt{3}$ br ve $|AC| = 8$ br olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ kaç derecedir?



3. Yandaki şekilde $[AB] \perp [BD]$; B, C, D doğrusal, $|AB| = 3$ br, $|AC| = 5$ br , $|CD| = 4$ br ve $|CE| = 6$ br ise $|DE| = x$ kaç br dir?



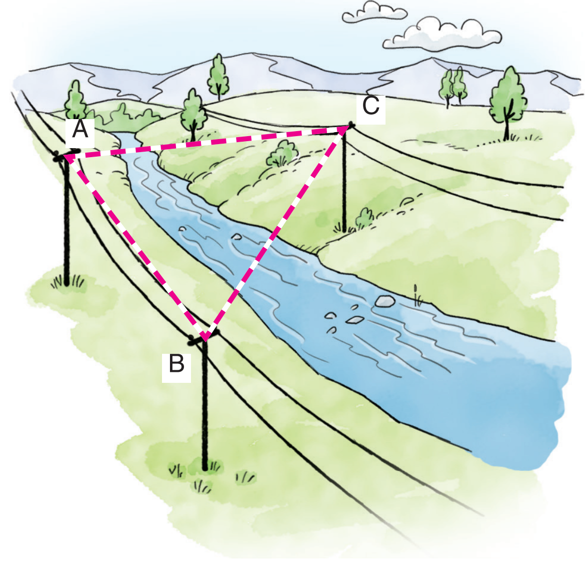
4. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b ve c br dir.
Bu uzunluklar arasında
$a^2 - b^2 - c^2 - b.c = 0$ bağıntısı olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

1.2.3. Sinüs Teoremi

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri ve herhangi bir kenarının uzunluğu biliniyorsa buna göre diğer kenar uzunlukları bulunabilir mi? Açı ölçülerinin sinüs değerleri bilgisi verilmişse bu sorunun yanıtı ne olabilir?

Keşfedelim:

Telefon kablosu taşıyan yere dik durumlu 3 direk, bir nehir boyunca şekildeki gibi dikilmiştir. Nehrin bir tarafında A ve B, diğer tarafında C direği vardır. A ile B direkleri arasındaki uzaklık 360 metredir. Yandaki şekilde verilen taslak çizimi inceleyerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

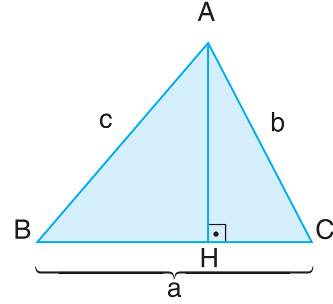


1. $m(\widehat{ABC}) = 60°$ verildiğine göre B ile C direkleri arasındaki uzaklık bulunabilir mi? Tartışınız.

2. $m(\widehat{ABC}) = 60°$ bilgisine ek olarak $m(\widehat{ACB}) = 45°$ bilgisi de verilirse B ile C direkleri arasındaki uzaklık bulunabilir mi? Tartışınız.

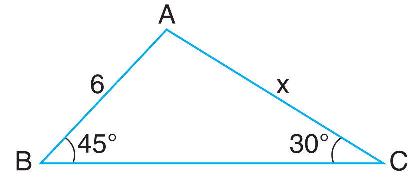
3. Bir üçgenin iç açı ölçüleri ve bir kenarın uzunluğu biliniyorsa diğer kenarın uzunlukları bulunabilir mi? Tartışınız.

▶ Yandaki gibi bir ABC üçgeni ve bu üçgenin BC kenarına ait yüksekliğini çiziniz. ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları ve açı ölçülerinin sinüs değerleri arasında bir ilişki var mıdır? Tartışınız.



Uygulayalım:

Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 45°$, $m(\widehat{ACB}) = 30°$, $|AB| = 6$ br ve $|AC| = x$ br dir. x değerini bulalım.



Çözelim:

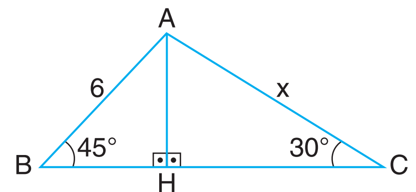
Yandaki ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ olacak biçimde [AH] nı çizelim.

$\sin 45° = \dfrac{|AH|}{6} \Rightarrow |AH| = 6 . \sin 45°$ ve

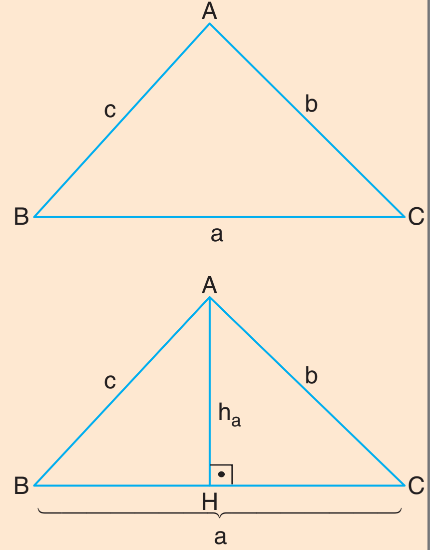
$\sin 30° = \dfrac{|AH|}{x} \Rightarrow |AH| = x . \sin 30°$ dir.

O hâlde $6 . \sin 45° = x . \sin 30° \Rightarrow 6 . \dfrac{\sqrt{2}}{2} = x . \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 6\sqrt{2}$ bulunur.



Öğrenelim:



Bir üçgende kenar uzunluğu ile o kenara bakan açının sinüs değeri orantılıdır. Bu ifadeye **sinüs teoremi** adı verilir. Sinüs teoreminin matematiksel ifadesi,

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \text{ şeklindedir.}$$

Bu ifadenin doğruluğunu üçgenin alan bağıntısını kullanarak gösterelim.

ABC üçgeninde [AH] ⊥ [BC] olsun.

$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$ dir.

$\sin\hat{B} = \dfrac{h_a}{c}$ ve $\sin\hat{C} = \dfrac{h_a}{b}$ eşitliklerinden

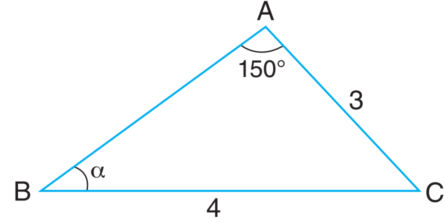
$h_a = c \cdot \sin\hat{B}$ ve $h_a = b \cdot \sin\hat{C}$ elde edilir.

$c \cdot \sin\hat{B} = b \cdot \sin\hat{C} \Rightarrow \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}}$ bulunur.

Bu adımlar diğer kenar ve yükseklikler için de yapıldığında sinüs teoreminin doğruluğu gösterilir.

Uygulayalım:

Şekilde ABC üçgen, $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, $m(\widehat{BAC}) = 150°$, $|AC| = 3$ br ve $|BC| = 4$ br olduğuna göre $\sin\alpha$ nın değeri kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

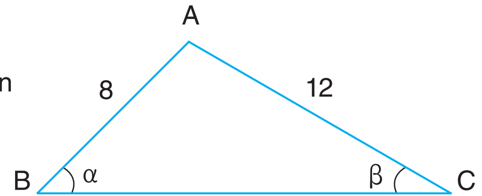
ABC üçgeninde sinüs teoremini uygulayalım.

$$\frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\hat{A}} \Rightarrow \frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 150°} \Rightarrow 3 \cdot \sin 150° = 4 \cdot \sin\alpha$$

$\Rightarrow 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 4 \cdot \sin\alpha$ ise $\sin\alpha = \dfrac{3}{8}$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \beta$, $|AB| = 8$ br ve $|AC| = 12$ br olduğuna göre $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ oranının değerini bulalım.

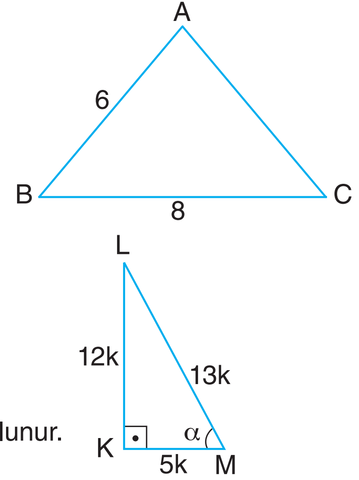


Çözelim:

Sinüs teoreminden $\dfrac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \dfrac{|AB|}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \dfrac{12}{\sin\alpha} = \dfrac{8}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

Uygulayalım:



Şekilde ABC üçgen, |AB| = 6 br, |BC| = 8 br ve $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{5}{13}$ olduğuna göre $\sin(\widehat{ACB})$ nin değeri kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Yanda $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ değerine uygun KLM dik üçgeni çizilmiştir. Bu üçgende Pisagor teoremi uygulanırsa

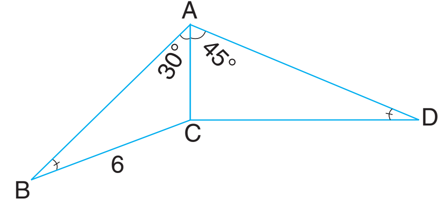
$(13k)^2 = (5k)^2 + |KL|^2 \Rightarrow 169k^2 = 25k^2 + |KL|^2$

$|KL|^2 = 144k^2 \Rightarrow |KL| = 12k \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12\cancel{k}}{13\cancel{k}} = \frac{12}{13}$ olur.

Soruda verilen ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$\frac{6}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{8}{\sin(\widehat{BAC})} \Rightarrow \frac{6}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{8}{\frac{12}{13}} \Rightarrow \sin(\widehat{ACB}) = \frac{9}{13}$ bulunur.

Uygulayalım:



Yandaki şekilde ABC ve ACD birer üçgendir.

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$, $m(\widehat{BAC}) = 30°$, $m(\widehat{CAD}) = 45°$ ve

|BC| = 6 br olduğuna göre |CD| nun kaç br olduğunu bulalım.

Çözelim:

|CD| = x br, |AC| = a br ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha$ olsun. ABC üçgeninde sinüs teoreminden

$\frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\hat{A}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 30°} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 12$ **(1)** bulunur.

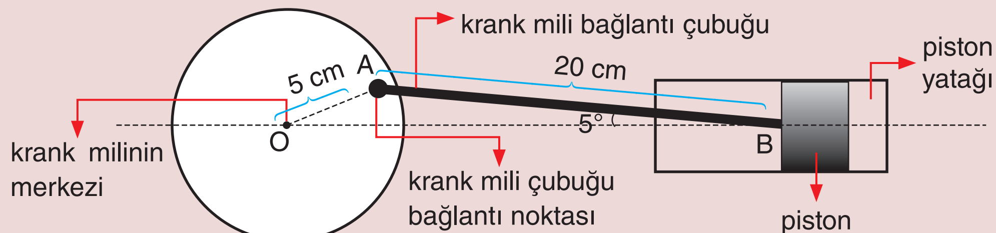
ACD üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$\frac{|AC|}{\sin\hat{D}} = \frac{|CD|}{\sin\hat{A}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin 45°} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \sqrt{2}\,.\,x$ **(2)** olur.

(1) ve **(2)** ifadeleri eşitlendiğinde $\frac{a}{\sin\alpha} = 12 = \sqrt{2}\,.\,x \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$ br bulunur.

Düşünelim:

Krank mili, pistonun doğrusal hareketini dairesel dönme hareketine çeviren bir motor elemanıdır. Krank mili, pistonlardan aldığı öteleme hareketini dairesel harekete çevirerek tekerleklere iletir.

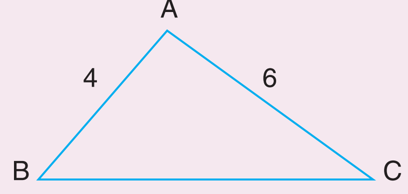


Yukarıdaki şekilde bir krank milinin yandan kesiti görülmektedir. Krank milinin merkezi ve piston yatağının ekseni aynı doğrultudadır. Krank milinin bağlantı çubuğu 20 cm ve bu çubuğun bağlantı noktasının krank milinin merkezine olan uzaklığı 5 cm dir. $m(\widehat{ABO}) = 5°$ olduğunda |OB| ve $m(\widehat{OAB})$ değerlerini bulunuz.

Pekiştirelim:

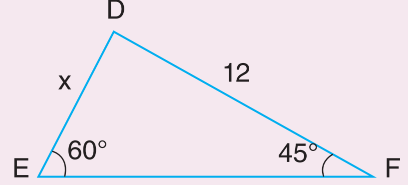
1. Yandaki ABC üçgeninde |AB| = 4 br ve |AC| = 6 br olarak veriliyor.

Verilenlere göre $\frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$ oranı kaçtır?



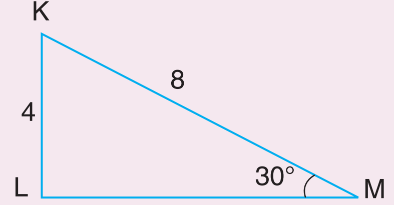
2. Yandaki DEF üçgeninde $m(\widehat{DEF}) = 60°$, $m(\widehat{DFE}) = 45°$, |DF| = 12 br ve |DE| = x br dir.

Verilenlere göre x kaçtır?

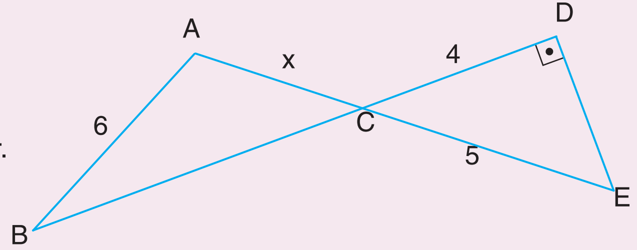


3. Yandaki KLM üçgeninde $m(\widehat{KML}) = 30°$, |KM| = 8 br ve |KL| = 4 br dir.

Verilenlere göre $m(\widehat{KLM})$ kaç derecedir?



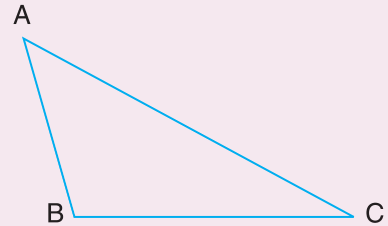
4. B, C, D doğrusal,
A, C, E doğrusal,
[BD] ⊥ [DE],
$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{2}{3}$,
|AB| = 6 cm, |CE| = 5 cm, |CD| = 4 cm dir.
Verilenlere göre |AC| = x kaç cm dir?



5. Bir ABC üçgeninin çevre uzunluğu 24 cm ve $\frac{|BC|}{\sin \hat{A}} = 10$ olduğuna göre $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$ toplamı kaçtır?

6. Şekildeki ABC üçgeninde $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{5}$ tir.

Verilenlere göre $\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$ oranı kaçtır?



7. Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 30°$ ve |BC| = 6 cm olarak veriliyor.

Verilenlere göre $\frac{\sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{|AB| + |AC|}$ oranı kaçtır?

1.2.4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Hatırlayalım:

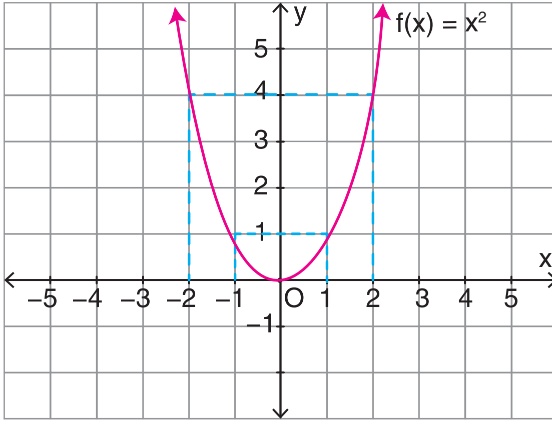
f: A → B, f: {(x, y) | x ∈ A, y ∈ B, y = f(x)} fonksiyonuna ait olan sıralı ikililere analitik düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu kümeye **f fonksiyonunun grafiği** adı verilir. Grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyonlara **çift fonksiyon**, orijine göre simetrik olan fonksiyonlara **tek fonksiyon** denir. Cebirsel olarak a, b ∈ ℝ için f: [–a, a] → [–b, b], x → f(x) fonksiyonu için

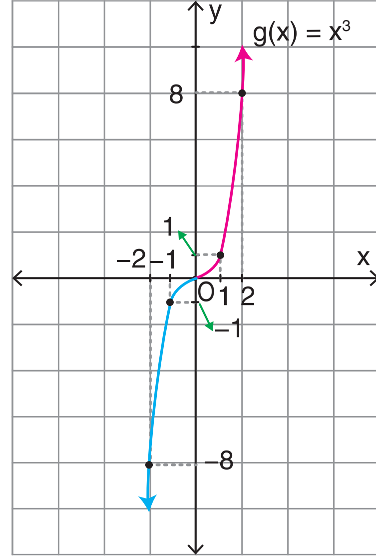
f(–x) = –f(x) ise f(x) tek fonksiyon,

f(–x) = f(x) ise f(x) çift fonksiyon olarak adlandırılır.

Aşağıda $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x^3$ fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.

$f(-x) = x^2 = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyon, $g(-x) = -x^3 = -g(x)$ olduğundan g tek fonksiyondur.





Öğrenelim:

Hayat boyunca belirli aralıklarla tekrarlanan durumlara rastlanır. Örneğin bir çocuğun salıncakta sallanışı, sürekli öne arkaya giden salınım hareketidir. Dünya, Güneş etrafındaki hareketini 365 gün 6 saatte tamamlar. Olimpiyatlar, 4 yılda bir yapılır. Bunun gibi durumları çoğaltmak mümkündür.

Eşit zaman aralıklarında, aynı biçimde yinelenen hareketlere **periyodik hareket**, bu zaman aralığına ise **periyot** adı verilir.

Matematikte A ⊆ ℝ ve f : A → ℝ fonksiyonu için ∀ x ∈ A iken f(x + T) = f(x) olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir T gerçek sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T gerçek sayısına f fonksiyonunun **periyodu**, en küçük pozitif T gerçek sayısına da f fonksiyonunun **esas periyodu** adı verilir.

Trigonometrik fonksiyonlardan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyodik fonksiyon olup olmadıklarını belirleyelim. Bunun için aşağıdaki tabloda yerleştirilen değerleri inceleyelim.

x	0 (0°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	π (180°)	$\frac{5\pi}{4}$ (225°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	$\frac{7\pi}{4}$ (315°)	2π (360°)
sinx	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

x	2π (360°)	$\frac{9\pi}{4}$ (405°)	$\frac{5\pi}{2}$ (450°)	$\frac{11\pi}{4}$ (495°)	3π (540°)	$\frac{13\pi}{4}$ (585°)	$\frac{7\pi}{2}$ (630°)	$\frac{15\pi}{4}$ (675°)	4π (720°)
sinx	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Tablolardan da görüldüğü gibi $[0, 2\pi]$ ile $[2\pi, 4\pi]$ aralıklarında sinüs ve kosinüs fonksiyonları tekrarlanan değerleri almaktadır. Zaten $k \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin(x + k.2\pi) = \sin x \quad \text{ve} \quad \cos(x + k.2\pi) = \cos x$$

olduğundan sinüs ve kosinüs fonksiyonları periyodik fonksiyondur. Periyodik fonksiyon tanımında $f(x + T) = f(x)$ eşitliğinde T gerçek sayısına periyot, en küçük pozitif T gerçek sayısına da esas periyot deniyordu. Bu durumda sinüs ve kosinüs fonksiyonlarında $T = k.2\pi$ olup en küçük pozitif T sayısı, $k = 1$ için 2π olur. Buna göre sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının esas periyodu, 2π dir.

$n \in \mathbb{Z}$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = a + b.\sin^n(cx + d)$ ve

$g(x) = a + b.\cos^n(cx + d)$ fonksiyonlarının esas periyotları P olsun.

Esas periyot, n ve c sayısının değişimine bağlı olup yanda verildiği gibi parçalı biçimde tanımlanır.

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{|c|} & \text{, n çift ise} \\ \dfrac{2\pi}{|c|} & \text{, n tek ise} \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Uygulayalım:

$f(x) = 2.\sin(3x - 4)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözelim:

$f(x) = 2.\sin^1(3x - 4)$ fonksiyonunda $n = 1$ tek sayı ve $c = 3$ olduğundan esas periyot P ise

$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 3.\sin^4(2x - 1) + 5$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözelim:

Fonksiyonda sinüsün derecesi 4 yani çift sayı ve x in katsayısı $c = 2$ dir.

O hâlde f(x) fonksiyonunun periyodu olan P,

$P = \frac{\pi}{|c|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ olur.

Uygulayalım:

$g(x) = -3.\cos^5(4 - 7x) + 1$ fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözelim:

Fonksiyonda kosinüsün derecesi 5 yani tek sayı ve x in katsayısı $c = -7$ dir.

O hâlde g(x) fonksiyonunun periyodu olan P,

$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|-7|} = \frac{2\pi}{7}$ olur.

Dikkat Edelim!

f(x) ve g(x) periyodik fonksiyonlar olmak üzere $f(x) \pm g(x)$ fonksiyonu da periyodik ise $f(x) \pm g(x)$ fonksiyonunun esas periyodu, f(x) ve g(x) fonksiyonlarının esas periyotlarının en küçük ortak katına eşittir.

Uygulayalım:

$f(x) = 3.\sin^3\left(\frac{4x}{3} + 2\right)$ ve $g(x) = 2 + 4.\cos^4\left(\frac{2x}{5} + 7\right)$ fonksiyonları veriliyor.

$h(x) = f(x) + g(x)$ ise h(x) fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözelim:

f(x) fonksiyonunun periyodu T_1 ve g(x) fonksiyonunun periyodu T_2 ise

$h(x) = f(x) + g(x)$ fonksiyonunun periyodu, $T = \text{OKEK}(T_1, T_2)$ dir.

Buna göre

$f(x) = 3.\sin^3\left(\frac{4x}{3} + 2\right) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{4}{3}\right|} = \frac{3\pi}{2}$ ve

$g(x) = 2 + 4.\cos^4\left(\frac{2x}{5} + 7\right) \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{5}\right|} = \frac{5\pi}{2}$ olur.

$\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayılar olmak üzere

$\text{OKEK}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{OKEK}(a, c)}{\text{EBOB}(b, d)}$ dir.

$T = \text{OKEK}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\text{OKEK}(3\pi,\ 5\pi)}{\text{EBOB}(2,\ 2)} = \frac{15\pi}{2}$ olur.

Öğrenelim:

Trigonometrik fonksiyonlardan tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodik fonksiyon olup olmadıklarını belirleyelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki tablodaki değerleri inceleyelim.

x	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	2π (180°)
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotx	tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	tanımsız

x	π (180°)	$\frac{7\pi}{6}$ (210°)	$\frac{5\pi}{4}$ (225°)	$\frac{4\pi}{3}$ (240°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	$\frac{5\pi}{3}$ (300°)	$\frac{7\pi}{4}$ (315°)	$\frac{11\pi}{6}$ (330°)	2π (360°)
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	tanımsız	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotx	tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	tanımsız

Tablolardan da görüldüğü gibi tanjant ve kotanjant $(0, \pi)$ ile $(\pi, 2\pi)$ aralıklarında tekrarlanan değerleri almaktadır. Zaten $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ için $\tan(x + k.\pi) = \tan x$ ve

$x \neq k.\pi$ için $\cot(x + k.\pi) = \cot x$ olur.

O hâlde tanjant ve kotanjant fonksiyonları, periyodik fonksiyonlardır. Bu durumda tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyotları $T = k.\pi$ olur. En küçük pozitif T sayısı k = 1 için π olduğundan tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının esas periyodu, π olur.

$n \in \mathbb{Z}$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = a + b.\tan^n(cx + d)$ ve

$g(x) = a + b.\cot^n(cx + d)$ fonksiyonlarının esas periyotları P olsun.

Esas periyot P, c sayısına bağlı olup $\mathbf{P = \frac{\pi}{|c|}}$ biçiminde tanımlanır.

Uygulayalım:

$f(x) = 5 + 2.\tan(-3x - 1)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözelim:

Esas periyot P olmak üzere

$f(x) = 5 + 2.\tan(-3x - 1)$ fonksiyonunda $c = -3$ olduğundan

$P = \frac{\pi}{|c|} = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı olduğu aralıklarda esas periyotlarını bulalım.

a. $f(x) = 2 + 3.\tan(2x + 5)$ **b.** $f(x) = \sqrt{3}.\cot(9x - 6)$

c. $f(x) = 7.\tan^6\left(\frac{2x}{3} + 2\right)$ **ç.** $f(x) = -3\cot^3\left(\frac{5x}{2} + 7\right)$

Çözelim:

a. $f(x) = 2 + 3.\tan(2x + 5) \Rightarrow P = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

b. $f(x) = \sqrt{3}.\cot(9x - 6) \Rightarrow P = \frac{\pi}{|9|} = \frac{\pi}{9}$

c. $f(x) = 7.\tan^6\left(\frac{2x}{3} + 2\right) \Rightarrow P = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3\pi}{2}$

ç. $f(x) = -3\cot^3\left(\frac{5x}{2} + 7\right) \Rightarrow P = \frac{\pi}{\left|\frac{5}{2}\right|} = \frac{2\pi}{5}$ bulunur.

Öğrenelim:

sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ fonksiyonunun grafiği, $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan sayı ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktaların kümesidir. Sinüs fonksiyonunda esas periyodun 2π olduğunu öğrenmiştik. Fonksiyonun grafiğini çizmek için $[0, 2\pi]$ aralığını seçelim.

Elde edilen grafik $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, ... aralıklarına taşınarak

sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

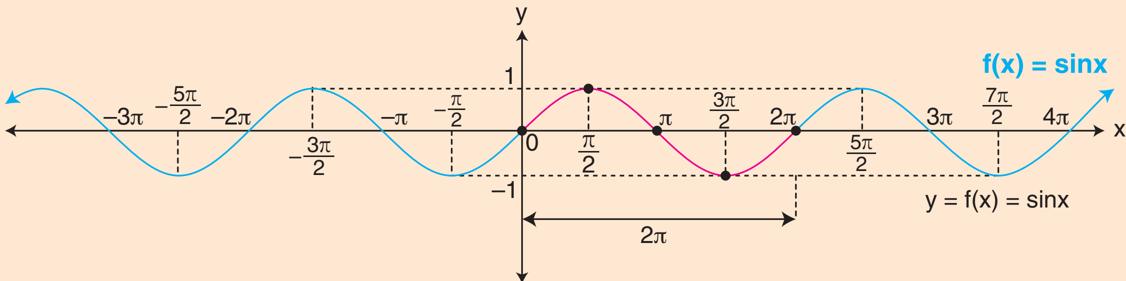
$x \in [0, 2\pi]$ aralığında bazı özel değerler alıp x e karşılık gelen sinx değerlerini yazalım.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0 ↗	1 ↘	0 ↘	–1 ↗	0

x	sinx
0 dan $\frac{\pi}{2}$ ye artarken	0 dan 1 e artar.
$\frac{\pi}{2}$ den π ye artarken	1 den 0 a azalır.
π den $\frac{3\pi}{2}$ ye artarken	0 dan –1 e azalır.
$\frac{3\pi}{2}$ den 2π ye artarken	–1 den 0 a artar.

Fonksiyon $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ aralıklarında artan, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığında azalandır.

Tablolarda bulunan değerlere göre f(x) = sinx fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Grafik incelendiğinde sin(–x) = –sinx olduğu görülür ve grafik orijine göre simetriktir.

O hâlde f(x) = sinx fonksiyonu, tek fonksiyondur.

Uygulayalım:

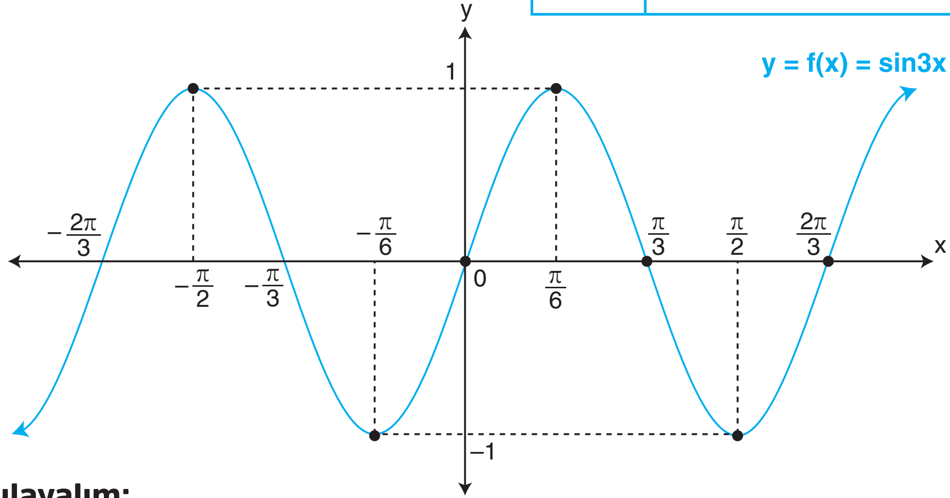
f: ℝ → ℝ, y = f(x) = sin3x fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

f(x) = sin3x fonksiyonunun esas periyodu $\frac{2\pi}{3}$ olduğundan $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ aralığında x in bazı değerlerine karşılık sin3x in aldığı değerleri tabloda gösterelim.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
sin3x	0 ↗	1 ↘	0 ↘	–1 ↗	0

Tablodaki bu değerleri analitik düzlemde gösterip fonksiyonun grafiğini çizelim.



Uygulayalım:

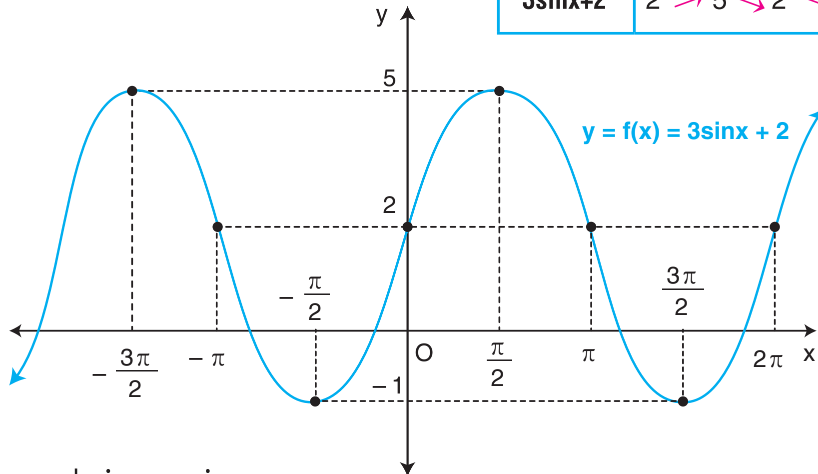
f: ℝ → ℝ, y = f(x) = 3sinx + 2 fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

f(x) = 3sinx + 2 fonksiyonunun esas periyodu 2π olduğundan [0, 2π] aralığından x in bazı değerlerine karşılık y = 3sinx + 2 nin aldığı değerleri tabloda gösterelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	1	0	–1	0
3sinx	0	3	0	–3	0
3sinx+2	2 ↗	5 ↘	2 ↘	–1 ↗	2

Tablodaki bu değerleri analitik düzlemde işaretleyip fonksiyonun grafiğini çizelim.



Öğrenelim:

cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ fonksiyonunun grafiği, $\{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan gerçek sayı ikililerine analitik düzlemde karşılıklı gelen noktaların kümesidir.

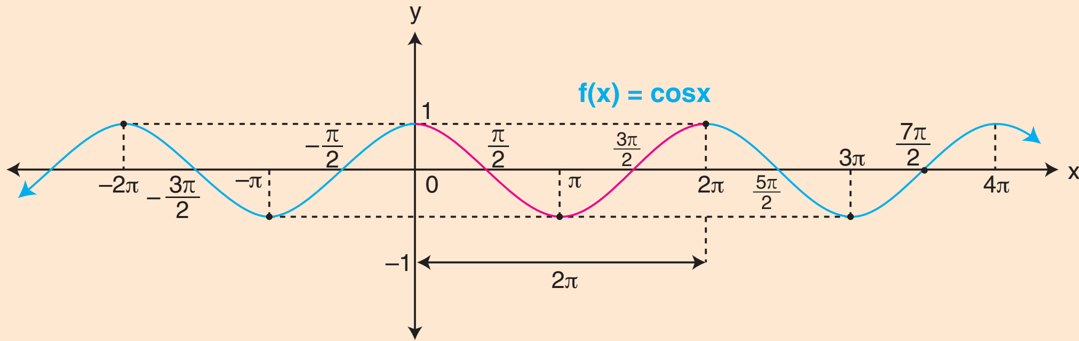
$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun esas periyodunun 2π olduğunu öğrenmiştik. Grafiği çizmek için $[0, 2\pi]$ aralığını seçelim. $x \in [0, 2\pi]$ aralığında bazı özel değerler alalım. (x, cosx) ikililerini değişim tablosunda yazarak fonksiyonun grafiğini çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1 ↘	0 ↘	–1 ↗	0 ↗	1

x	cosx
0 dan $\frac{\pi}{2}$ ye artarken	1 den 0 a azalır.
$\frac{\pi}{2}$ den π ye artarken	0 dan –1 e azalır.
π den $\frac{3\pi}{2}$ ye artarken	–1 den 0 a artar.
$\frac{3\pi}{2}$ den 2π ye artarken	0 dan 1 e artar.

Fonksiyon, $[0, \pi]$ aralığında azalan, $[\pi, 2\pi]$ aralığında artandır.

Tablolarda bulunan değerlere göre f(x) = cosx fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Grafik incelendiğinde cos(–x) = cosx olduğu görülmektedir ve grafik y eksenine göre simetriktir. O hâlde f(x) = cosx fonksiyonu, çift fonksiyondur.

Uygulayalım:

Tanımlı olduğu aralıklarda $y = f(x) = 2.\cos 3x - 1$ fonksiyonu üzerinde apsisi $\frac{\pi}{9}$ olan noktanın ordinatı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Kuralı verilen fonksiyon üzerinde apsisi $\frac{\pi}{9}$ olan nokta $A\left(\frac{\pi}{9}, k\right)$ olan nokta olsun.

$x = \frac{\pi}{9}$ değeri için $y = k$ bulunur.

$x = \frac{\pi}{9} \Rightarrow k = 2.\cos\left(3.\frac{\pi}{9}\right) - 1 \Rightarrow k = 2.\cos\frac{\pi}{3} - 1$

$\Rightarrow k = 2.\cos 60° - 1 \Rightarrow k = 2.\frac{1}{2} - 1 = 0$ olur.

O hâlde $A\left(\frac{\pi}{9}, 0\right)$ olup bu nokta, kuralı verilen fonksiyonun x eksenini kestiği noktadır.

Uygulayalım:

f: ℝ → ℝ, y = f(x) = 3cosx + 1 fonksiyonunun grafiğini çizelim.

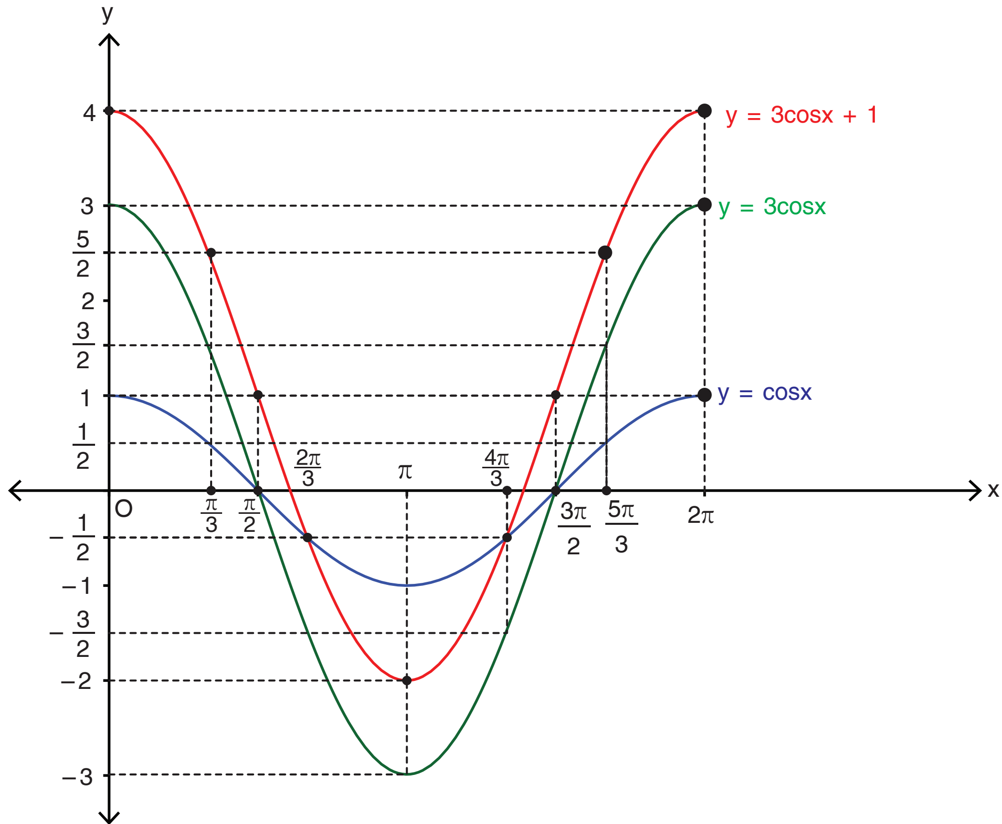
Çözelim:

f(x) = 3cosx + 1 fonksiyonunun esas periyodu, $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ dir.

x in bazı değerlerini kullanarak aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
cosx	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
3cosx	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	–3	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3
3cosx+1	4	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	–2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	4

Yukarıdaki tablodan faydalanarak y = f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Uygulayalım:

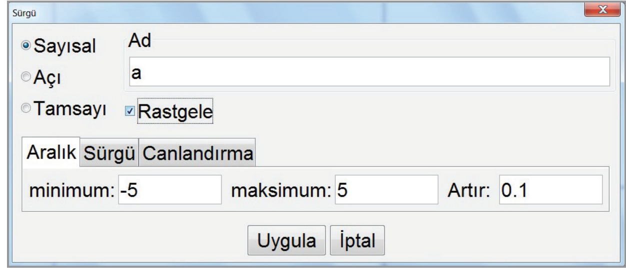
Bilgi ve iletişim teknolojilerinden dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımını kullanarak $f(x) = a\sin(bx + c) + k$ türündeki fonksiyonların katsayılarının grafik üzerindeki etkisini inceleyelim (GeoGebra yazılımını www.geogebra.org adresinden ücretsiz indirebilirsiniz.).

Çözelim:

$f(x) = a\sin(bx + c) + k$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerinin a, b, c ve k katsayıları değiştikçe nasıl değiştiğini GeoGebra yazılımında adım adım inceleyelim.

1. Adım:

Yazılımda, a=2 Sürgü sürgü araç çubuğunu seçerek ekranda herhangi bir yere tıkladığımızda oluşturduğumuz sürgü ile ilgili düzenlemeleri yapmamızı sağlayan yandaki pencere gelir. Burada adı a olan sayısal bir değişken oluşturulur. Bu a değişkeninin minumum değerinin –5, maksimum değerinin 5 ve bu aradaki artışın da 0,1 olması yandaki gibi sağlanır. Sonra "Uygula" butonuna basılır ve a değerinin yer aldığı sürgü oluşturulur.

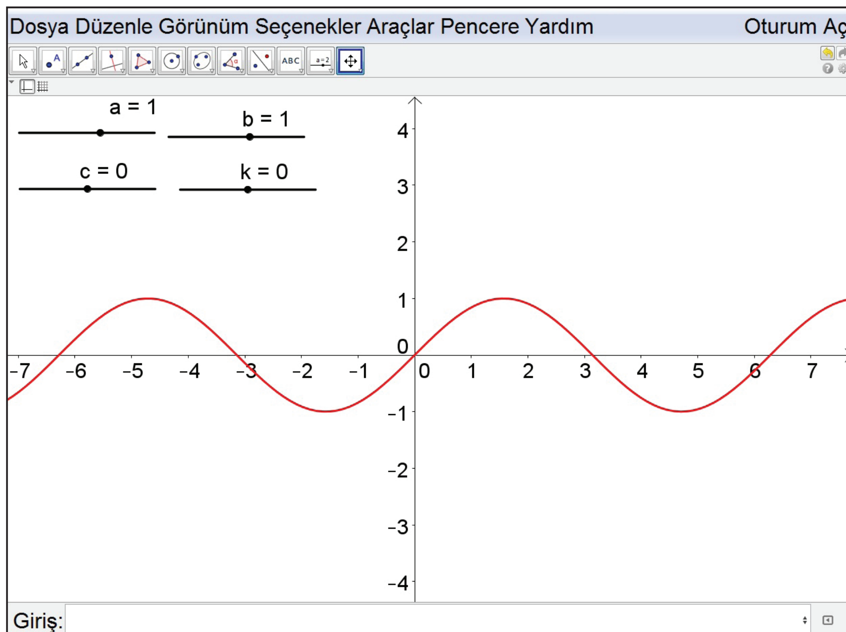


Benzer şekilde b, c ve k için de sürgüler oluşturulabilir.

2. Adım:

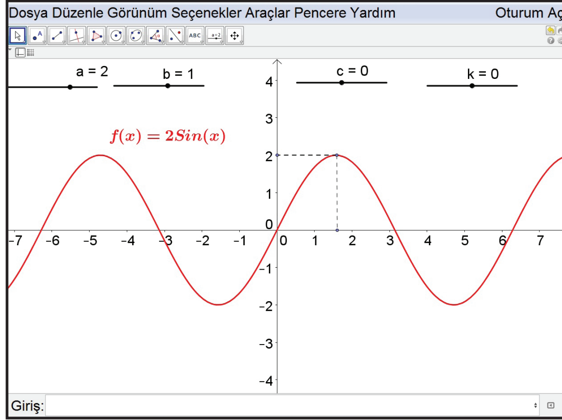
GeoGebra yazılımın "Giriş" satırına Giriş: f(x)=a*sin(b*x+c)+k yazıp "Enter" tuşuna bastıktan sonra o anki a, b, c ve k sürgülerindeki değerlere göre f(x) fonksiyonunu çizebiliriz.

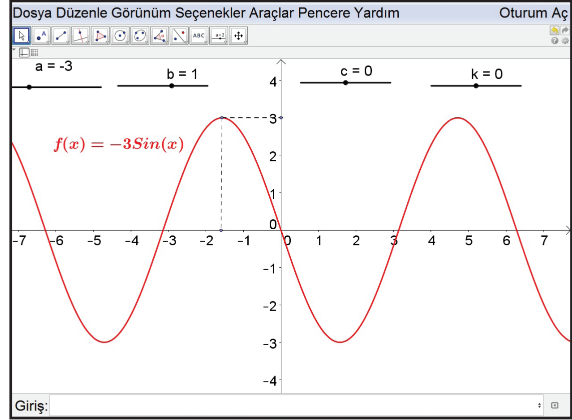
Aşağıda GeoGebra yazılımında a = 1, b = 1, c = 0 ve k = 0 iken f(x) = sinx fonksiyonunun grafiği görülmektedir.



3. Adım:

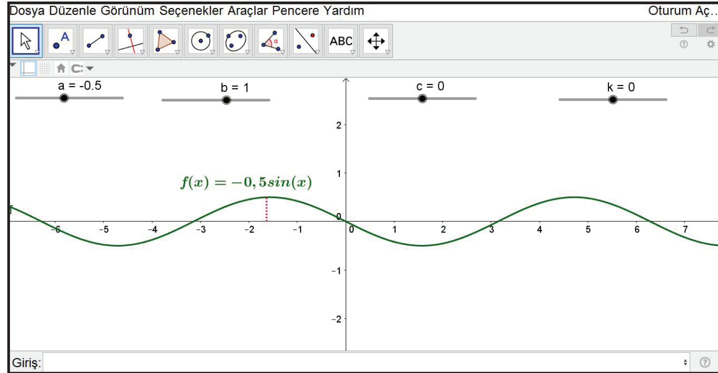
GeoGebra yazılımında şimdi sadece a sürgüsündeki a değerlerini değiştirerek a katsayısının grafiğe etkisini belirleyelim. Aşağıda, a = 2 ve a = –3 iken (c = 0 ve k = 0) oluşan fonksiyonların grafikleri görülmektedir.

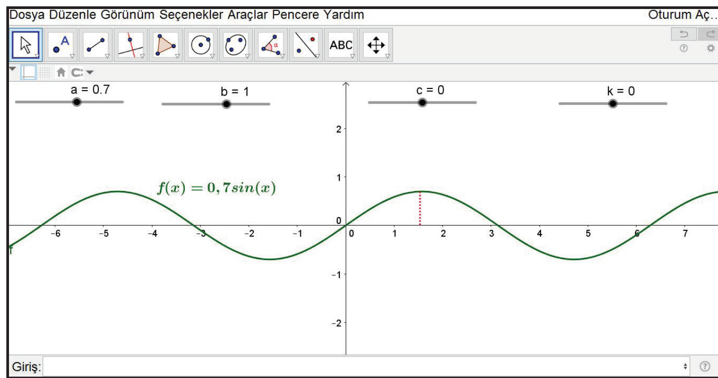




Yukarıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi a değeri |a| > 1 için f(x) = a.sinx fonkiyonunun grafiği, f(x) = sinx fonksiyonunun grafiğinin düşey (y ekseni boyunca) genişlemesidir.

Aşağıda için a = –0,5 ve a = 0,7 iken (c = 0 ve k = 0) oluşan fonksiyonların grafikleri görülmektedir.

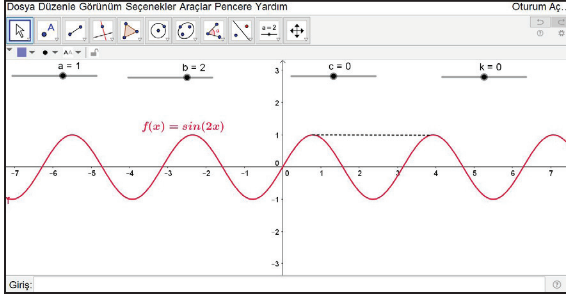


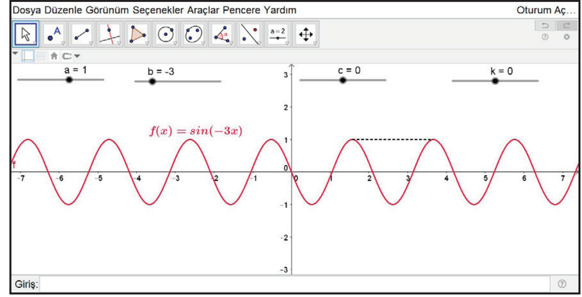


Yukarıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi |a| < 1 için f(x) = a.sinx fonksiyonunun grafiği, f(x) = sinx fonksiyonunun grafiğinin düşey daralmasıdır.

4. Adım:

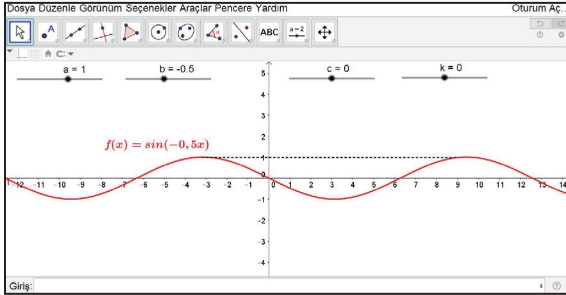
Şimdi, a = 1, c = 0, k = 0 iken b katsayısını değiştirdiğimizde bunun grafikteki etkisini görelim. Bir sonraki sayfada b = 2 ve b = –3 için oluşan fonksiyonların grafikleri görülmektedir.

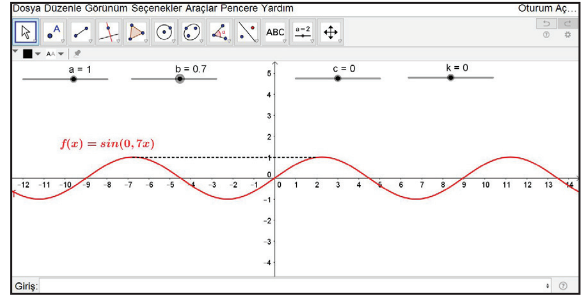




Yukarıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi b katsayısı |b| > 1 için f(x) = sin(bx) fonksiyonunun grafiği, f(x) = sinx fonksiyonunun grafiğinin yatay daralmasıdır. Yani fonksiyonun periyodu azaldığı için grafik x ekseni boyunca daralmaktadır.

Aşağıda b = –0,5 ve b = 0,7 iken (c = 0 ve k = 0) oluşan fonksiyonların grafikleri görülmektedir.

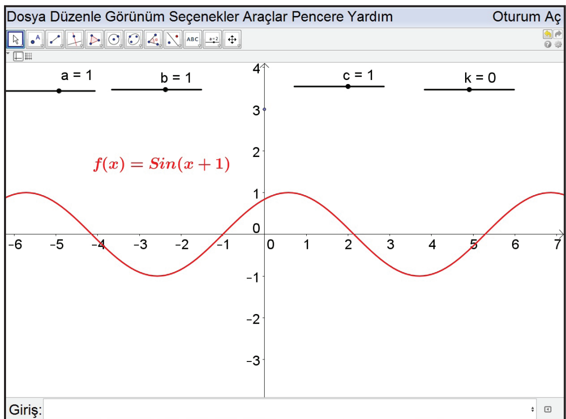


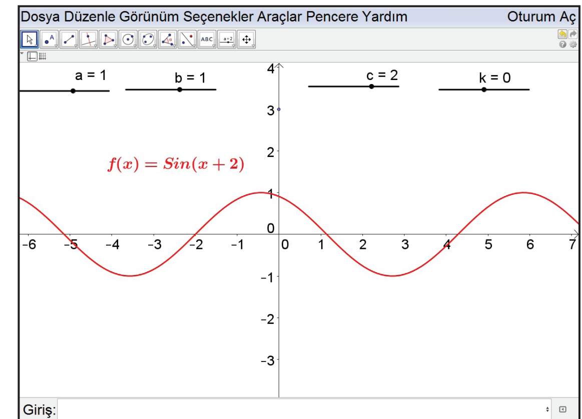


|b| < 1 için f(x) = sin(bx) fonksiyonunun grafiği, f(x) = sinx fonksiyonunun grafiğinin yatay genişlemesidir. Yani periyodu arttığı için grafik x ekseni boyunca genişlemektedir.

5. Adım:

Şimdi de a = 1, b = 1 ve k = 0 için c nin değişiminin grafiğe etkisini inceleyelim. GeoGebra yazılımında c = 1 ve c = 2 için oluşan fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir.



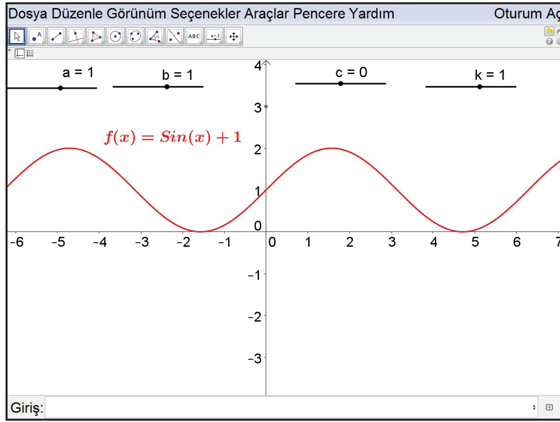


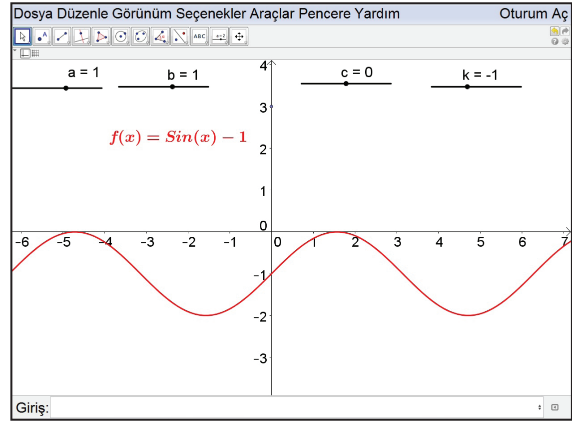
Grafiklerde görüldüğü gibi f(x) = sin(x + 2) fonksiyonu, f(x) = sin(x + 1) fonksiyonunun 1 br sola ötelenmişidir.

Benzer şekilde f(x) = sin(x + 1) fonksiyonu da f(x) = sin(x + 2) fonksiyonunun 1 br sağa ötelenmişidir. Yani f(x) = sin(x + c) fonksiyonunda c arttıkça grafik c br kadar sola, c azaldıkça grafik c br kadar sağa doğru ötelenir.

6. Adım:

Son olarak a = 1, b = 1 ve c = 0 için k nin değişiminin grafiğe etkisini inceleyelim. k = 1 ve k = –1 için oluşan grafikler aşağıdaki gibidir:

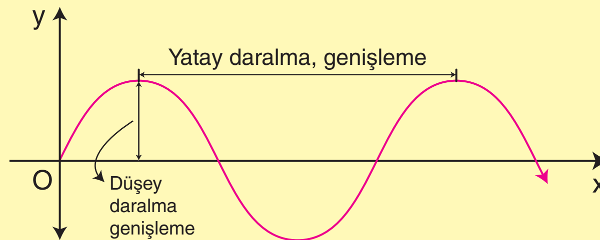




Yukarıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi f(x) = sin(x) + 1 fonksiyonunun grafiği, f(x) = sin(x) – 1 fonksiyonunun grafiğinin 2 br yukarıya doğru ötelenmişidir. Buna göre k değeri, grafikte düşey eksende ötelemeyi sağlar.

Dikkat Edelim!

f(x) = a.sin(bx + c) + k ve f(x) = a.cos(bx + c) + k türündeki fonksiyonların herhangi bir aralıktaki grafiklerini çizmek için öncelikle periyotları bulunur.



1. a nın değişimi, grafiğin düşey daralmasını ya da genişlemesini etkiler. Yani fonksiyonların değer kümesinin genişlemesini ya da daralmasını etkiler.
2. b nin değişimi, grafiğin yatay daralmasını ya da genişlemesini etkiler.
3. c nin değişimi, grafiğin yatay eksende ötelenme durumunu doğurur.
4. k nin değişimi, grafiğin düşey eksende ötelenme durumunu doğurur.

Özetle aşağıdaki grafiğe göre k sayısı grafiğin y ekseninde ötelenmesini, c sayısı grafiğin x ekseninde ötelenmesini, b sayısı yatayda değişimi, a sayısı ise düşeyde değişimi sağlar.

Uygulayalım:

$y = f(x) = 4\cos\frac{x}{2} + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizerek yorumlayalım.

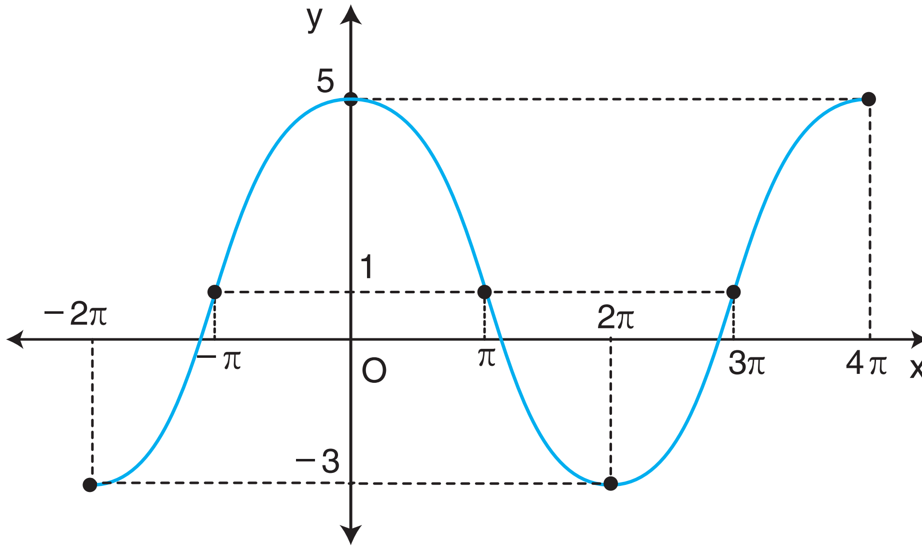
Çözelim:

Fonksiyonunun esas periyodu, $T = 4\pi$ dir. Bu periyoda göre $[0, 4\pi]$ aralığını seçelim.

Bu aralığa göre özel açıları belirleyerek aşağıdaki tabloyu oluşturalım.

x	0	π	2π	3π	4π
$\cos\frac{x}{2}$	1	0	–1	0	1
$4\cos\frac{x}{2}$	4	0	–4	0	4
$4\cos\frac{x}{2} + 1$	5	1	–3	1	5

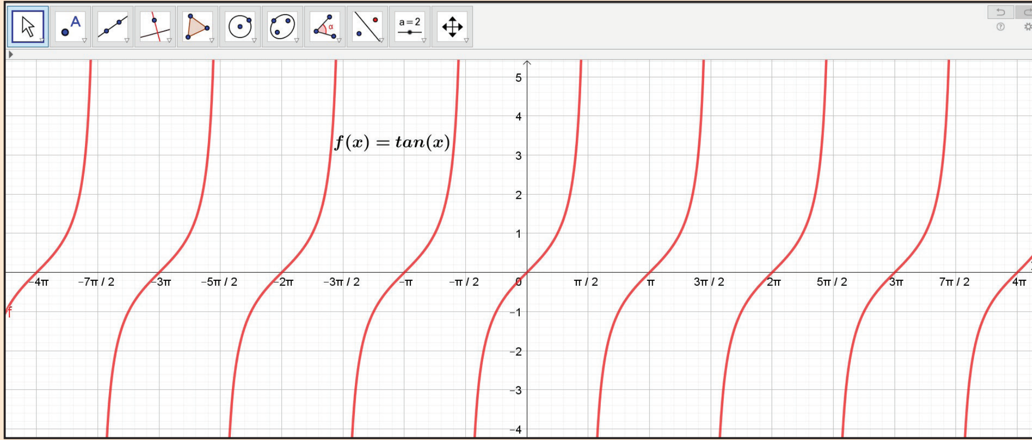
Tablodaki değerlere göre aşağıdaki grafiği çizebiliriz. Çizdiğimiz bu grafği $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiği ile yorumlayalım. $y = \cos x$ fonksiyonunun dalga yüksekliği (genliği) 4 katına çıkarılıp dalga boyu (periyodu) 2 katına çıkmıştır. Ayrıca son durumda elde edilen grafik, y ekseninde 1 br yukarıya ötelenmiş ve $y = f(x) = 4\cos\frac{x}{2} + 1$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir.



Öğrenelim:

Tanjant fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımında çizelim. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için f(x) = tanx fonksiyonunun esas periyodu π idi. Bunun anlamı, grafiğin $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çizilip aynı periyotlarla tekrarlanmasıdır. Bu aralıktaki bir açının bitim kenarı y eksenine yaklaştıkça bu açının tanjant değeri çok büyük pozitif (+∞) veya çok küçük negatif (–∞) değerlere yaklaşır. Bundan dolayı tanjant fonksiyonu (–∞, +∞) da değer alır.

Tanjant fonksiyonunu GeoGebra yazılımında çizdirelim. Bunun için yazılımın "Giriş" satırına Giriş: f(x)=tan(x) yazılarak aşağıdaki gibi f(x) = tanx fonksiyonu çizilir.



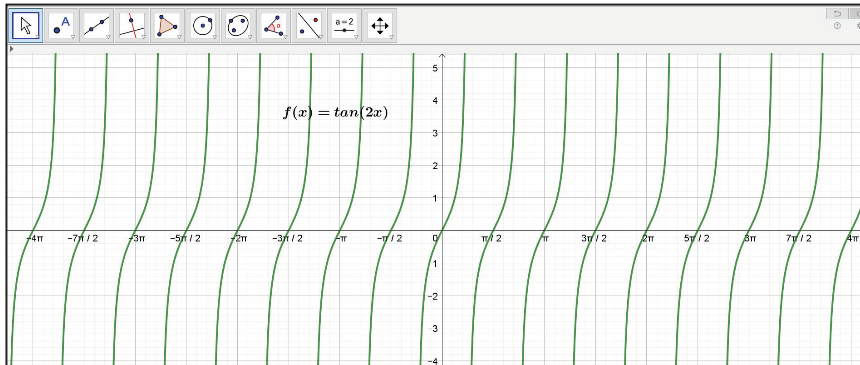
Ekran görüntüsünden anlaşılacağı üzere $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki grafik tekrarlanmaktadır. Grafik incelendiğinde tan(–x) = –tanx dir. Yani grafik orijine göre simetrik olduğundan tanjant fonksiyonu, tek fonksiyondur.

Uygulayalım:

y = f(x) = tan2x fonksiyonunun grafiğini GeoGebra yazılımında çizelim.

Çözelim:

Bu grafiği çizmek için GeoGebra yazılımında "Giriş" satırına Giriş: f(x)=tan(2x) yazılıp "Enter" tuşuna basılır. Grafik aşağıdaki gibidir.

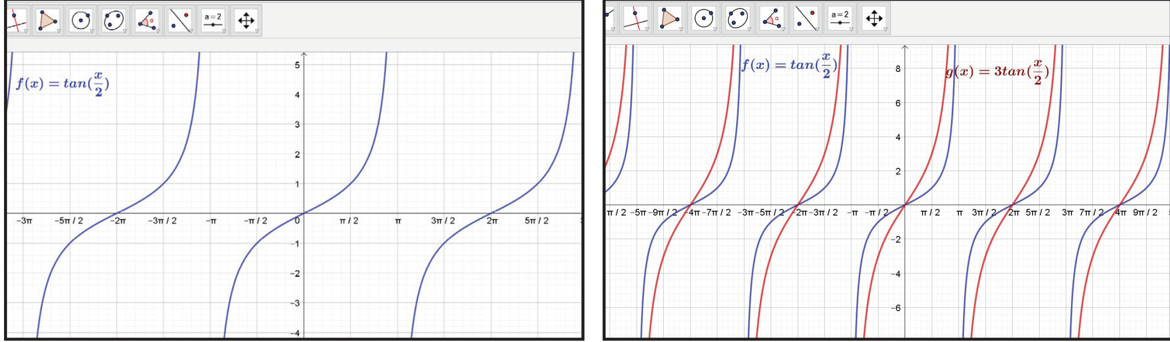


Uygulayalım:

$f(x) = \tan\frac{x}{2}$ ve $g(x) = 3\tan\frac{x}{2}$ fonksiyonların grafiklerini GeoGebra yazılımında çizelim.

Çözelim:

Bu fonksiyonların gerafiklerini GeoGebra yazılımında çizmek için yazılımının "Giriş" satırına bu fonksiyonları yazıp "Enter" tuşuna basarız. Grafikler aşağıdaki gibidir.

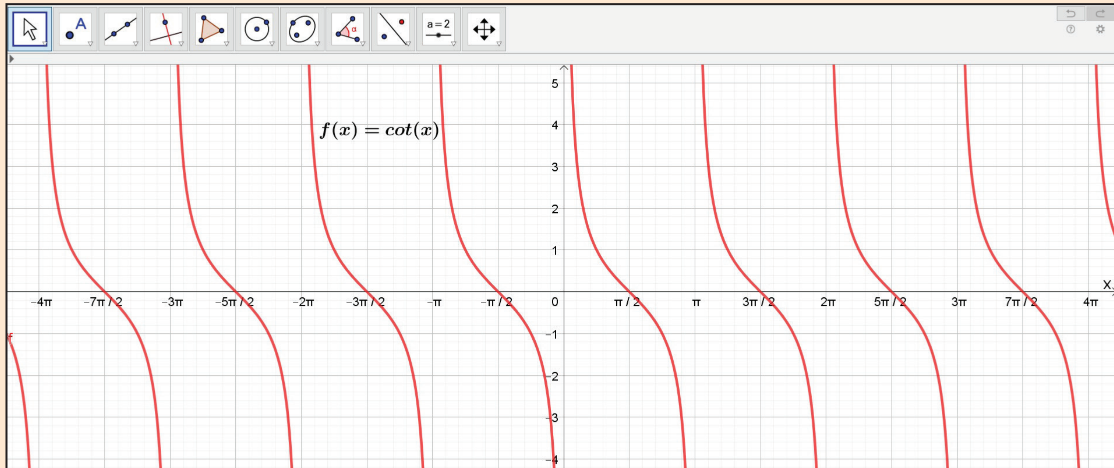


Öğrenelim:

Kotanjant fonksiyonunun grafiğini GeoGebra yazılımında çizelim.

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = cotx fonksiyonunun esas periyodu, π dir. Bunun anlamı, grafik $(0, \pi)$ aralığında çizilip π periyotlarla tekrarlanmasıdır. Bu aralıkta bir açının bitim kenarı y eksenine yaklaştıkça bu açının kotanjant değeri, çok büyük pozitif $(+\infty)$ veya çok küçük negatif $(-\infty)$ değerlere yaklaşır. Bundan dolayı kotanjant fonksiyonu, $(-\infty, +\infty)$ değer alır.

Kotanjant fonksiyonunu GeoGebra yazılımında çizdirelim. Bunun için yazılımın "Giriş" satırına Giriş: f(x)=cot(x) yazılarak aşağıdaki gibi f(x) = cotx fonksiyonu çizilir.



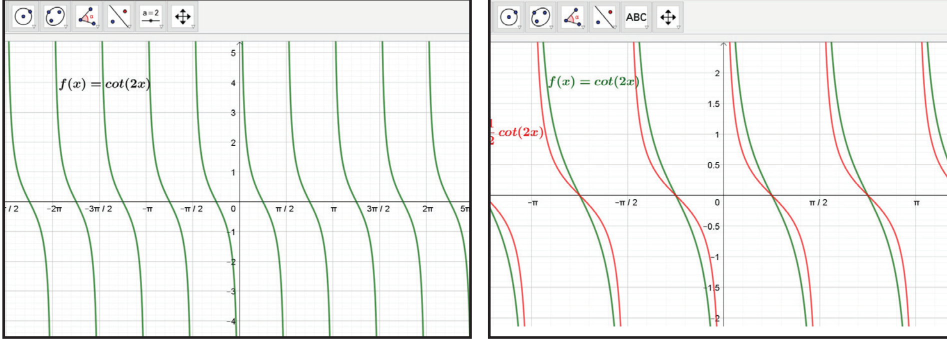
Ekran görüntüsünden de anlaşılacağı üzere $(0, \pi)$ aralığındaki grafik tekrarlanmaktadır. Grafik incelendiğinde $\cot(-x) = -\cot x$ olduğu görülür. Bu yüzden kotanjant fonksiyonu, tek fonksiyondur.

Uygulayalım:

$f(x) = \cot 2x$ ve $g(x) = \frac{1}{2}.\cot 2x$ fonksiyonunun grafiğini GeoGebra yazılımında çizelim.

Çözelim:

Yazılımın "Giriş" satırına istenen fonksiyonlar aynen yazılıp "Enter" tuşuna basılarak fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.

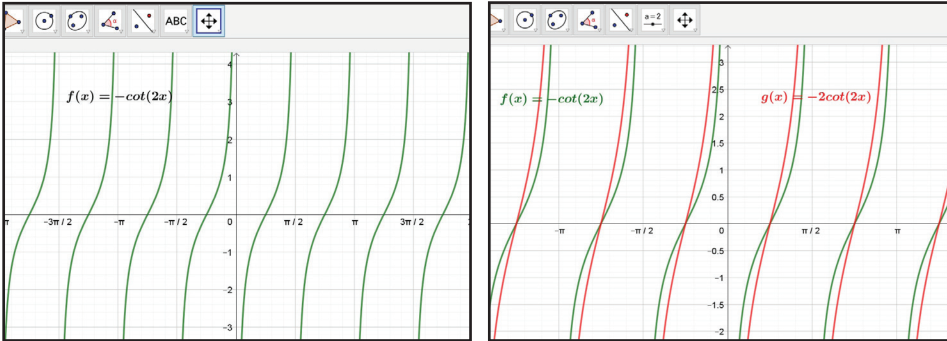


Uygulayalım:

$f(x) = -\cot 2x$ ile $g(x) = -2\cot 2x$ fonksiyonlarının grafiğini GeoGebra yazılımında çizelim.

Çözelim:

GeoGebra yazılımında "Giriş" satırına $f(x) = -\cot 2x$ ve $g(x) = -2\cot 2x$ yazıldığında istenen grafikler aşağıdaki gibi çizilir.



Pekiştirelim:

1. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a. $f(x) = \tan 5x$ **b.** $f(x) = 2\sin^6(\sqrt{2}.x)$ **c.** $f(x) = -3\cos^5(x-1)$ **ç.** $f(x) = -2\cot(3x-4)$

d. $f(x) = \sin x$ **e.** $f(x) = -4\cos 2x + 1$ **f.** $f(x) = 2\sin 3x - 1$ **g.** $f(x) = 2\tan^2\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$

2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini $(-\pi, \pi)$ aralığında çiziniz.

a. $f(x) = \sin x$ **b.** $f(x) = 2\cos x$ **c.** $f(x) = \cos 2x$ **ç.** $f(x) = -\sin\frac{x}{4} + 3$

d. $f(x) = \cos 2x - 1$ **e.** $f(x) = -4\cos x + 1$ **f.** $f(x) = 2\sin 3x - 1$ **g.** $f(x) = 4\sin x + 1$

3. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak çiziniz.

a. $f(x) = \cot 4x$ **b.** $f(x) = -\tan\frac{x}{4} + 1$ **c.** $f(x) = \frac{1}{3}\cot(-x)$ **d.** $f(x) = 2\tan 3x$

1.2.5. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

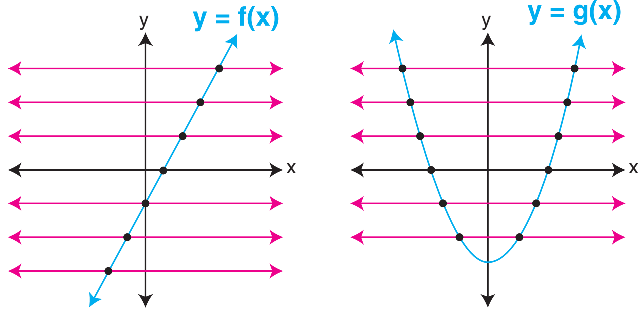
Hatırlayalım:

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirinden farklı ise f fonksiyonuna özel olarak **bire bir (1-1) fonksiyon** denir.

$x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya $f(x_1) = f(x_2)$ için $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonu, bire bir fonksiyondur.

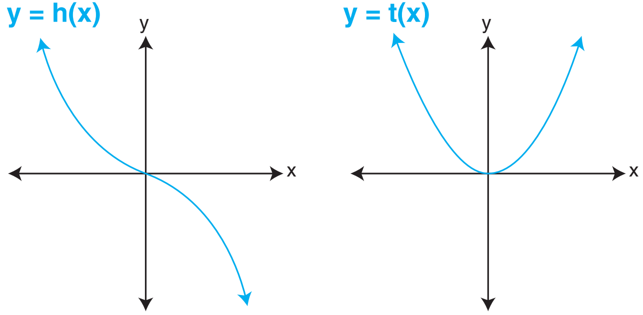
Grafiği verilen ya da çizilen bir fonksiyonun 1-1 fonksiyon olup olmadığı belirlenirken **yatay doğru testi** adı verilen yöntem kullanılabilir. Bu yöntemde f fonksiyonunun grafiğini kesecek şekilde y eksenine dik, x eksenine paralel doğrular çizildiğinde bu doğrular f fonksiyonunun grafiğini yalnız bir noktada kesiyorsa f, 1-1 fonksiyon olur.

Örneğin $\mathbb{R}$ de tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun yatay doğru testine göre $y = f(x)$ fonksiyonu, 1 - 1 fonksiyonudur. Çünkü fonksiyonun grafiğini kesecek şekilde x eksenine paralel doğrular çizildiğinde yanda da görüldüğü gibi bu doğruların her biri, grafiği tek noktada keser. Yandaki grafikten de görüldüğü gibi $y = g(x)$ fonksiyonunu yatay doğrular iki noktada kesmektedir. Bu durumda $y = g(x)$ fonksiyonu, bire bir değildir.



$f: A \rightarrow B$ olmak üzere f fonksiyonu için değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir. Başka bir ifadeyle $f(A) = B$ oluyorsa f, örten fonksiyondur.

Örneğin yanda grafiği verilen $y = h(x)$ fonksiyonu incelendiğinde fonksiyonun tüm gerçek sayıları örttüğü görülür. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olduğundan h fonksiyonu, örten bir fonksiyondur. Yandaki $y = t(x)$ fonksiyonunun grafiğinde negatif gerçek sayıları örtmediği görülür. Yani $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ olduğundan t fonksiyonu, örten bir fonksiyon değildir.



İşte, $f: A \rightarrow B$, 1-1 ve örten f fonksiyonunun B görüntü kümesindeki elemanları A tanım kümesindeki aynı elemanlara eşleyen $g: B \rightarrow A$, 1-1 ve örten fonksiyona **f fonksiyonun tersi** denir ve bu, $g = f^{-1}$ ile gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun üzerindeki herhangi bir (a, b) noktası, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun üzerinde (b, a) noktasına karşılık gelir. Zaten ters fonksiyonun tanımından da $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ tir.

Örneğin $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ olur.

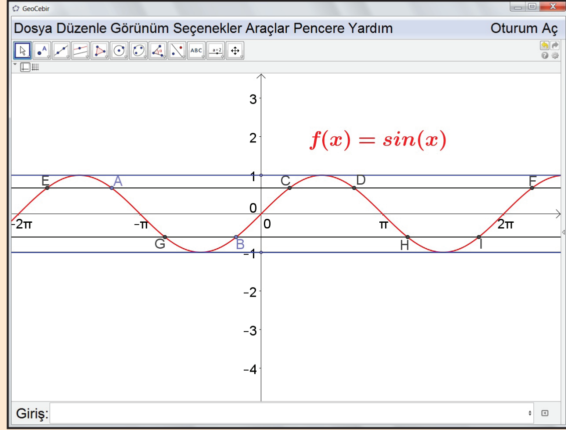
$(1, 1) \in f$, $(2, 4) \in f$ ve $(3, 9) \in f$ iken

$(1, 1) \in f^{-1}$, $(4, 2) \in f^{-1}$ ve $(9, 3) \in f^{-1}$ olur.

Öğrenelim:

Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun olması için o fonksiyonun bire bir (1 - 1) ve örten olması gerekir. Trigonometrik fonksiyonların hangi aralıklarda bire bir ve örten olduğunu belirleyelim.

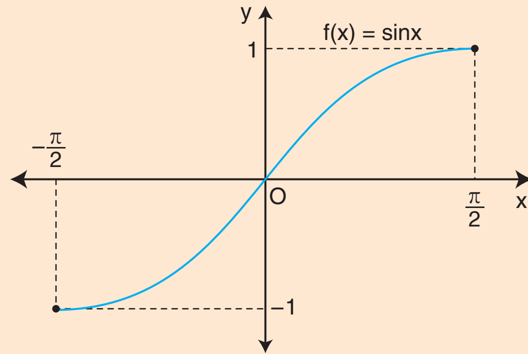
Öncelikle f(x) = sinx fonksiyonunu ele alalım. f(x) = sinx fonksiyonunun bire bir olup olmadığına yatay doğru testi kullanarak karar verelim. Aşağıda GeoGebra yazılımında f(x) = sinx fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Yazılımın "Giriş" satırına Giriş: f(x)=sin(x) yazdıktan sonra "Enter" tuşuna basarak bu grafiği çizebiliriz. Ayrıca yazılımın "paralel doğru çizme" Paralel doğru araç çubuğu ile x eksenine paralel ve eğriyi kesen birkaç doğru çizelim.



Yandaki çizimde görüldüğü gibi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye tanımlandığında yatay doğru testine göre bir doğru, eğriyi birden fazla noktada kesmez. Bu nedenle fonksiyon bire bir değildir. Ayrıca f(x) = sinx fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ için f(x) > 1 ve f(x) < –1 eşitsizliklerini sağlamadığı görülür.

Yani f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımladığımızda f(x), örten bir fonksiyon da olmaz. Bunun için tanım ve değer kümesini daraltarak f fonksiyonunu bire bir ve örten yapalım.

Yandaki grafikte görüldüğü gibi f(x) = sinx fonksiyonunu f:$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ olarak tanımlarsak elde edilen fonksiyon, bire bir ve örten olur.



Yani f:$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, f(x) = sinx fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan bu fonksiyonun tersi vardır. Tersi olan $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \mathbf{sin^{-1}x}$ fonksiyonuna **arksinüs fonksiyonu** denir ve

$f^{-1}(x) =$ **arcsinx** ile gösterilir.

y = sinx ⇔ x = arcsin y olur.

Uygulayalım:

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve arcsin(1) ifadelerinin eşitini bulalım.

Çözelim:

arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan arcsin(y) = x $\Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x$ olsun. y = sinx ⇔ x = arcsiny olduğundan

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

$\arcsin(1) = x \Leftrightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ olur.

Uygulayalım:

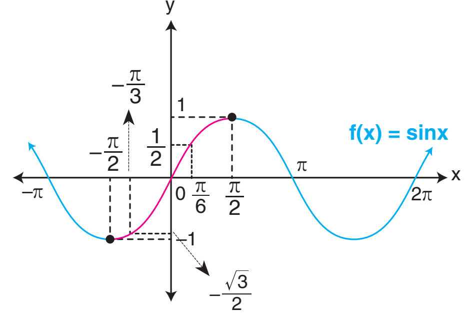
Tanımlı olduğu aralıkta f(x) = sinx fonksiyonu için $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ve $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ değerlerini bulalım.

Çözelim:

Yandaki grafikte de görüldüğü gibi

f(x) = sinx fonksiyonu, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bire bir ve örtendir.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ve $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olup ters fonksiyon tanımından



$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ve $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ bulunur.

Yani $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ olur.

Buradan $x = \frac{\pi}{6}$ bulunur.

Benzer şekilde $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Buradan $x = -\frac{\pi}{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\sin\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

$\arcsin\frac{2}{5} = x$ olsun.

Bu durumda bizden istenen $\sin\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) = \sin x$ olur.

$\arcsin\frac{2}{5} = x \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{5}$ bulunur.

O hâlde istenen $\sin\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ için $f(x) = 2 + \sin\sqrt{x}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulalım.

Çözelim:

Verilen fonksiyonu $y = 2 + \sin\sqrt{x}$ olarak yazılırsa burada x yerine y, y yerine x yazıldığında fonksiyonunun ters fonksiyonu elde edilir.

$x = 2 + \sin\sqrt{y} \Rightarrow x - 2 = \sin\sqrt{y}$ olur.

Burada y yi bulmak için eşitliğin her iki tarafına arksinüs fonksiyonunu uygulanırsa

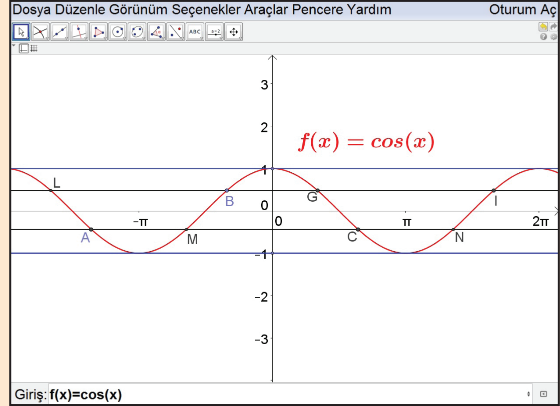
$x - 2 = \sin\sqrt{y} \Rightarrow \arcsin(x - 2) = \sqrt{y}$ bulunur. Buradan

$y = [\arcsin(x - 2)]^2$ yani $f^{-1}(x) = [\arcsin(x - 2)]^2$ elde edilir.

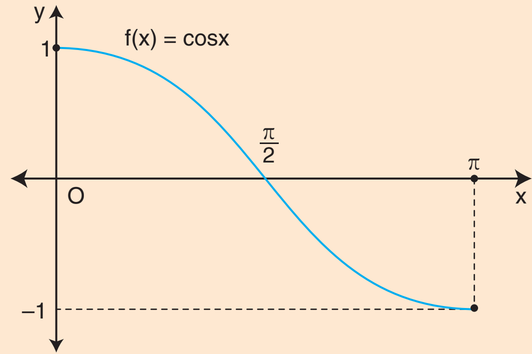
Öğrenelim:

Trigonometrik fonksiyonlardan f(x) = cosx fonksiyonunun bire bir ve örten fonksiyon olduğu aralığı belirleyip bu fonksiyonun ters fonksiyonunu elde edelim. Bu fonksiyonun bire bir olup olmadığına yatay doğru testi kullanarak karar verebiliriz.

GeoGebra yazılımında "Giriş" satırına Giriş: f(x)=cos(x) yazıp "Enter" tuşuna bastığımızda f: ℝ → ℝ, f(x) = cosx fonksiyonunun grafiğini çizeriz. y = sinx fonksiyonunda yaptığımız gibi x eksenine paralel doğrular Paralel doğru çizdiğimizde yandaki görüntüyü elde ederiz.



Çizimde de görüldüğü gibi f: ℝ → ℝ ye tanımlandığında yatay doğru testine göre x eksenine paralel çizilen doğrular, eğriyi birden fazla noktada keser. Bu nedenle fonksiyon bire bir olmaz. f(x) = cosx fonksiyonunun ∀x ∈ ℝ için f(x) > 1 ve f(x) < –1 eşitsizliklerini sağlamadığını görürüz. Yani f: ℝ → ℝ ye tanımlandığında bire bir ve örten fonksiyon olmaz. Bunun için f fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini daraltarak fonksiyonu bire bir ve örten yapalım.



f(x) = cosx fonksiyonunu f: [0, π] → [–1, 1] olarak tanımlarsak f fonksiyonu, bire bir ve örten olur.

Yani f: [0, π] → [–1, 1], f(x) = cosx fonksiyonu, bire bir ve örten fonksiyondur. Bu nedenle fonksiyonun tersi olan $f^{-1}(x)$: [–1, 1] → [0, π], $f^{-1}(x)$ = **$\cos^{-1}x$** fonksiyonuna **arkkosinüs fonksiyonu** denir ve bu, $f^{-1}(x)$ = **arccosx** ile gösterilir.

y = cosx ⇔ x = arccosy olur.

Uygulayalım:

arccos(0), $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadelerinin eşitini bulalım.

Çözelim:

arccos: [–1, 1] → [0, π] olduğundan arccos(y) = x ⇒ x ∈ [0, π] dir.

arccos(0) = x olsun. y = cosx ⇔ x = arccosy olduğundan

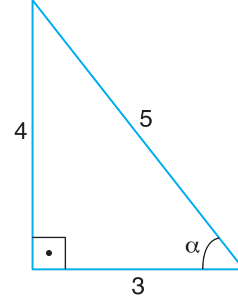
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ olur.

$\arccos(0) = x \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ olur.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ olur.

Uygulayalım:

$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.



Çözelim:

$\arccos\frac{3}{5} = \alpha$ ise $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ tir.

Yanda görülen dik üçgende $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ olur.

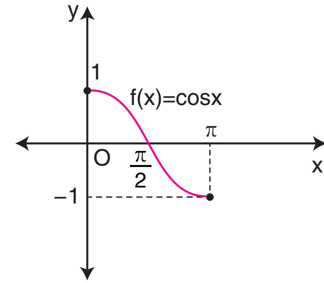
$\arccos\frac{3}{5} = \alpha$ ise $\sin\alpha$ değerini bulmalıyız.

Çizdiğimiz üçgene göre $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ değerlerini bulalım.

Çözelim:



Yandaki grafikte de görüldüğü gibi

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu, $[0, \pi]$ aralığında bire bir ve örtendir.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ olup ters fonksiyon tanımından

$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ve $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ bulunur.

Yani $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.

Buradan $x = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

Benzer şekilde; $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ olur. Buradan $x = \frac{2\pi}{3}$ bulunur.

Uygulayalım:

$y = f(x) = \arccos\left(\frac{2x-5}{3}\right)$ fonksiyonunda x in değişim aralığını bulalım.

Çözelim:

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ olduğundan arccos(x) in tanım kümesi, $[-1, 1]$ aralığıdır.

$y = \arccos\left(\frac{2x-5}{3}\right) \Rightarrow -1 \le \frac{2x-5}{3} \le 1$ ise

$-3 \le 2x - 5 \le 3 \Rightarrow 2 \le 2x \le 8 \Rightarrow 1 \le x \le 4$ bulunur.

Uygulayalım:

$\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

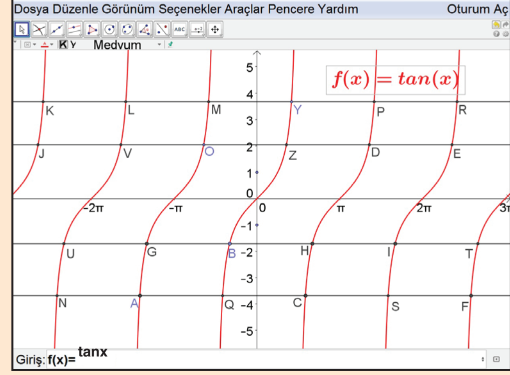
$\arccos\frac{3}{4} = x$ olsun. Bu durumda bizden istenen,

$\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right) = \cos x$ olur. $\arccos\frac{3}{4} = x \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{4}$ bulunur.

O hâlde istenen $\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ elde edilir.

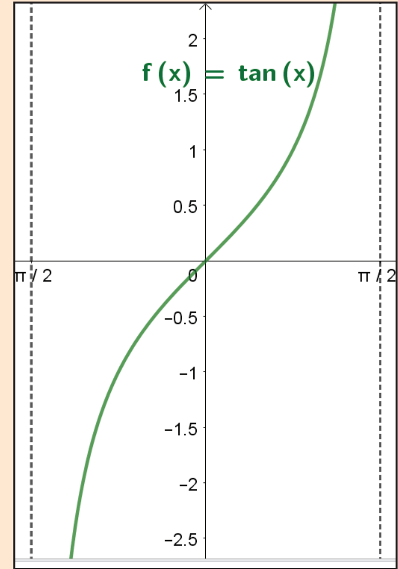
Öğrenelim:

Son olarak trigonometrik fonksiyonlardan f(x) = tanx fonksiyonunun bire bir ve örten fonksiyon olduğu aralığı belirleyip ters fonksiyonunu elde edelim. Bu fonksiyonun bire bir olup olmadığına yatay doğru testi kullanarak karar verebiliriz. Bunun için GeoGebra yazılımında “Giriş” satırına Giriş: f(x)=tan(x) yazıp “Enter” tuşuna bastığımızda f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = tanx fonksiyonunun grafiğini çizeriz. Diğer fonksiyonlarda yaptığımız gibi yazılımda x eksenine paralel doğrular çizdiğimizde yandaki görüntüyü elde ederiz.



Grafikteki çizimlerde de görüldüğü gibi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye tanımlandığında yatay doğru testine göre f(x) = tanx fonksiyonu bire bir olmaz. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ olduğundan bu fonksiyon, örten bir fonksiyondur. Fonksiyonu bire bir yapmak için fonksiyonun tanım kümesini daraltalım.

f(x) = tanx fonksiyonunu $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ olarak tanımlarsak GeoGebra yazılımında çizilen yandaki gibi f fonksiyonu, bire bir ve örten olur.



Yani $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, f(x) = tanx fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan bu fonksiyonun tersi vardır. Tersi olan $f^{-1}(x)$: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \mathbf{tan^{-1}x}$ fonksiyonuna **arktanjant fonksiyonu** denir ve bu, $f^{-1}(x)$ = **arctanx** ile gösterilir.

Uygulayalım:

arctan(1) ve $\arctan(-\sqrt{3})$ ifadelerinin eşitini bulalım.

Çözelim:

arctan: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$\arctan(y) = x \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.

arctan(1) = x olsun. y = tanx ⇔ x = arctany olduğundan

$\arctan(1) = x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ olur.

$\arctan(-\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ olur.

Uygulayalım:

tan(arctan3) ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

arctan3 = x olsun.

Bu durumda bizden istenen, tan(arctan3) = tanx olur.

arctan3 = x $\Leftrightarrow$ tanx = 3 olarak bulunur.

O hâlde istenen,

tan(arctan3) = 3 elde edilir.

Dikkat Edelim!

sin(arcsinx) = x, cos(arccosx) = x ve tan(arctanx) = x tir.

Uygulayalım:

$\arccos\frac{5x}{12} = \arcsin x$ olduğuna göre x in alabileceği değerleri bulalım.

Çözelim:

$\arccos\frac{5x}{12} = \arcsin x = y$ olsun.

$\arccos\frac{5x}{12} = y \Rightarrow \cos y = \frac{5x}{12} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{25x^2}{144}$ tür.

$\arcsin x = y \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow \sin^2 y = x^2$ dir.

Bulunanlar taraf tarafa toplandığında

$\sin^2 y + \cos^2 y = \frac{25x^2}{144} + x^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{169x^2}{144} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow x = \mp\frac{12}{13}$ olur.

Her iki fonksiyonun tersinin tanımlı olduğu bölge I. bölge olduğundan $x = \frac{12}{13}$ tür.

Uygulayalım:

$\tan\left(\pi - \arccos\frac{3}{5}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözelim:

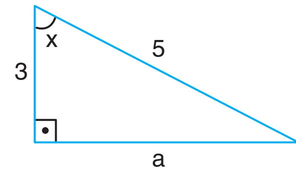
$\arccos\frac{3}{5} = x$ olsun.

Bu durumda $\tan(\pi - x) = -\tan x$ i bulmamız gerekiyor.

$\arccos\frac{3}{5} = x \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$ tir.

Yandaki dik üçgende $a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a = 4$ br dir.

$-\tan x = -\frac{4}{3}$ olur.



Tanıyalım:

Matematiğin diğer bilim dallarıyla ilişkisi olduğu gibi fizik ve müzikle de ilişkisi vardır. **Frekans**, periyodun çarpmaya göre tersi olup $F = \frac{1}{T}$ dir. Müzikte ise bir telin 1 saniyedeki titreşim sayısı, duyduğumuz sesin frekansını verir. Frekans, 19. yüzyılda radyo dalgalarının nasıl oluştuğunu keşfeden bilim insanına ithafen **Hertz** ile ölçülür.

1 Hertz = 1 titreşim/saniyedir.

Ses dalgasının fotoğrafını çekmeye çalışsak nasıl bir görüntüyle karşılaşırız?

Bir trampetten çıkan notanın ya da ses dalgasının fotoğrafı yukarıda görülmektedir.

Joseph Fourier (Jozıf Furiyır), 19. yüzyılda neredeyse her periyodik fonksiyonu sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazabilmiştir. Yani müzik aleti ve insandan çıkan bütün müzikal sesler (periyodik alanlar için) matematiksel ifadelere dönüşebilir ki bu da sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıdır.

Öyleyse çıkaracağımız bir do sesinin aşağıdaki türden bir ifadeye denk olması mümkündür.

$y(t) = \frac{1}{2a_0} + (a_1 + \cos t + b_1 \sin t) + ... + (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ (Karadağ, 2004)

Pekiştirelim:

1. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **c.** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **ç.** $\arcsin(-1)$

d. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **e.** $\arctan(-1)$ **f.** $\arctan(0)$ **g.** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\sin(\arctan(-1))$ **b.** $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

c. $\tan\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ **ç.** $\sin\left(\arccos\left(\frac{2}{7}\right)\right)$

d. $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **e.** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{5}\right)$

3. $\arcsin\frac{5}{13} + \arctan\frac{12}{5}$ değeri kaçtır?

4. $\arccos\frac{7x}{24} = \arcsin x$ olduğuna göre x in alabileceği değerleri bulunuz.

5. $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) + \sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$ toplamının değerini bulunuz.

6. $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos(\sqrt{x} + 2)$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

1. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1. ABC bir dik üçgen olmak üzere

$m(\widehat{BAC}) = 90°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 38° 42'$

olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ yi bulunuz.

2. 15740° ölçüye sahip açının esas ölçüsü kaç derecedir?

3. $\frac{\pi}{6}$ radyanlık açının derece türünden eşitini bulunuz.

4. $-\frac{25\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsünü bulunuz.

5. $\frac{3\sin x - \cos x}{2\cos x - \sin x} = 2$ olduğuna göre x dar açısının ölçüsü kaç derecedir?

6. $\frac{\cot x}{1 - \operatorname{cosec} x} + \tan x$ ifadesinin en sade biçimini bulunuz.

7. $\frac{1}{1 - \tan 15°} + \frac{1}{1 - \cot 15°}$ işleminin sonucu kaçtır?

8. ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 18°13'27''$ ve $m(\widehat{B}) = 83°49'56''$ ise $m(\widehat{C})$ değerini bulunuz.

9. $x = \sin 138°$

$y = \cos 310°$

$z = \tan 205°$

$t = \cot 110°$

Verilenlere göre x, y, z ve t sayılarının işaretlerini bulunuz.

10. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$ ifadesinin en sade biçimini bulunuz.

11. $\frac{1 + \sin 40°}{\cos 40°} - \frac{\cos 40°}{1 - \sin 40°}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

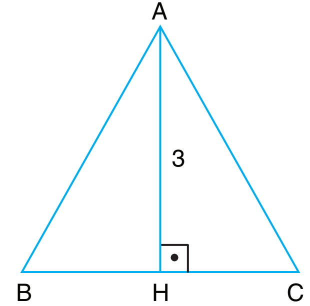
12. $\frac{1 - \sin^2 a}{\cot a} + \frac{1 - \cos^2 a}{\tan a}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

13. $a = \sin\frac{\pi}{6}$ ve $b = \cos\frac{\pi}{6}$ olduğuna göre $a^4 + 4a^2b^2 + b^4$ ifadesinin değeri kaçtır?

14. ABC üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$|AH| = 3$ br



$\cot(\widehat{ABC}) + \cot(\widehat{ACB}) = 6$ olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç br² dir?

15. ABC üçgen

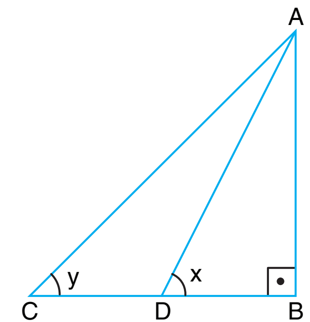
$[CB] \perp [AB]$

$m(\widehat{ACB}) = y$

$m(\widehat{ADB}) = x$

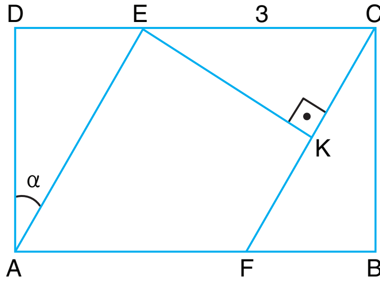
$\tan x = 1,5$

$\tan y = 0,5$



Verilenlere göre $\frac{|CD|}{|DB|}$ oranı kaçtır?

16.



ABCD dikdörtgen,

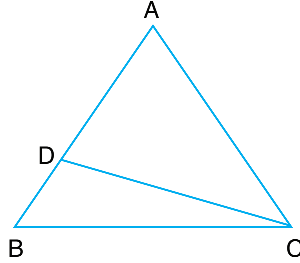
[AE] // [FC], [EK] ⊥ [FC],

$m(\widehat{DAE}) = \alpha$, |EC| = 3 br,

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olduğuna göre |EK| kaç br dir?

17. ABC eşkenar üçgen

|DA| = 5.|BD|



Verilenlere göre $\cot(\widehat{DCA})$ nın değeri kaçtır?

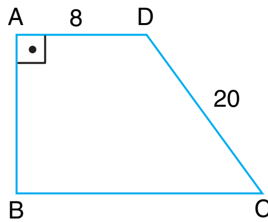
18. [AD] // [BC]

[BA] ⊥ [DA]

|AD| = 8 br

|DC| = 20 br

$\cos(\widehat{BCD}) = \frac{4}{5}$



Verilenlere göre ABCD yamuğunun alanı kaç br^2 dir?

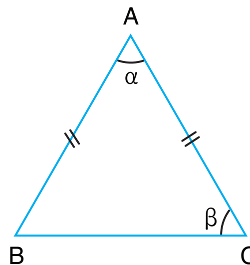
19. ABC üçgen

|AB| = |AC|

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$

$m(\widehat{ACB}) = \beta$

$\cot\alpha = \frac{4}{3}$



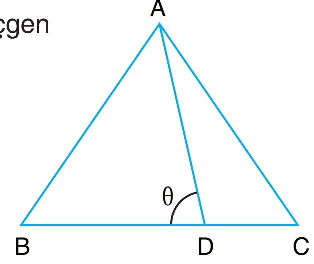
Verilenlere göre tanβ nın değeri kaçtır?

20. $\frac{1 - \cos^4 x - \sin^2 x}{\sin^4 x}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

21. ABC eşkenar üçgen

4.|DC| = |BD|

$m(\widehat{ADB}) = \theta$



Verilenlere göre cosθ nın değeri kaçtır?

22. ABC üçgeninde a = 8 cm, b = 6 cm ve $\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{8}$ ise $\sin(\widehat{B})$ kaçtır?

23. ABC üçgeninde a = 16 cm, b = 8 cm ve $\sin(\widehat{C}) = 120^\circ$ ise c kaç cm dir?

24. ABC üçgeninde $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ise $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

25. ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 45^\circ$, $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ ve $b = 4\sqrt{2}$ cm ise c kaç cm dir?

26. 3.sinx + 4a = 5 olduğuna göre a nın alabileceği değerler hangi aralıktadır?

27. a = sin 105°, b = cos280°, c = tan260° değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

28. $\cos\left(\arctan\frac{3}{4}\right)$ değerini hesaplayınız.

29. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini [–2π, 2π] aralığında çiziniz.

a. f(x) = 2sin3x **b.** f(x) = –cos3x

c. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin x$ **ç.** f(x) = 3 cos 2x

30. Aşağıdaki fonksiyonları bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak çiziniz.

a. $f(x) = 3\tan\frac{x}{2}$ **b.** f(x) = –2cot3x

1. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. a = sin185°
b = cos92°
c = tan176°
d = cos247°

Yukarıda verilenlerin trigonometrik değerlerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) +, +, –, – B) –, –, +, – C) +, –, +, –
D) +, +, +, – E) –, –, –, –

2. $\dfrac{2\cos x + \sin x}{3\sin x - \cos x} = \dfrac{4}{3}$ olduğuna göre

tanx değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\dfrac{10}{9}$ B) $-\dfrac{9}{10}$ C) 1 D) $\dfrac{9}{10}$ E) $\dfrac{10}{9}$

3. $(\sin 20° + \cos 20°)^2 - 2\sin 20°.\cos 20°$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

4. $\sin x + \csc x = \dfrac{3}{2}$ olduğuna göre

$\sin^2 x + \csc^2 x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{9}{4}$

5. a = sinα ve b = cosα olduğuna göre

$a^4 + 2a^2 - b^4 + 2 - b^2$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

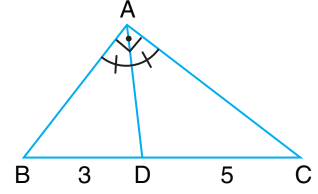
A) –3.cosα B) – 4.$\sin^2\alpha$ C) 5.$\cos^2\alpha$
D) 3.sinα E) 5.$\sin^2\alpha$

6. $\sec x - \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = a$ ise

1 + tanx in a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 + a B) 1 – a C) 2a – 1
D) a E) $\dfrac{a+1}{2}$

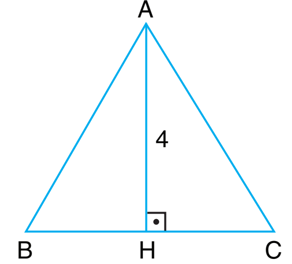
7. ABC üçgen
[AD] açıortay
[BA] ⊥ [AC]
|BD| = 3 br
|DC| = 5 br



Verilenlere göre $\tan(\widehat{ABC})$ nin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{3}{8}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) $\dfrac{5}{8}$ D) 1 E) $\dfrac{5}{3}$

8. ABC üçgen
[AH] ⊥ [BC]
|AH| = 4 br



$\cot(\widehat{ABC}) + \cot(\widehat{ACB}) = 5$

Verilenlere göre |BC| kaç br dir?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

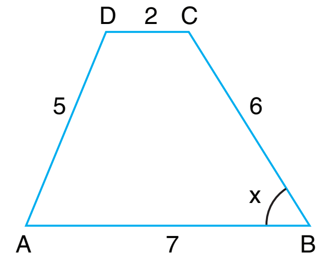
9. Bir ABC üçgeninde |AB| = |AC| ve
$\cos(\widehat{BAC}) = 0{,}6$ olduğuna göre
$\cot(\widehat{ABC})$ nin değeri kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) 1 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

10. $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x - 1}$ ifadesinin en sade biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) 2.tanx C) $\cot^2 x$
D) 2.$\tan^2 x$ E) 2.cotx

11. ABCD yamuk
[DC] // [AB]
$m(\widehat{ABC}) = x$
|DC| = 2 br
|AB| = 7 br
|AD| = 5 br
|BC| = 6 br



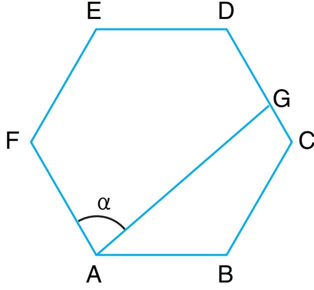
Verilenlere göre sinx in değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{4}{5}$ D) $\dfrac{4}{9}$ E) $\dfrac{3}{7}$

12. x, I. bölgede bir açı ölçüsü ve tanx = 2 olduğuna göre $\cos^2x - \cos x.\sin x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

13.



ABCDEF düzgün altıgen

$m(\widehat{FAG}) = \alpha$

$|DG| = 3.|GC|$

Verilenlere göre tanα değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

14. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\sqrt{3}.\tan x + 2} = \frac{1}{\tan x}$ tir.

Verilenlere göre $\frac{1}{\cot x}$ in değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) 1 E) $\sqrt{2}$

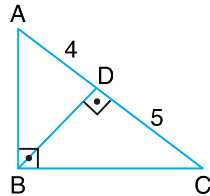
15. ABC üçgen

$[AB] \perp [BC]$

$[BD] \perp [AC]$

$|AD| = 4$ br

$|DC| = 5$ br



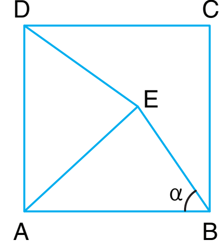
Verilenlere göre $\sin(\widehat{ACB})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

16. ABCD kare

ADE eşkenar üçgen

$m(\widehat{ABE}) = \alpha$



Verilenlere göre cotα değeri kaçtır?

A) $2 + \sqrt{3}$ B) $2 - \sqrt{3}$ C) $2 + \sqrt{2}$ D) $1 + \sqrt{3}$ E) $1 - \sqrt{3}$

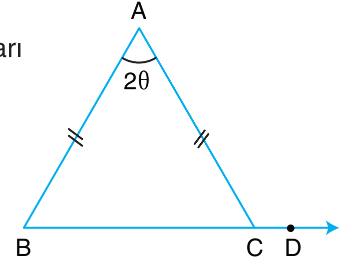
17. ABC üçgen

B, C ve D noktaları doğrusal

$m(\widehat{BAC}) = 2\theta$

$|AB| = |AC|$

$\tan\theta = \frac{7}{13}$



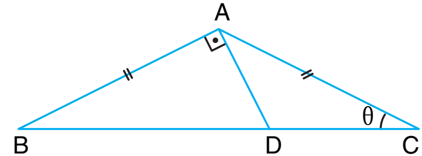
Verilenlere göre $\tan(\widehat{ACD})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{13}{7}$ B) $-\frac{7}{13}$ C) $-\frac{2}{13}$ D) $-\frac{13}{7}$ E) $\frac{7}{13}$

18. tanx + cotx = 3 ise tanx – cotx ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisi **olabilir?**

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

19.



ABC ikizkenar üçgen

$[AD] \perp [AB]$

$|AB| = |AC|$

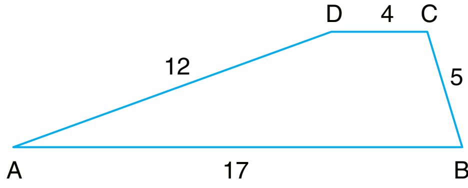
$3.|DC| = |BD|$

$m(\widehat{BCA}) = \theta$

Verilenlere göre sinθ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{5}$

20.



ABCD yamuk

[AB] // [CD]

|AB| = 17 br

|BC| = 5 br

|CD| = 4 br

|AD| = 12 br

Verilenlere göre $\sin(\widehat{DAB})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{17}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{11}{13}$ E) $\frac{12}{13}$

21. $\frac{4\sin x - 3}{7}$ kesrinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı kaçtır?

A) $-\frac{8}{7}$ B) $-\frac{6}{7}$ C) 0 D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{8}{7}$

22. $a = \sin(-40°)$

$b = \cos 228°$

$c = \cos(-131°)$

Verilenlere göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) a < b < c B) a < c < b C) b < a < c

D) b < c < a E) c < b < a

23. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\cot x = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $\sin\left(-\frac{17\pi}{2} + x\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{4}{5}$

24. $\tan 5°.\tan 6° \ldots \tan 85°$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 2

25. Aşağıdakilerden hangisi, cos130° değerine eşit **değildir?**

A) – cos50° B) – sin40° C) sin320°

D) – cos310° E) cos240°

26. $\dfrac{\sin(x-\pi) + \sin\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)}{\cos(6\pi - x).\cot\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)} - \tan\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

27. $\dfrac{\cos(-9\pi + a) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)}{\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right).\tan\left(-\frac{\pi}{2} - a\right)}$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) –tana B) –1 C) –2.sina

D) 2.sina E) 2.cosa

28. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmak üzere

$\frac{1 - \tan x}{\cot x - 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğuna göre

sinx değeri kaçtır?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) –1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. $\dfrac{1 - \cos 120°}{\cos 210° - \tan 300°}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) –1 B) $-\sqrt{3}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

30. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

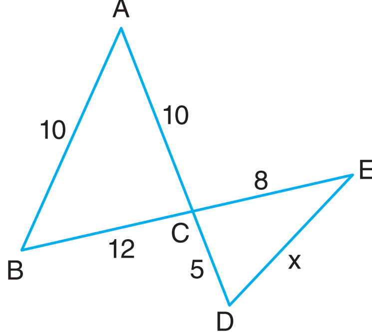
A) 2cotα B) tanα C) 2tan α

D) cotα E) –2tan α

31. $\sin\left(\pi + \arctan\frac{3}{4}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) -1

32.



A, C, D ve B, C, E doğrusaldır.

Yukarıdaki şekilde cm cinsinden verilen kenar uzunluklarına göre x kaç cm dir?

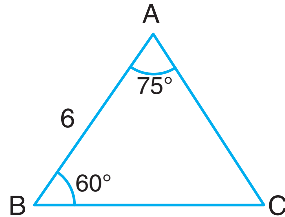
A) $\sqrt{39}$ B) $\sqrt{40}$ C) $\sqrt{41}$ D) $\sqrt{42}$ E) $\sqrt{43}$

33. ABC üçgen

$m(\widehat{BAC}) = 75^\circ$

$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$

$|AB| = 6$ cm



Verilenlere göre |AC| kaç cm dir?

A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) 6 D) $3\sqrt{6}$ E) 9

34. tan(arccosx) ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2.x\sqrt{1-x^2}$

B) $\frac{-2\sqrt{1-x^2}}{2.x^2-1}$

C) $-\frac{2.x}{\sqrt{1-x^2}}$

D) $\frac{2.x}{\sqrt{1-x^2}}$

E) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

35. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3})$

işleminin sonucu, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

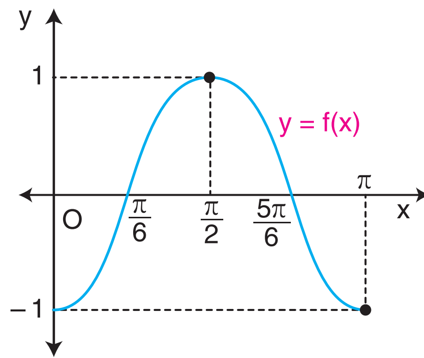
36. $f(x) = 2.\cos^4(3x - 1) + 2$ fonksiyonunun esas periyodu, aşağıdakileden hangisidir?

A) 2π B) $\frac{2\pi}{3}$ C) π D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

37. cos(arccos(2x – 2)) = 2y + 6 olduğuna göre x sayısı, y den kaç fazladır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

38.



[0, π] aralığındaki grafiği yukarıda verilen y = f(x) fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x) = sinx

B) f(x) = sinx – 1

C) f(x) = cosx

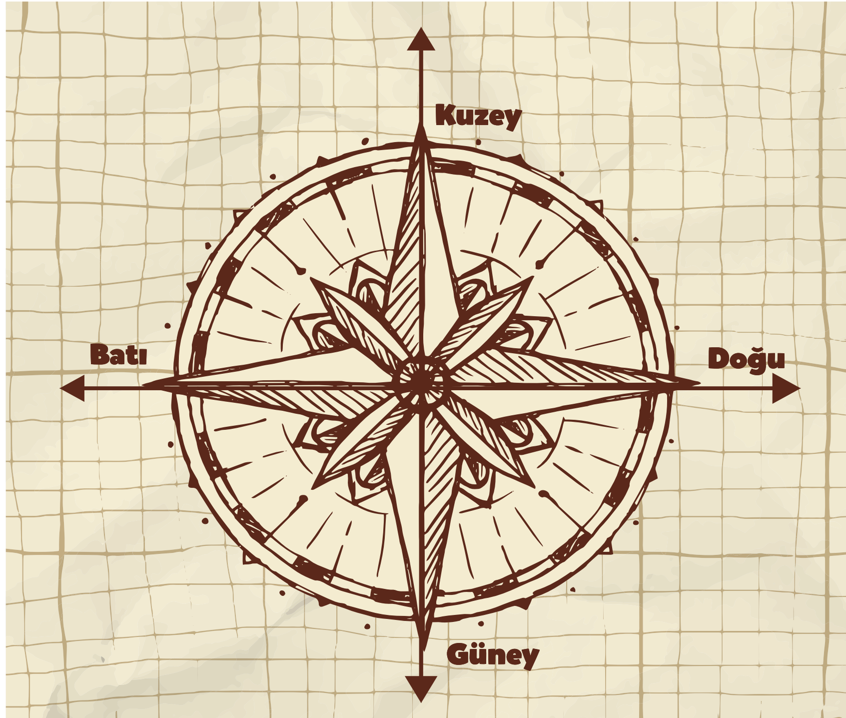
D) f(x) = 2sinx – 1

E) f(x) = 2cosx – 1

2. Alt Öğrenme Alanı: ANALİTİK GEOMETRİ

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

- Analitik düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı veren bağıntıyı elde ederek problemler çözmeniz, bir doğru parçasını belli bir oranda bölen noktanın koordinatlarını hesaplamanız, analitik düzlemde doğruları inceleyerek işlemler yapmanız ve bir noktanın bir doğruya uzaklığını hesaplamanız amaçlanmaktadır.

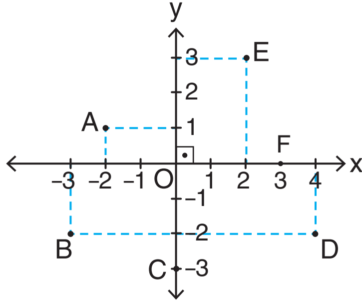


"Herhangi bir konuda yeterince derine dalacak olursanız matematiği bulacaksınız."

Dean Schlicter (Dayn Sılaytır)

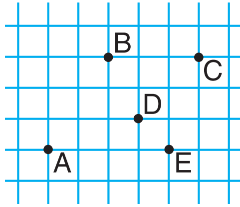
2. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1.



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen A, B, C, D, E ve F noktalarının apsisleri toplamı, ordinatları toplamından kaç fazladır?

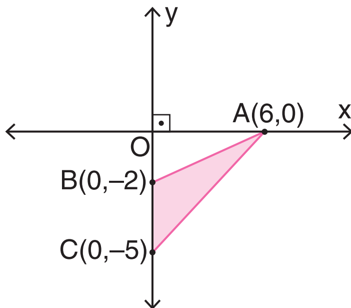
2.



Şekilde birim karelere bölünmüş zemin üzerine noktalar yerleştirilmiştir.

Yukarıda seçilmiş bir orijin noktasına göre E noktasının koordinatları (2, –3) ise A, B, C ve D noktalarının koordinatları ne olur?

3.



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

4. K(7 – m, 9 – 3m) noktası analitik düzlemin IV. bölgesindedir. Buna göre m yerine yazılabilecek tam sayıların toplamı kaçtır?

5. $y + 1 = \frac{x}{3}$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

6. A(a, b) noktası analitik düzlemin II. bölgesinde ise B(2a – b, b – a) noktası hangi bölgededir?

7. $P\left(2a, \frac{b}{2}\right)$ noktası $x + 4y - 6 = 0$ doğrusunun üzerinde ise a ile b arasındaki bağıntıyı bulunuz.

8. P(8 – a, 2a + 4) noktası analitik düzlemin I. bölgesinde ise a nın alabileceği tamsayı değerlerinin çarpımı kaçtır?

2.1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

Düzlemde ya da uzayda bir noktanın yerini belirlemek ve iki veya üç bilinmeyenli denklemlerin çözüm kümelerini bulmak amacıyla ilk çağlardan beri çeşitli yaklaşım tarzları geliştirilmiştir.

Geometrik şekiller, cisimler ve bunların bulundukları sistemde karşılık geldikleri noktaların koordinatlarıyla adlandırılması, analitik geometrinin temellerini oluşturmuştur. Bu yaklaşım tarzını ilk kez sistematik anlamda, 1632 yılında Fransız matematikçisi ve filozofu Rene Descartes (Röne Dekart) (1596-1650) geliştirmiş ve çalışmalarını "La Geometride" adlı kitabıyla yayımlamıştır. Descartes'ın analitik geometriye yaptığı katkılardan dolayı dik koordinat sistemi "Dekart" ismine ithafen "Kartezyen Koordinat Sistemi" adıyla anılmaktadır (Dönmez, 2002; II. cilt, 230).

Rene Descartes

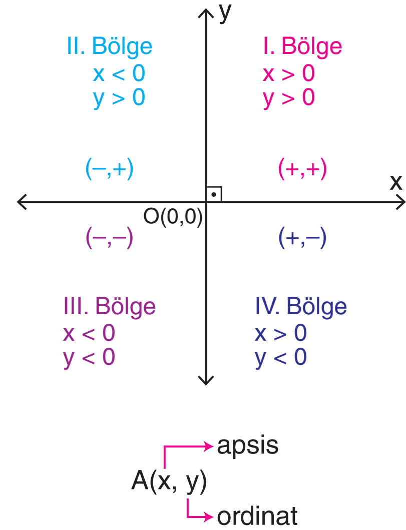
2.1.1. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Hatırlayalım:

Başlangıç noktaları aynı olan iki gerçek sayı doğrusunun dik kesişmesi ile meydana gelen sisteme **dik koordinat sistemi** denir. Dik doğrulardan yatay olanına **apsis ekseni**, düşey olanına **ordinat ekseni** ve doğruların kesim noktasına koordinat sisteminin **başlangıç noktası (orijin)** denir. Yandaki şekilde x doğrusu apsis ekseni, y doğrusu ordinat ekseni ve O(0, 0) başlangıç noktasıdır.

Koordinat sisteminin oluşturduğu düzleme **analitik düzlem** denir. Analitik düzlemde seçilen herhangi bir noktaya bir gerçek sayı ikilisi, her gerçek sayı ikilisine de düzlemin bir noktası karşılık gelir.

Düzlemde alınan bir A noktasının x ekseni üzerindeki görüntüsüne o noktanın **apsisi**, y ekseni üzerindeki görüntüsüne o noktanın **ordinatı**, hem apsis hem de ordinatın oluşturduğu sıralı ikiliye A(x, y) noktasının **koordinatları** adı verilir.



A(x, y) → apsis, ordinat

Eksenler, analitik düzlemi dört bölgeye ayırır.

Burada dikkat edilmesi gereken durum, eksenlerin bölgelere dâhil edilmemiş olmasıdır. Eksen üzerinde bulunan noktalar, bir bölgeye dâhil olmaz.

O hâlde

1. $A = \{(x,y) \mid x.y > 0 \text{ ve } x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesine ait noktalar, I veya III. bölgededir.
2. $B = \{(x,y) \mid x.y < 0 \text{ ve } x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesine ait noktalar, II veya IV. bölgededir.
3. Apsisi sıfır olan noktalar, y ekseni; ordinatı sıfır olan noktalar, x ekseni üzerindedir.

Uygulayalım:

A(3m – 2, m + 3) noktasının apsisi ordinatının 2 katına eşit ise m kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

A noktasının apsisi 3m – 2 ve ordinatı m + 3 olduğundan

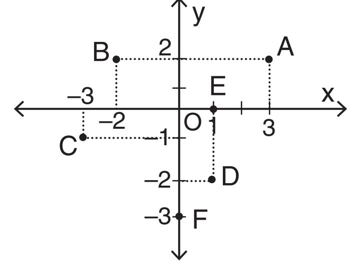
$3m - 2 = 2.(m + 3) \Rightarrow 3m - 2 = 2m + 6 \Rightarrow m = 8$ bulunur.

Uygulayalım:

A(3, 2) , B(–2, 2) , C(–3 . –1) , D(1, –2) , E(1, 0) ve F(0, –3) noktalarını analitik düzlemde gösterelim.

Çözelim:

Noktaların ilk bileşenleri apsis ekseni olan x te, ikinci bileşenleri ordinat ekseni olan y de işaretlenip bu noktaların yatay ve dikey doğrultuları alınır. Tüm noktalar bu şekilde bulunarak yandaki analitik düzlemde gösterilir.



Keşfedelim:

1. Analitik düzlemde A(1, 2) ve B(4, 8) noktaları veriliyor. Bu noktaları analitik düzlemde yerleştiriniz.

2. AB doğru parçasını çizip bu parçanın uzunluğunun A ve B noktalarının koordinatları yardımıyla nasıl bulunması gerektiğini belirleyiniz.

3. Benzer şekilde analitik düzlemde C(–4, 4) ve D(–1, 2) noktaları arasındaki uzaklığın kaç br olduğunu bulunuz.

▶ Buna göre analitik düzlemde herhangi K(a, b) ve L(c, d) noktaları işaretlendiğinde bu noktalar arasındaki uzaklığın nasıl bulunması gerektiğini açıklayınız.

Öğrenelim:

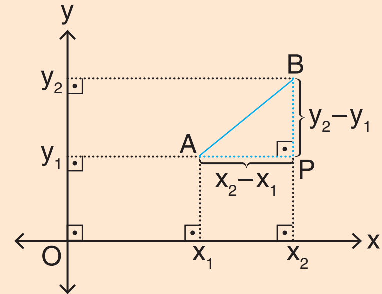
Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun. A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

A ve B noktaları arasındaki uzaklık, **|AB|** biçiminde gösterilir.

Yandaki şekilde görülen APB dik üçgeninde

$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (Pisagor teoreminden)

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dir.



Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(– 2, 9) ve B(3, 6) noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:

$|AB| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (6 - 9)^2} = \sqrt{25 + 9}$ ise

$|AB| = \sqrt{34}$ br dir.

Uygulayalım:

Dik koordinat sisteminde K(–3a , b) ile M(– 2a, 1 + b) noktaları arasındaki uzaklık $\sqrt{37}$ br ise a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$|KM| = \sqrt{(-2a-(-3a))^2+(1+b-b)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \sqrt{37} \Rightarrow (\sqrt{a^2+1})^2 = (\sqrt{37})^2$

$\Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ veya $a = -6$ bulunur.

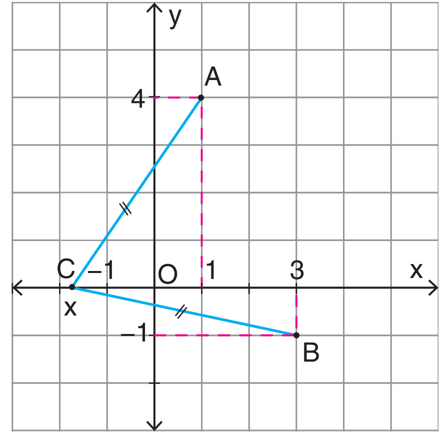
Bu değerlerin toplamı, 6 – 6 = 0 olur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(1, 4) ve B(3, – 1) noktalarına eşit uzaklıkta olup x ekseni üzerinde bulunan noktanın apsisi kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

x ekseni üzerindeki nokta şekildeki C(x , 0) olsun.



$|AC| = |BC|$ olacağından

$(\sqrt{(1-x)^2+(4-0)^2})^2 = (\sqrt{(3-x)^2+(-1-0)^2})^2$

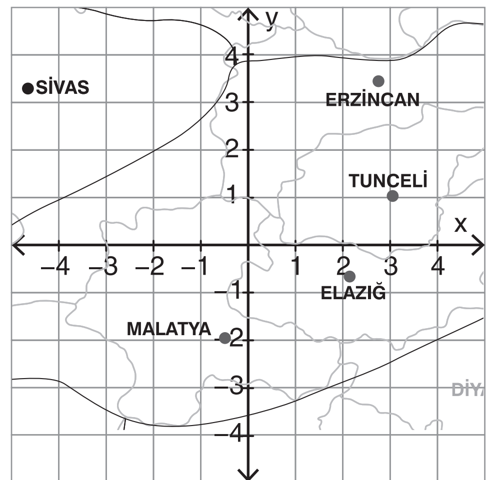
$1 - 2x + x^2 + 16 = 9 - 6x + x^2 + 1$

$4x = -7$

$x = -\frac{7}{4}$ bulunur.

Uygulayalım:

Türkiye haritasını yandaki gibi bir analitik düzleme yerleştirdiğimizde Malatya'nın koordinatları $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ ve Tunceli'nin koordinatları $\left(3, \frac{11}{10}\right)$ olmaktadır. Şeklin bu hâli $\frac{1}{50}$ oranında küçültülmüş ölçekli harita ise bu iller arasındaki uzaklığın gerçekte yaklaşık kaç km olduğunu bulalım.



Çözelim:

$M\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ ve $T\left(3, \frac{11}{10}\right)$ noktaları arası uzaklığı bulalım. $-\frac{1}{2} = -0{,}5$ ve $\frac{11}{10} = 1{,}1$ alalım.

$|MT| = \sqrt{(-0{,}5-3)^2+(-2-1{,}1)^2}$

$= \sqrt{21{,}86} \cong 4{,}68$ olur.

Verilen harita $\frac{1}{50}$ oranında küçültülmüş ise gerçek uzaklık, 4,68 . 50 = 234 km bulunur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları A(x, x – 1), B(1, 2) ve C(2, 3) tür. ABC üçgeni ikizkenar bir üçgen olup |AB| = |AC| ise x kaçtır? Bulalım.

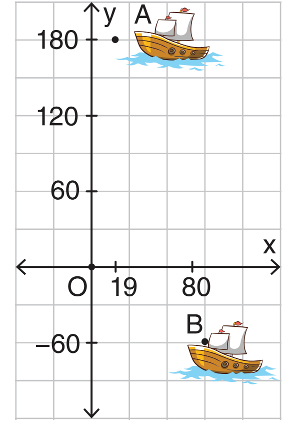
Çözelim:

$|AB| = |AC| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2}$ olur. Yani

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{x^2} - 6x + 9 = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{x^2} - 8x + 16$

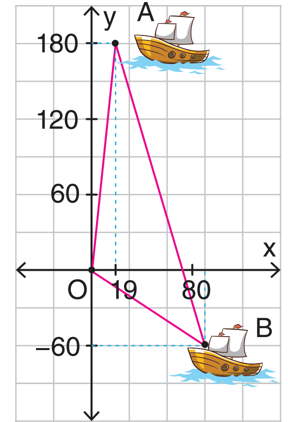
$-8x + 10 = -12x + 20 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ bulunur.

Uygulayalım:



Yanda sahil güvenliğin düzenlediği bir haritalama sistemine ait kroki görülmektedir. Sahil güvenlik, orijinde olmak üzere denizde mahsur kalan iki tekneye ulaşacaktır. Teknelerin bulundukları yere ait koordinatları A(19, 180) ve B(80, –60) tır. Sahil güvenlik önce B teknesine sonra A teknesini ulaşıp yerine geri dönecektir. Sahil güvenliğin gideceği en kısa yolun kaç birim olacağını bulalım.

Çözelim:



Sahil güvenlik önce B deki tekneye ulaşacağına göre O ve B arası en kısa uzaklık Pisagor teoreminden

$|OB|^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow |OB| = 100$ br olur.

A ve B arası en kısa uzaklık için iki nokta arasındaki uzaklıktan

$|AB| = \sqrt{(80 - 19)^2 + (-60 - 180)^2}$

$|AB| = \sqrt{61^2 + 240^2} = \sqrt{3721 + 57600} \cong 247{,}6$ br bulunur.

Daha sonra A ile O arası en kısa uzaklık Pisagor teoreminden

$|OA|^2 = 19^2 + 180^2 \Rightarrow |OA|^2 = 361 + 32400 \Rightarrow |OA| = 181$ br elde edilir.

O hâlde sahil güvenliğin gideceği toplam yol,

$100 + 247{,}6 + 181 = 528{,}6$ br kadardır.

Pekiştirelim:

1. A(m, –2) ve B(–1, 3) noktaları arasındaki uzaklığın 5 br olması için m kaç olmalıdır?
2. E(–2, 5) ve F(4, m) noktaları arasındaki uzaklık 10 br olduğuna göre m sayısının alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?
3. A(m, 4) noktası; B(3, 2) ve C(– 1, 3) noktalarına eşit uzaklıkta olduğuna göre m kaçtır?
4. Koordinatları (90, 92) ve (101, 108) olarak verilen iki yer arası mesafe kaç birimdir?
5. y ekseni üzerinde bulunan bir noktanın A(5, 3) ve B(1, –5) noktalarına olan uzaklıkları eşit olduğuna göre bu noktanın ordinatı kaç olabilir?

2.1.2. Bir Doğru Parçasını Bölen Nokta

Öğrenelim:

Bir doğru parçasını belli bir oranda içten bölen noktanın koordinatlarını hesaplayalım.

$C \in [AB]$ ve $\dfrac{|CA|}{|CB|} = k$ olsun. C noktasına [AB] nı k oranında **içten bölen nokta** adı verilir.

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru üzerinde olan ve bu doğruyu $\dfrac{|AP|}{|PB|} = k$ oranında bölen $P(x_o, y_o)$ noktasının koordinatlarını bulalım.

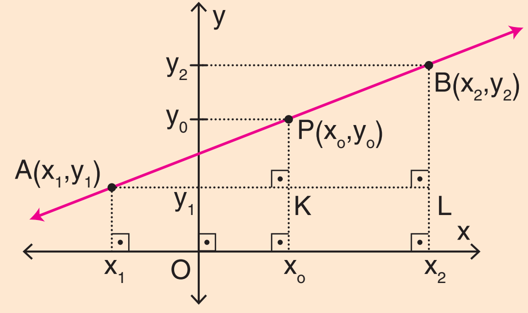
Şekildeki ALB üçgeninde [KP] // [LB] olduğundan temel benzerlik teoremi uygulanabilir.

$|AK| = x_0 - x_1$, $|KL| = x_2 - x_0$ ve $\dfrac{|AP|}{|PB|} = k$ dir.

$\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{|AK|}{|KL|} \Rightarrow \dfrac{k}{1} = \dfrac{x_o - x_1}{x_2 - x_o}$ olur.

$\Rightarrow x_o - x_1 = k.x_2 - k.x_o \Rightarrow x_o + k.x_o = x_1 + k.x_2$

$\Rightarrow \mathbf{x_o = \dfrac{x_1 + k.x_2}{1 + k}}$ bulunur.



Şekilde $\widehat{AKP} \backsim \widehat{ALB}$ dır. $|PK| = y_0 - y_1$ ve

$|BL| = y_2 - y_1$ olduğundan

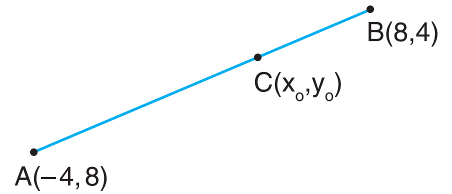
$\dfrac{|PK|}{|BL|} = \dfrac{|AP|}{|AB|} \Rightarrow \dfrac{y_o - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{k}{k+1}$ olur.

$\Rightarrow k.y_0 - k.y_1 + y_0 - y_1 = k.y_2 - k.y_1$

$\Rightarrow k.y_0 + y_0 = y_1 + k.y_2 \Rightarrow \mathbf{y_o = \dfrac{y_1 + k.y_2}{1 + k}}$ bulunur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(– 4, 8) ve B(8, 4) noktaları veriliyor. $C \in [AB]$ olmak üzere $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{1}{3}$ ise C noktasının koordinatları nedir? Bulalım.



Çözelim:

C noktası, A ile B arasındadır. Buna göre C noktası, içten bölen bir noktadır. $k = \dfrac{|AC|}{|BC|} = 3$ tür.

$x_0 = \dfrac{x_1 + k.x_2}{1 + k} \Rightarrow x_0 = \dfrac{-4 + 3.8}{1 + 3} \Rightarrow x_0 = 5$ olur.

$y_o = \dfrac{y_1 + k.y_2}{1 + k} \Rightarrow y_o = \dfrac{8 + 3.4}{1 + 3} \Rightarrow y_o = 5$ olur.

Buradan C(5, 5) bulunur.

Uygulayalım:

A(–2, 3) ve B(3, –7) noktaları verilmiştir. C ∈ [AB] ve $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{3}{2}$ olacak şekilde AB doğru parçasını içten bölen nokta $C(x_0, y_0)$ olsun. C nin koordinatları nedir? Bulalım.

Çözelim:

Farklı yollarla istenen C noktasını bulalım.

1. Yol: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ ve $k = \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{3}{2}$ olduğundan

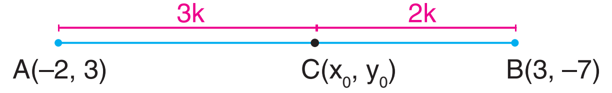
A(–2, 3)
3k
$C(x_0, y_0)$
2k
B(3,–7)

$$x_0 = \frac{-2 + \frac{3}{2} \cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \text{ bulunur.}$$

$y_1 = 3$, $y_2 = -7$ ve $k = \frac{3}{2}$ olduğundan

$$y_0 = \frac{3 + \frac{3}{2} \cdot (-7)}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = -3 \text{ bulunur.}$$

O hâlde C(1, –3) tür.



2. Yol: A, B ve C noktalarını ve aralarındaki uzaklık ilişkisini temsil eden yandaki doğru parçasını ele alalım.

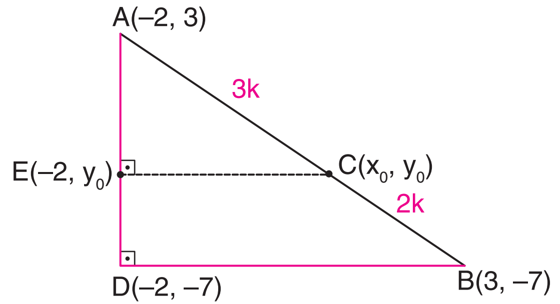
A nın apsisinden B nin apsisine 3 – (–2) = 5 lik bir artış vardır. O hâlde 3k + 2k = 5 ise k = 1 bulunur. Bu durumda C noktasının apsisi A noktasının apsisinden 3 br fazla olacaktır. Yani $x_0 = -2 + 3 = 1$ olmalıdır.

Benzer düşünceyle A nın ordinatından B nin ordinatına –7 – 3 = –10 luk bir düşüş olacaktır. Bu durumda 3k + 2k = –10 ⇒ k = –2 bulunur. O hâlde C noktasının ordinatı A noktasının ordinatından 3.(–2) = –6 az olacaktır. Buradan $y_0 = 3 - 6 = -3$ bulunur.

İstenen C noktasının koordinatları, C(1, –3) olur.

3. Yol: A ve B noktalarından çizilen dikmelerin kesişim noktası D, C noktasından [DB] na paralel çizilen E ∈ [AB] işaretleyelim. Bu durumda D(–2, –7) ve $E(-2, y_0)$ olacaktır.

$\widehat{AEC} \sim \widehat{ADB}$ benzerliğinden



$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|EC|}{|DB|}$ yazarsak

$$\frac{3 - y_0}{3 - (-7)} = \frac{3k}{5k} = \frac{x_0 + 2}{3 - (-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3 - y_0}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow y_0 = -3$$

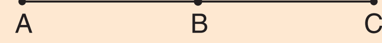
$$\frac{3}{5} = \frac{x_0 + 2}{5} \Rightarrow x_0 = 1 \text{ bulunur.}$$

O hâlde C(1, –3) elde edilir.

Öğrenelim:

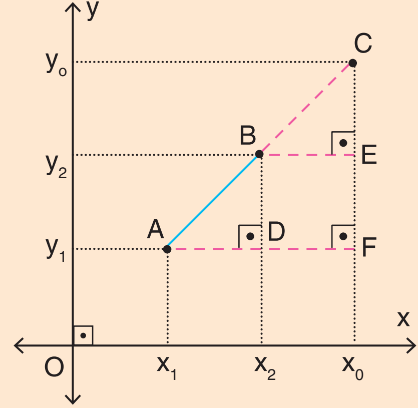
Bir doğru parçasını belli bir oranda dıştan bölen noktanın koordinatlarını bulalım.

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin.



$C \notin [AB]$ ve $\dfrac{|CA|}{|CB|} = n$ olsun. C noktasına [AB] nı n oranında **dıştan bölen nokta** adı verilir.

$C \notin [AB]$ ve $\dfrac{|CA|}{|CB|} = k \ (k \in \mathbb{R}^+)$ olacak şekilde AB doğru parçasını dıştan bölen nokta, $C(x_0, y_0)$ olsun. Yandaki analitik düzlemde $\widehat{ACF} \sim \widehat{BCE}$ ise $\dfrac{|CA|}{|CB|} = \dfrac{|FA|}{|EB|} = \dfrac{|CF|}{|CE|}$ olur.



$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|FA|}{|EB|} \Rightarrow k = \frac{x_o - x_1}{x_o - x_2}$$

$\Rightarrow k.x_o - k.x_2 = x_o - x_1 \Rightarrow x_o(1-k) = x_1 - k.x_2$ olur.

Yani $\mathbf{x_o = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k}}$ bulunur.

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|CF|}{|CE|} \Rightarrow k = \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2}$$

$\Rightarrow k.y_o - k.y_2 = y_o - y_1 \Rightarrow y_o(1-k) = y_1 - k.y_2$

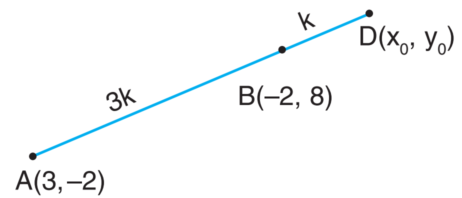
Yani $\mathbf{y_o = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k}}$ bulunur.

Uygulayalım:

A(3, –2) ve B(–2, 8) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını $\dfrac{|DA|}{|DB|} = 4$ oranında dıştan bölen D noktasının koordinatları nedir? Bulalım.

Çözelim:

1. Yol:



$D(x_o, y_o)$ olsun. $k = \dfrac{|DA|}{|DB|} = 4$ tür.

$x_1 = 3$, $x_2 = -2$ ve $k = 4$ olduğundan

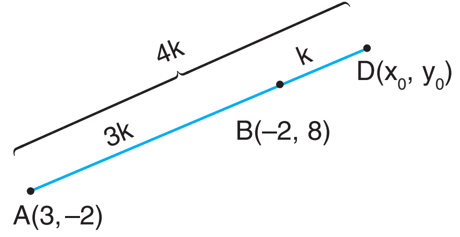
$$x_0 = \frac{3 - 4.(-2)}{1-4} = \frac{3+8}{-3} = -\frac{11}{3} \text{ bulunur.}$$

$y_1 = -2$, $y_2 = 8$ ve $k = 4$ olduğundan

$$y_0 = \frac{-2 - 4.8}{1-4} = \frac{-34}{-3} = \frac{34}{3} \text{ bulunur.}$$

O hâlde $D\left(-\dfrac{11}{3}, \dfrac{34}{3}\right)$ olur.

2. Yol: A, B ve D noktaları aralarındaki uzaklık ilişkisini temsil eden yandaki doğru paçasını ele alalım.



A nın apsisinden B nin apsisine 3 – (–2) = 5 lik bir azalış olduğuna göre $3k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$ bulunur. Bu durumda D noktasının apsisi B noktasının apsisinin k birim eksiği yani $x_0 = -2 - \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$ bulunur.

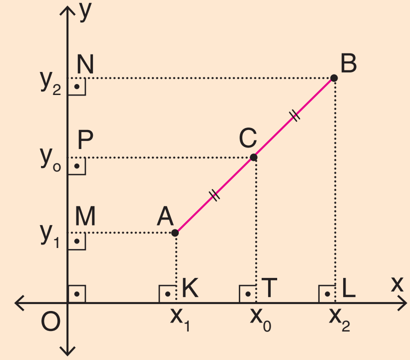
Benzer şekilde A nın ordinatından B nin ordinatına 8 – (–2) = 10 luk bir artış vardır.

Buradan $3k = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{3}$ olur. O hâlde D noktasının ordinatı B nin ordinatından $k = \frac{10}{3}$ fazla olacaktır. Yani $y_0 = 8 + \frac{10}{3} = \frac{34}{3}$ bulunur.

O hâlde istenen D noktasının koordinatları, $\left(-\frac{11}{3}, \frac{34}{3}\right)$ olur.

Öğrenelim:

Analitik düzlemde uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan doğru parçasının orta noktası $C(x_o, y_o)$ olsun.



Şekilde [CT]; AKLB dik yamuğunda orta taban olduğundan $y_o = \frac{y_1 + y_2}{2}$ dir.

[CP], AMNB dik yamuğunda orta tabandır. Buna göre

$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}$ dir.

O hâlde $C(x_o, y_o) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ bulunur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(a, 12) ve B(6 – a, – 4) ise [AB] nın orta noktasının koordinatlarnı bulalım.

Çözelim:

[AB] nın orta noktası C olsun. $C(x_0, y_0)$ ise

$$x_0 = \frac{a + (6 - a)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ve } y_0 = \frac{12 + (-4)}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde C(3, 4) olur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(8, –3) ve B(–2, –5) ise [AB] nın orta noktasının orijine uzaklığı kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:

[AB] nın orta noktası C olsun. $C\left(\frac{8 + (-2)}{2}, \frac{-3 + (-5)}{2}\right) = C(3, -4)$ tür.

C nin orijine uzaklığı, $|OC| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = 5$ br dir.

Uygulayalım:

A(–3, b) ve B(a, –1) noktalarının orta noktası C(–1, 4) ise a.b kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$$\frac{-3+a}{2} = -1 \Rightarrow -3 + a = -2 \Rightarrow a = 1 \text{ dir.}$$

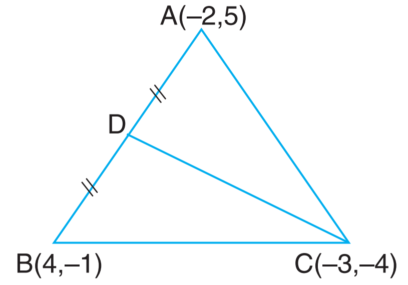
$$\frac{b-1}{2} = 4 \Rightarrow b - 1 = 8 \Rightarrow b = 9 \text{ dur.}$$

Dolayısıyla a.b = 1.9 = 9 bulunur.

Uygulayalım:

A(–2,5) ,B(4, –1) ve C(–3, –4) noktalarını köşe kabul eden ABC üçgeninin AB kenarına ait kenarortayının uzunluğu kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:



Şekil incelendiğinde |AD| = |DB| olduğundan istenen değerin |CD| olduğu görülür.

Öncelikle A ve B noktalarının orta noktası olan D nin koordinatlarını bulalım.

$$D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = D(1,2) \text{ olduğundan}$$

$$|CD| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-(-4))^2}$$

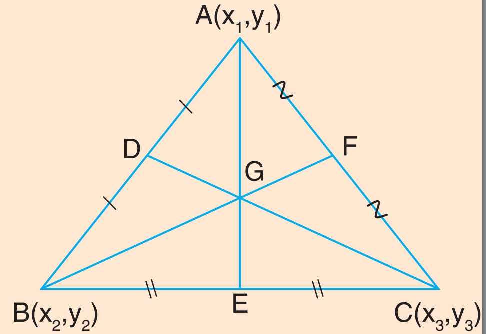
$$= \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13} \text{ br bulunur.}$$

Öğrenelim:

Köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan üçgenin ağırlık merkezi $G(x_o, y_o)$ ise G nin koordinatları,

|EB| = |EC| ve |AG| = 2.|GE| den yararlanılarak

$$x_o = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ ve } y_o = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ bulunur.}$$



Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(7, 2), B(–5, 5) ve C(1, 5) noktalarının oluşturduğu ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

Çözelim:

ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olsun.

Bu durumda

$$G\left(\frac{7+(-5)+1}{3}, \frac{2+5+5}{3}\right) = G(1, 4) \text{ olur.}$$

Uygulayalım:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ve $D(x_4, y_4)$ noktaları bir ABCD paralelkenarın köşe noktaları ise $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ve $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ olduğunu gösterelim.

Çözelim:

ABCD paralelkenarında $[AC] \cap [BD] = \{O\}$ olsun.

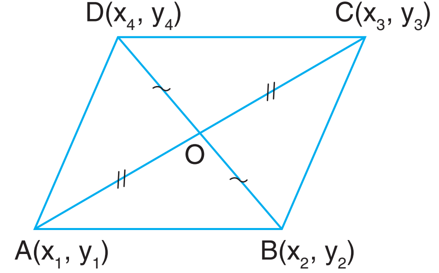
Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalandığından

$|OA| = |OC|$ ve $|OB| = |OD|$ dur.

O noktası, $[AC]$ ve $[BD]$ nın orta noktasıdır. Buna göre

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ ve}$$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} \Rightarrow y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \text{ bulunur.}$$



Dikkat Edelim!

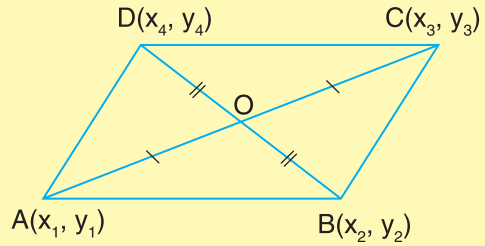
Köşegenleri birbirini ortalayan dörtgenlerde karşılıklı köşelerin apsisleri toplamı ile karşılıklı köşelerin ordinatları toplamı kendi aralarında eşittir. Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare bu özelliği sağlar.

Köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ve $D(x_4, y_4)$ olan yandaki ABCD dörtgeninde köşegenler birbirini ortalamışsa yani

$|AO| = |CO|$ ve $|BO| = |OD|$ ise

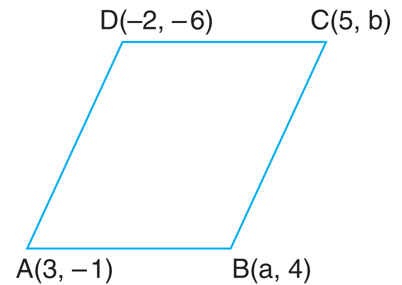
$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ve

$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ tür.



Uygulayalım:

Şekilde ABCD paralelkenardır. Verilen bilgilere göre a + b kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

ABCD paralelkenar olduğundan paralelkenarın karşılıklı köşelerinin apsisleri toplamı ile ordinatları toplamı kendi içinde eşit olmalıdır.

$a - 2 = 5 + 3$ $\qquad -6 + 4 = -1 + b$

$a = 10$ ve $b = -1$ olduğundan

$a + b = 10 - 1 = 9$ bulunur.

Pekiştirelim:

1. A(4, 1) ve B(2, 3) noktalarının orta noktasının koordinatlarını bulunuz.

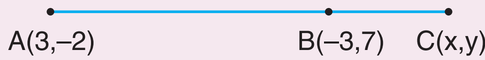
2. C(3, 4) ve D(x, – 2) noktalarının orta noktası E(6, y) olduğuna göre x + y kaçtır?

3. Köşeleri A(1, – 2), B(4, 3) ve C(– 2, 5) olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

4. A(3 , 5) , B(4 , 7) , C(x , y) ve D(– 1, 4) noktaları ABCD paralelkenarının köşeleri ise x + y kaçtır?

5. Uç noktalarının koordinatları A(3a – 1, 4) ve B(7, 2b + 8) olan [AB] nın orta noktası, C(6 , 6) dır. Buna göre a – b kaçtır?

6. Aşağıdaki şekilde |AC| = 4.|BC| olduğuna göre C(x, y) noktasının koordinatlarını bulunuz.



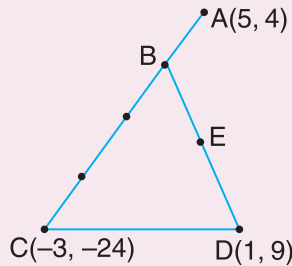
7. A, B ve C noktaları doğrusaldır. A(2, – 5), B(8, 37) ve |AB| = 3.|AC| olduğuna göre C noktasının koordinatları neler olabilir?

8. Şekilde A(5, 4), C(– 3, –24) ve D(1, 9) noktaları veriliyor.

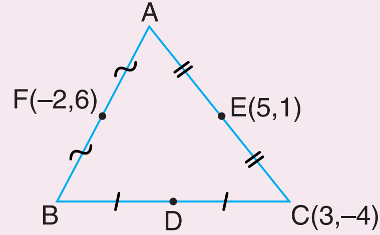
|AC| = 4.|BA|

|BD| = 2.|ED|

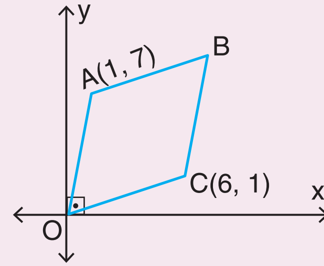
olduğuna göre E noktasının koordinatları toplamı kaçtır?



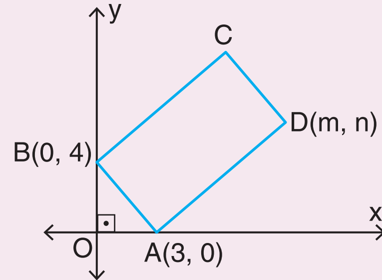
9. Aşağıdaki ABC üçgeninde verilenlere göre D noktasının koordinatları toplamı kaçtır?



10. Aşağıdaki şekilde OABC paralelkenardır. B noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

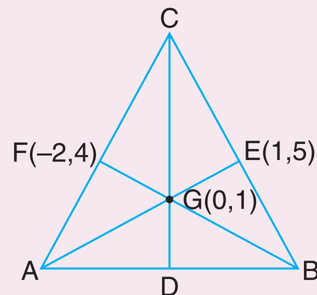


11.



A(3, 0), B(0, 4), C ve D(m, n) noktaları; ABCD dikdörtgeninin köşe koordinatlarıdır. |AD| = 10 br olduğuna göre m + n nin değeri kaçtır?

12. Aşağıdaki şekilde ABC üçgeninin ağırlık merkezi G dir. Verilenlere göre bu üçgenin köşe noktalarının koordinatlarını bulunuz.



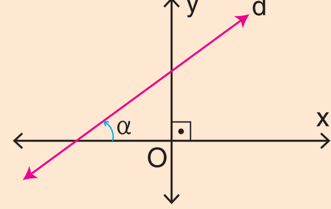
2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

Öğrenelim:

Analitik düzlemde verilen bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya (sağ tarafta kalan açı) doğrunun **eğim açısı**, bu açının tanjant değerine ise doğrunun **eğimi** adı verilir. Bir d doğrusunun eğimi genelde **m** harfi ile gösterilir ve **m = tan** α dır.

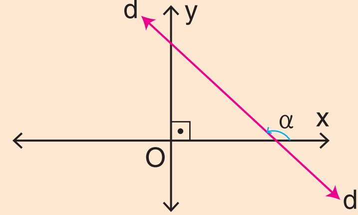
1. $0° < \alpha < 90°$ ise $m = \tan\alpha > 0$ olur.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi d doğrusunun eğim açısı dar ise doğrunun eğimi pozitiftir.



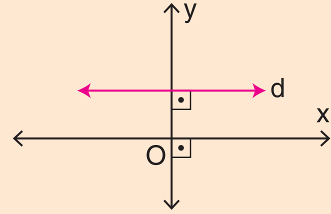
2. $90° < \alpha < 180°$ ise $m = \tan\alpha < 0$ olur.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi d doğrusunun eğim açısı geniş ise doğrunun eğimi negatiftir.



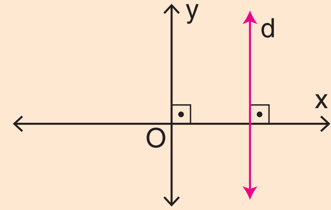
3. $d \perp Oy$ ise $\alpha = 0°$ ve $m = \tan 0° = 0$ olur.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi d doğrusunun eğim açısı 0° ise doğrunun eğimi 0 dır.



4. $d \perp Ox$ ve $\alpha = 90°$ ise $m = \tan 90° =$ tanımsız olur.

d doğrusunun eğim açısı 90° ise doğrunun eğimi tanımsızdır.



Dikkat Edelim!

Bir doğrunun eğimi, doğrunun x ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı açının tanjantı olarak ifade edilir. Bazı özel geniş açılara ait tanjant değerleri;

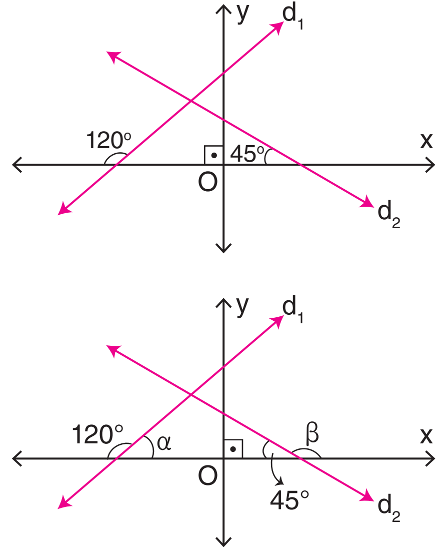
$\tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$,

$\tan 135° = -\tan 45° = -1$,

$\tan 150° = -\tan 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tür.

Uygulayalım:

Şekilde verilen d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

d_1 doğrusu için eğim açısı, α ve $\alpha = 180° - 120° = 60°$ dir.

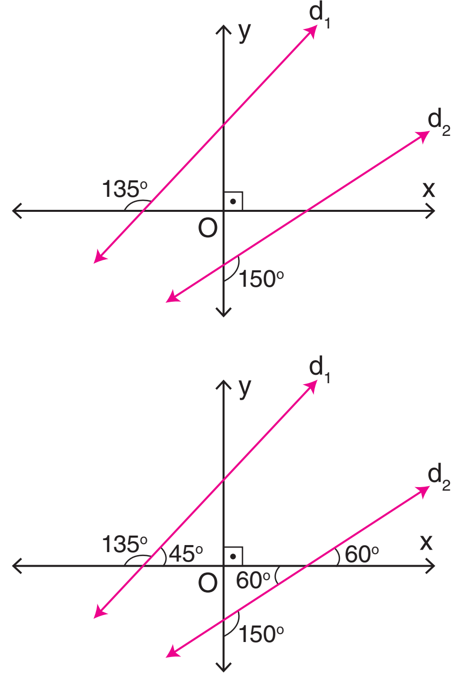
d_1 doğrusunun eğimi, $m_1 = \tan 60° = \sqrt{3}$ tür.

d_2 doğrusu için eğim açısı, β ve $\beta = 180° - 45° = 135°$ dir.

d_2 doğrusunun eğimi, $m_2 = \tan 135° = -1$ dir.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde grafikleri yanda verilen d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri çarpımı kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

Doğrunun x ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı açının tanjantı eğimi olacaktır.

d_1 in eğimi, $\tan 45° = 1$ ve

d_2 nin eğimi, $\tan 60° = \sqrt{3}$ tür.

O hâlde doğruların eğimler çarpımı, $\sqrt{3}$ tür.

Dikkat Edelim!

1. Doğru x eksenine paralel ise $\alpha = 0°$ dir.
   $\tan 0° = 0$ olduğundan doğrunun eğimi 0 olur.
2. Doğru x eksenine dik ise $\alpha = 90°$ dir.
   $m = \tan 90°$ olduğundan doğrunun eğimi tanımsızdır.

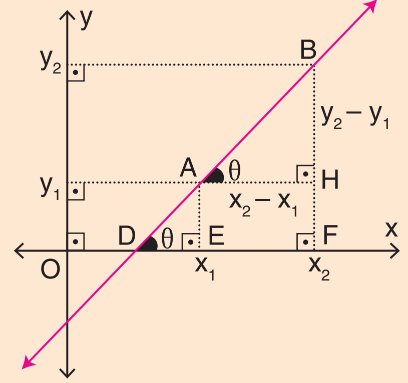
Öğrenelim:

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısı θ ise yandaki şekilde $m(\widehat{BDF}) = \theta$ dır.

BAH ve BDF yöndeş açılar oldukları için $m(\widehat{BAH}) = \theta$ dır. ABH dik üçgeninde θ nın tanjantı bulunursa

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ olur.}$$

d doğrusunun eğimi olan m değeri $\tan\theta$ ya eşit olduğundan $m = \mathbf{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ olur.



Uygulayalım:

A(2, –1) ve B(5, 3) noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ bulunur.}$$

$$= \frac{3 - (-1)}{5 - 2} = \frac{4}{3}$$

Uygulayalım:

A(–1, 3) ve B(2, 0) noktalarından geçen doğrunun eğim açısı kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1 \text{ bulunur.}$$

$m = \tan\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$ olacağından

doğrunun eğim açısı, 135° dir.

Uygulayalım:

A(8, 2) ve B(–4, b) noktalarından geçen doğrunun eğimi $-\frac{1}{4}$ ise b kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

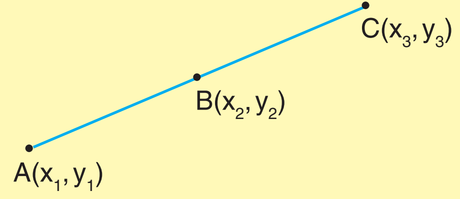
$$m = \frac{b - 2}{-4 - 8} = \frac{b - 2}{-12} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow b - 2 = 3$ ve $b = 5$ bulunur.

Dikkat Edelim!

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ve $C(x_3,y_3)$ noktalarının doğrusal olması için

$m_{AB} = m_{BC}$ ve $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ olmalıdır.



Uygulayalım:

A(2, –1), B(3 , 2) ve C(5 , b) noktaları aynı doğru üzerinde (doğrusal) ise b sayısı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

$m_{AB} = m_{BC}$ olmalıdır.

$$\frac{2-(-1)}{3-2} = \frac{b-2}{5-3} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{b-2}{2} \Rightarrow b = 8 \text{ dir.}$$

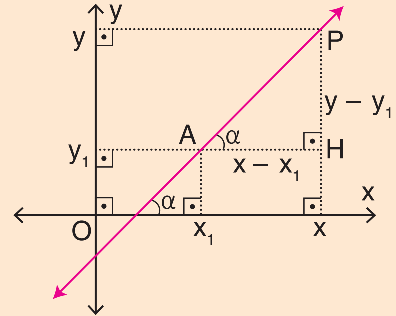
Öğrenelim:

Bir d doğrusunun üzerindeki herhangi bir nokta, A(x, y) noktası olsun. x ve y arasındaki bağıntıya bu **doğrunun denklemi** adı verilir. Bir doğrunun eğimi ve herhangi bir noktası belliyken veya herhangi iki noktası belliyken bu doğrunun denklemine ulaşılabilir.

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemini bulalım. Doğru üzerinde değişken bir P(x,y) noktası alalım. Şekildeki PAH dik üçgeninde

$\tan\alpha = m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ olacağından

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçip eğimi m olan doğrunun denklemi, $\mathbf{y - y_1 = m.(x - x_1)}$ ile bulunur.



Uygulayalım:

A(–2 , 3) noktasından geçip eğimi –2 olan doğrunun denklemi nedir? Bulalım.

Çözelim:

$m = -2$ ve $A(\underset{x_1}{-2}, \underset{y_1}{3})$ tür.

$y - y_1 = m.(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2.(x - (-2))$

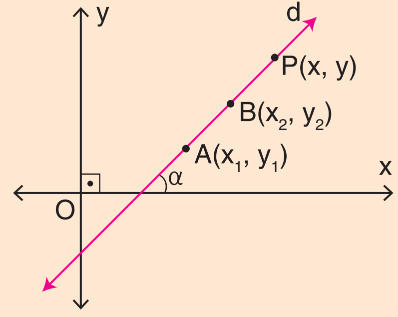
$\Rightarrow y - 3 = -2x - 4 \Rightarrow y + 2x + 1 = 0$ doğrunun denklemi olur.

Öğrenelim:

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemine ulaşalım. d doğrusu üzerinde $P(x, y)$ değişken bir nokta olmak üzere P, B ve A noktaları doğrusal olduğundan $m_{PA} = m_{AB}$ olmalıdır.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ orantısından

d doğrusunun denklemine ulaşılır.



Uygulayalım:

A(3 , –2) ve B(–1 , 3) noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir? Bulalım.

Çözelim:

$$\frac{y-(-2)}{x-3} = \frac{3-(-2)}{-1-3} \Rightarrow \frac{y+2}{x-3} = \frac{5}{-4}$$

$\Rightarrow -4y - 8 = 5x - 15 \Rightarrow 5x + 4y - 7 = 0$ doğrunun denklemi olur.

Öğrenelim:

$ax + by + c = 0$ denklemi, doğrunun **kapalı denklem**idir. Bu doğruyu **açık denkleme** dönüştürürsek $(b \neq 0)$,

$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ve buradan

$m = -\frac{a}{b}$ ifadesi, doğrunun eğimi olur.

$n = -\frac{c}{b}$ ise doğrunun açık denklemi $\mathbf{y = mx + n}$ biçiminde ifade edilir.

Aşağıdaki doğru denklemi ve eğim eşleştirmelerini inceleyiniz.

a. $y = 3x - 2 \Rightarrow m = 3$

b. $2y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

c. $y = 5 - 4x \Rightarrow m = -4$

ç. $5y + 20x - 11 = 0 \Rightarrow m = -\frac{20}{5} = -4$

d. $5y = -4x + 6 \Rightarrow m = \frac{-4}{5}$

Uygulayalım:

$(2a - 1)x + (5a + 3)y - 11 = 0$ doğrusunun eğim açısının ölçüsü 135° ise a sayısı kaçtır? Bulalım.

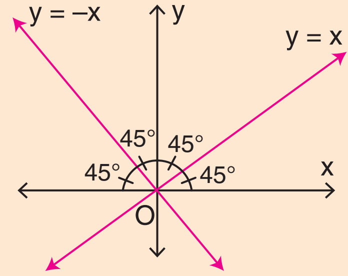
Çözelim:

$m = \tan 135° = -1 \Rightarrow -\frac{2a-1}{5a+3} = -1 \Rightarrow 2a - 1 = 5a + 3$

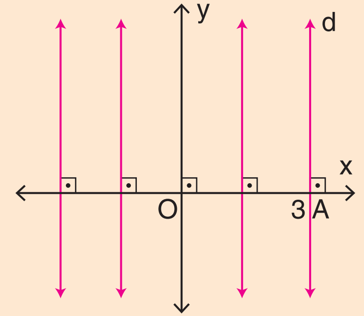
$\Rightarrow -4 = 3a \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$ olarak bulunur.

Öğrenelim:

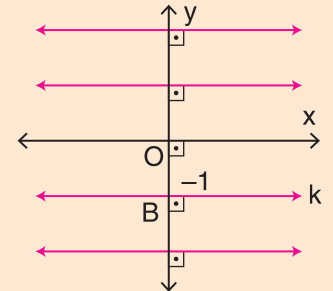
Doğrunun açık denklemi olan y = mx + n ifadesinde eğim m, doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi, $-\frac{n}{m}$ ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı n dir.



y = m.x doğruları, başlangıç noktasından geçen ve eğimi m olan doğrulardır. Özel olarak y = x doğrusu **I. açıortay** ve y = – x doğrusu **II. açıortay** adını alır. Yandaki şekilde bu doğrular görülmektedir.



x eksenine dik ve y eksenine paralel olan doğruların genel denklemi, **x = a** şeklinde olup eğimleri tanımsızdır. Yandaki şekilde x = 3 denklemine sahip d doğrusu, A(3, 0) noktasında x eksenine dik olup y eksenine paraleldir.



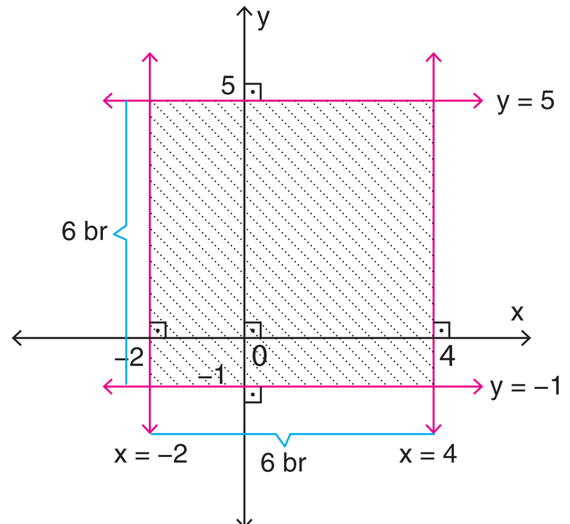
y eksenine dik ve x eksenine paralel olan doğruların genel denklemi, **y = b** şeklinde olup eğimleri sıfırdır. Yandaki şekilde y = –1 denklemine sahip k doğrusu, y eksenine B(0, –1) noktasında dik olup x eksenine paraleldir.

Uygulayalım:

x = –2, x = 4, y = –1 ve y = 5 doğruları tarafından sınırlanan dörtgenin alanı kaç br^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

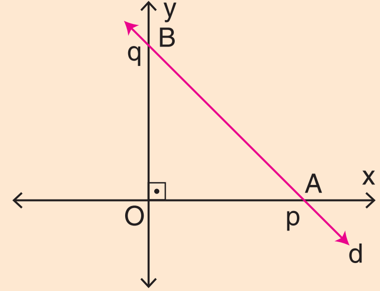
Verilenlere uygun çizim yandaki gibidir. Oluşan dörtgen, bir kare olup kenar uzunluğu 6 br dir. Alanı, 6.6 = 36 br^2 olarak bulunur.



Öğrenelim:

Eksenleri kesen bir doğrunun denklemini bulalım. Bunun için ax + by + c = 0 denkleminde c, eşitliğin sağ tarafına atılır ve her iki taraf – c ye bölünürse

$ax + by = -c \Rightarrow \dfrac{x}{-\frac{c}{a}} + \dfrac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ bulunur.



$-\frac{c}{a} = p$ ve $-\frac{c}{b} = q$ alınırsa $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ elde edilir.

Dikkat edilirse $p = -\frac{c}{a}$ değeri, doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi ve $q = -\frac{c}{b}$ değeri de doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır.

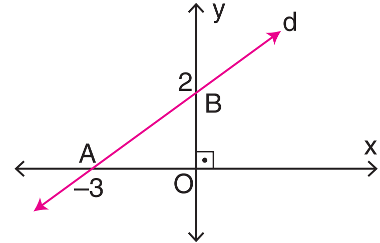
Yani herhangi bir d doğrusu x eksenini A(p, 0) noktasında ve y eksenini B(0, q) noktasında kesiyorsa d doğrusunun denklemi, $\mathbf{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ dir.

Dikkat Edelim!

Yukarıdaki bağıntı kullanılmadan iki noktası bilinen doğru denkleminde A(p , 0) ve B(0 , q) noktaları kullanılarak aranan doğrunun denklemi bulunabilir.

Uygulayalım:

Şekildeki d doğrusunun denklemi nedir? Bulalım.



Çözelim:

1. Yol:

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$ eşitliğinden d doğrusunun denklemi,

2x – 3y + 6 = 0 bulunur.

2. Yol:

d doğrusu, A(–3, 0) ve B(0, 2) noktalarından geçen doğrudur.

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{2-0}{0-(-3)} \Rightarrow \frac{y-2}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y - 6 = 2x$$

$\Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$ bulunur.

Öğrenelim:

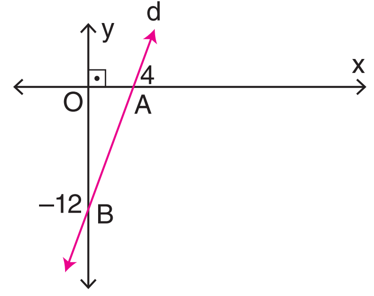
Bir doğru üzerindeki bütün noktaların birleştirilmesi ile ortaya çıkan şekle **doğrunun grafiği** denir.

Bir doğru farklı iki noktayla belirleneceğinden doğrunun grafiğini çizmek için herhangi iki noktasının bilinmesi yeterlidir. Bu noktalar analitik düzlemde işaretlenerek grafik çizilir. Bu iki noktanın genellikle doğrunun eksenleri kestiği noktalar olması istenir.

Doğrunun grafiğini çizmek istediğimizde x = 0 için y, y = 0 için x değerleri bulunur. A(0,y) ve B(x,0) noktaları analitik düzlemde gösterilip bu noktalar birleştirilerek çizim tamamlanır.

Uygulayalım:

Denklemi y = 3x – 12 olan d doğrusunun grafiğini çizelim.



Çözelim:

y = 3x – 12 denklemi ile verilen doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$y = 0 \Rightarrow x = 4$ olduğundan verilen doğru, x eksenini A (4, 0) noktasında,

$x = 0 \Rightarrow y = -12$ olduğundan y eksenini B(0, –12) noktasında keser.

A ve B noktaları birleştirilip yandaki doğru grafiğine ulaşılır.

Dikkat Edelim!

a ve b sıfırdan farklı ise ax + by + c = 0 denklemi ile verilen doğru için

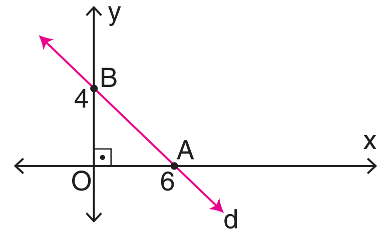
$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$ yani $A\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ ve

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ yani $B\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ bulunur.

A ve B noktaları analitik düzlemde işaretlenip birleştirilerek doğrunun grafiği çizilmiş olur.

Uygulayalım:

2x + 3y – 12 = 0 denklemi ile verilen doğrunun grafiğini çizelim.



Çözelim:

$x = 0 \Rightarrow 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ yani B(0, 4) ve

$y = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$ yani A (6, 0) olur.

A ve B noktaları birleştirilerek yanda görülen d doğrusunun grafiğine ulaşılır.

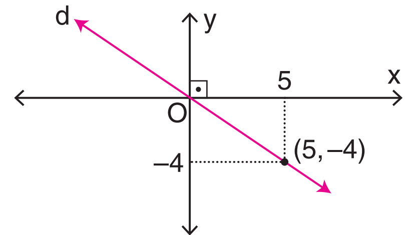
Dikkat Edelim!

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $c = 0$ olduğu durumda doğrunun kapalı denklemi, ax + by = 0 olur.

$y = -\frac{ax}{b}$ denklemi, eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olup orijinden geçen doğruları gösterir.

Uygulayalım:

4x + 5y = 0 denklemi ile verilen doğrunun grafiğini çizelim.



Çözelim:

Verilen doğrunun denklemi $y = -\frac{4x}{5}$ biçiminde yazıldığında bu doğru, başlangıç noktasından geçer. Bu doğru üzerindeki herhangi bir nokta, x = 5 için y = – 4 noktasıdır.

Yani doğru (5, –4) noktasından geçer.

Doğrunun eğimi, $-\frac{4}{5}$ olup grafiği yandaki gibidir.

Dikkat Edelim!

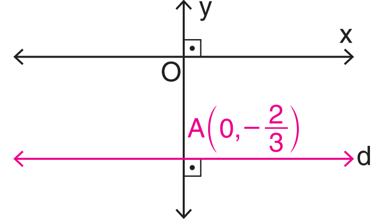
a = 0 , b ≠ 0 ve c ≠ 0 olduğu durumda doğrunun kapalı denklemi, by + c = 0 olur. $y = -\frac{c}{b}$ olup bu doğru, $A\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ noktasından geçen doğrudur. Bu tarz doğrular, y eksenine dik ve x eksenine paralel durumludur.

Uygulayalım:

3y + 2 = 0 denklemi ile verilen d doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Doğru denklemi, $y = -\frac{2}{3}$ olarak yazılabilir. Bu doğru, ordinatı $-\frac{2}{3}$ olan noktada y eksenine dik ve x eksenine paralel durumlu olan yandaki d doğrusudur.



Dikkat Edelim!

a ≠ 0 , b = 0 ve c ≠ 0 olduğu durumda doğrunun kapalı denklemi,

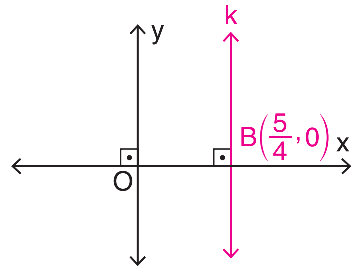
ax + c = 0 olur. $x = -\frac{c}{a}$ olup bu doğru, $B\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ noktasından geçen doğrudur. Bu tarz doğrular, x eksenine dik ve y eksenine paralel durumludur.

Uygulayalım:

−4x + 5 = 0 denklemi ile verilen k doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Doğru denklemi, $x = \frac{5}{4}$ olarak yazılabilir. Bu doğru apsisi, $\frac{5}{4}$ olan noktada x eksenine dik ve y eksenine paralel durumlu olan yandaki k doğrusudur.



Dikkat Edelim!

1. a = 0 , b ≠ 0 ve c = 0 olduğu durumda doğrunun kapalı denklemi,

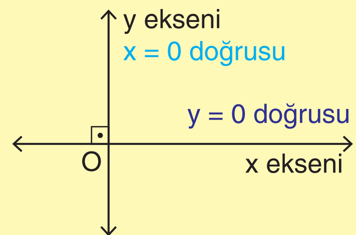
b.y = 0 veya y = 0 olur.

Bu doğrunun grafiği, x eksenidir.

2. a ≠ 0 , b = 0 ve c = 0 olduğu durumda doğrunun kapalı denklemi,

a.x = 0 veya x = 0 olur.

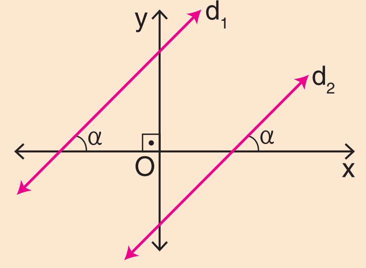
Bu doğrunun grafiği, y eksenidir.



Öğrenelim:

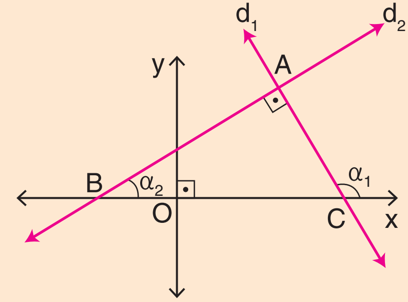
d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ dir.

d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ dir.



d_1 // d_2 ise her iki doğrunun x ekseninin pozitif tarafıyla yaptığı açılar ve tanjantları eşit olacaktır.

$m_1 = \tan\alpha$ ve $m_2 = \tan\alpha$ ise $\mathbf{m_1 = m_2}$ olur.
O hâlde paralel olan doğruların eğimleri eşittir.



$d_1 \perp d_2$ ise ABC üçgeninde $\alpha_2 + 90° = \alpha_1$

$\Rightarrow m_1 = \tan\alpha_1$ ve $m_2 = \tan\alpha_2$ dir.

$m_1 . m_2 = \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_2 + 90°) . \tan\alpha_2 = -1$ olur.

Yani $\mathbf{m_1 . m_2 = -1}$ dir.

O hâlde dik olan doğruların eğimleri çarpımı –1 olur.

Uygulayalım:

$3ax + 2y - 3 = 0$ ve $(2a - 1)x - 3y + 1 = 0$ denklemleri ile verilen doğrular paralel ise a kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Doğrular paralel oldukları için eğimleri eşit olmalıdır. Doğruların eğimi m_1 ve m_2 ise

$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-3a}{2} = \frac{-(2a-1)}{-3} \Rightarrow \frac{-3a}{2} = \frac{2a-1}{3}$

$\Rightarrow -9a = 4a - 2$

$\Rightarrow -13a = -2$

$\Rightarrow a = \frac{2}{13}$ bulunur.

Uygulayalım:

A(–2, 1) noktasından geçip $4x - 3y + 5 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözelim:

Aradığımız doğrunun eğimi, m_2 olsun. Bize verilen doğrunun eğimi olan $m_1 = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ tür.

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 . m_2 = -1 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{4}$ olur.

$y - y_1 = m.(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{-3}{4}.(x - (-2))$

$\Rightarrow 4.(y - 1) = -3.(x + 2)$

$\Rightarrow 4y - 4 = -3x - 6$

$\Rightarrow 4y + 3x + 2 = 0$ bulunur.

Uygulayalım:

A(3, –2) noktasından geçip d_1:2x + 3y – 11 = 0 doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözelim:

Aradığımız doğru, d_2 olsun. $d_1 \,//\, d_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ dir.

$m_1 = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow m_2 = -\dfrac{2}{3}$ tür.

$y - (-2) = -\dfrac{2}{3} \cdot (x - 3) \Rightarrow 3y + 6 = -2x + 6 \Rightarrow 3y + 2x = 0$ bulunur.

Keşfedelim:

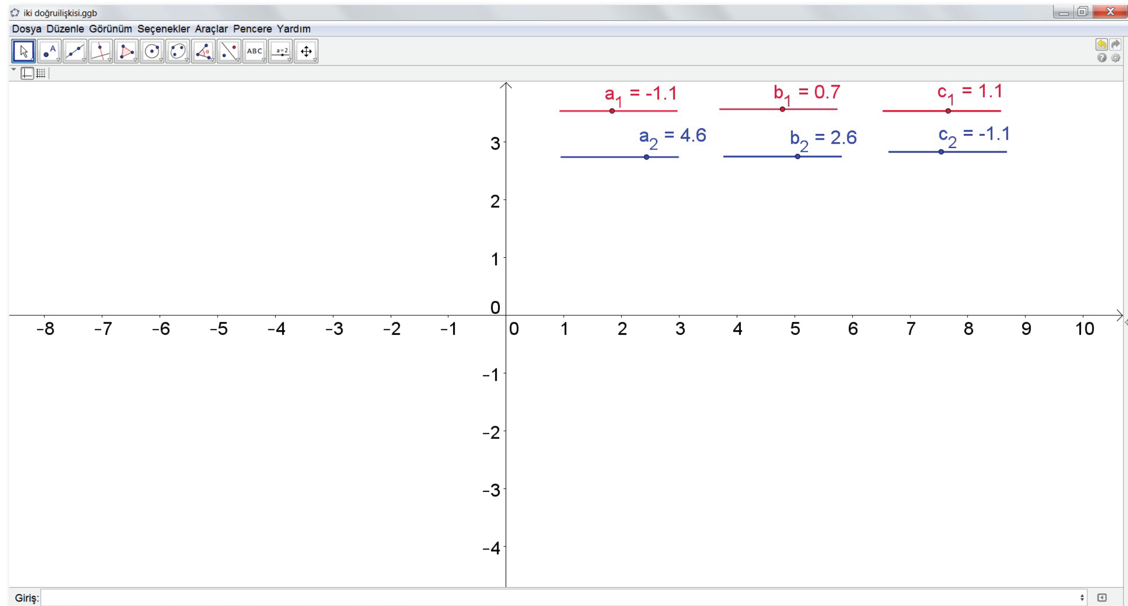
Araç ve gereç: bilgisayar, GeoGebra yazılımı

GeoGebra yazılımının kurulu olduğu bir bilgisayarda yazılımı açalım. Önce $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ doğrularının a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ve c_2 katsayılarına göre durumlarını incelemek amacıyla her bir katsayı için sürgü oluşturalım. Bir tane sürgüyü a_1 için yapalım.

Araç çubukları arasından a=2 Sürgü araç çubuğunu seçip ekranın istediğiniz yerine tıklayınız. Karşınıza aşağıdaki gibi Sürgü aracı penceresi açılacaktır.

Pencerede yazılımın sürgüdeki değerlerinin adlandırdığı a harfi görülür. Bunun yerine yeni adını a_1 yazarak a_1 yapınız. Sürgüdeki sayıların minumum ve maksimum değerlerini ve artış miktarını yandaki ekrandaki gibi yapabilirsiniz.

Sürgü
Sayısal | Ad: a_1
Açı
Tamsayı | Rastgele
Aralık | Sürgü | Canlandırma
minimum: -10 | maksimum: 10 | Artır: 0.1
Uygula | İptal



1. Yazılımda tüm katsayılar için bir önceki sayfadaki gibi sürgü oluşturunuz.

2. GeoGebra yazılımının sol alt köşesinde yer alan **"Giriş"** ekranını kullanarak sürgüde oluşturduğumuz katsayılara bağlı denklemleri girdikten sonra **"Enter"** tuşuna basınız.

Giriş: **a_1x+b_1y=c_1**

Giriş: **a_2x+b_2y=c_2**

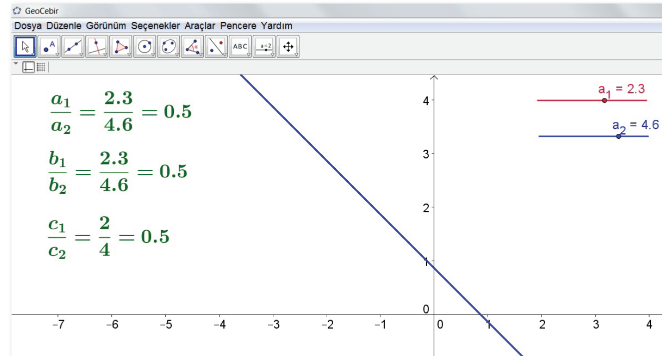
3. **"Giriş"** ekranı kullanarak $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ve $\frac{c_1}{c_2}$ oranlarını buldurunuz. Aşağıda olduğu gibi giriş satırının her birine ayrı ayrı yazılıp **"Enter"** tuşuna basıldığında sonuçları ekranda görülür.

Giriş: **a_1/a_2**

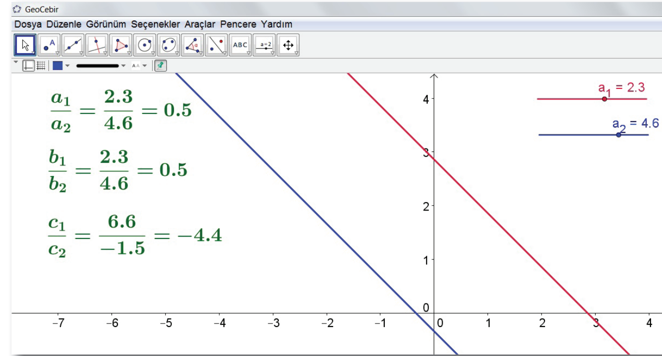
Giriş: **b_1/b_2**

Giriş: **c_1/c_2**

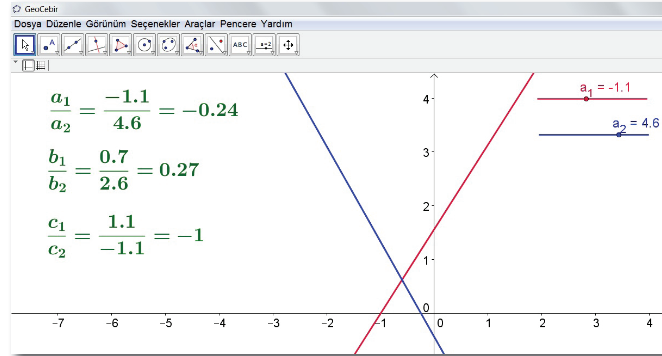
4. Oluşturduğunuz sürgüleri kullanarak $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olacak şekilde ayarlayıp iki doğrunun birbirine göre durumunu belirleyiniz.



5. Yine sürgüleri kullanarak $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olarak şekilde ayarlayıp iki doğrunun birbirine göre durumunu belirleyiniz.



6. Sürgüleri $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olacak şekilde ayarlayıp iki doğrunun birbirine göre durumunu belirleyiniz.



▶ Buna göre $a_1x + b_1y = c_1$ ve $a_2x + b_2y = c_2$ gibi iki doğru verildiğinde doğruların hangi durumlar için çakışık, tek noktada kesişen ve paralel olduğunu açıklayınız.

Öğrenelim:

$d_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ve $d_2 : a_2x + b_2y = c_2$ doğruları verilmiş olsun,

1. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular çakışıktır.

Doğrular sonsuz noktada kesişeceklerinden denklem sisteminin sonsuz çözümü mevcuttur.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular paraleldir. Yani $m_1 = m_2$ dir.

Doğrular herhangi bir noktada kesişmeyeceğinden denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

3. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise doğrular yalnız bir noktada kesişir ve $m_1 \neq m_2$ dir.

Doğruların kesim noktası, bu iki denklemin ortak çözümü ile bulunur.

Uygulayalım:

$(2a - 1)x - 4y + 12 = 0$ ve $3x + 8y - 3b + 1 = 0$ denklemi ile verilen doğrular çakışık ise $a.b$ değeri kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Çakışık doğruların katsayıları orantılı olmalıdır.

Yani

$$\frac{(2a-1)}{3} = \frac{-4}{8} = \frac{12}{-3b+1} \Rightarrow \frac{2a-1}{3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 4a - 2 = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ ve}$$

$$\frac{12}{-3b+1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 3b - 1 = 24 \Rightarrow b = \frac{25}{3} \text{ olur.}$$

O hâlde

$$a.b = -\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{3} = -\frac{25}{12} \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

$(a - 1)x - 3y + 5 = 0$ ve $(2a + 3)x + 4y - 2 = 0$ denklemleri ile verilen doğrular paralel ise a kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Paralel doğrularda x ve y nin katsayıları orantılı olmalıdır.

Yani

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{a-1}{2a+3} = \frac{-3}{4} \text{ olur.}$$

$4a - 4 = -6a - 9$ ise

$10a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ bulunur.

Uygulayalım:

Denklemleri 2x – y = 11 ve x + y = 1 olan doğrular, hangi noktada kesişir? Bulalım.

Çözelim:

İki doğrunun kesişim noktası bulunurken denklemleri ortak çözülür. Denklemleri taraf tarafa toplayarak x i bulalım.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 11 \\ +\quad x + y = 1 \\ \hline 3x = 12 \end{array} \rightarrow x = 4 \text{ olur. } x + y = 1 \text{ ve } x = 4 \text{ ise } y = -3 \text{ olur.}$$

O hâlde verilen doğrular, (4, –3) noktasında kesişir.

Uygulayalım:

Denklemleri 2x – y + 1 = 0 , x + y – 7 = 0 ve k.x – 2y + 4 = 0 olan doğrular, bir A noktasında kesişmektedir. Buna göre k kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Üçüncü doğru ilk iki doğrunun kesiştiği noktadan geçmelidir. İlk iki doğrunun kesişim noktasını bulalım.

$$\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ +\quad x + y - 7 = 0 \\ \hline 3x - 6 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2 \text{ ve } y = 5 \text{ olduğundan bu doğrular (2, 5) noktasında kesişir.}$$

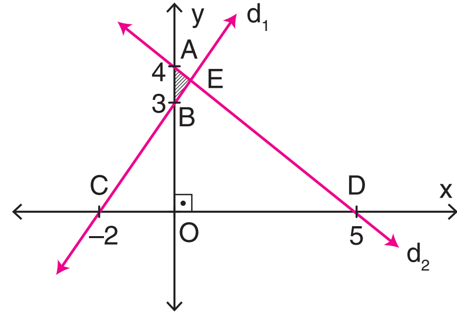
k.x – 2y + 4 = 0 doğrusunun da (2, 5) noktasından geçmesi gerektiğinden

$k.2 - 2.5 + 4 = 0 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$ bulunur.

Uygulayalım:

Yanda d_1 ve d_2 doğrularının grafikleri verilmiştir.

Verilen bilgilere göre $A(\widehat{ABE})$ kaç br² dir? Bulalım.



Çözelim:

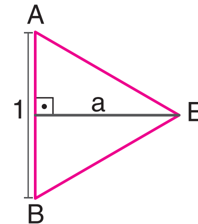
E noktası, d_1 ve d_2 doğrularının kesişim noktasıdır.

E(a,b) seçilirse $A(\widehat{ABE}) = \dfrac{|AB|.a}{2}$ olmalıdır.

A(0, 4) ve B(0, 3) olduğundan |AB| = 1 br dir. Yani ABE üçgeninin alanının bulunabilmesi için a değerine dolayısıyla d_1 ve d_2 doğrularının kesişim noktalarının apsisine ihtiyaç vardır. d_1 ve d_2 doğrularının denklemlerini oluşturup a değerini bulalım.

$d_1: \dfrac{x}{-2}_{(3)} + \dfrac{y}{3}_{(-2)} = \dfrac{1}{1}_{(-6)} \Rightarrow 3x - 2y = -6$ dır.

$d_2: \dfrac{x}{5}_{(4)} + \dfrac{y}{4}_{(5)} = \dfrac{1}{1}_{(20)} \Rightarrow 4x + 5y = 20$ dir. x i bulmalıyız.



$$\begin{array}{lll} 5./\ 3x - 2y = -6 & \Rightarrow & 15.x - 10.y = -30 \\ 2./\ 4x + 5y = 20 & \Rightarrow & +\ 8.x + 10.y = 40 \\ \hline & & 23.x = 10 \end{array} \Rightarrow x = \frac{10}{23} \text{ bulunur.}$$

$a = x = \dfrac{10}{23}$ olacağından $A(\widehat{ABE}) = \dfrac{1.\frac{10}{23}}{2} = \dfrac{5}{23}$ br² sonucuna ulaşılır.

Uygulayalım:

Köşe noktalarının koordinatları A(–1, 2), B(2, 3) ve C(3, –1) olan ABC üçgeni için

a. AB kenarını taşıyan doğrunun denklemini bulalım.

b. BC kenar uzunluğunu bulalım.

c. BC kenarına ait kenarortay uzunluğunu bulalım.

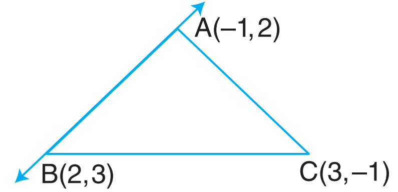
ç. [BC] nın yüksekliğini taşıyan doğrunun denklemini bulalım.

Çözelim:

a. A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

$\frac{y-2}{x+1} = \frac{2-3}{-1-2} \Rightarrow \frac{y-2}{x+1} = \frac{1}{3}$ ise

$3y - 6 = x + 1 \Rightarrow 3y - x - 7 = 0$ bulunur.



b. BC kenar uzunluğunu bulalım.

B ile C noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

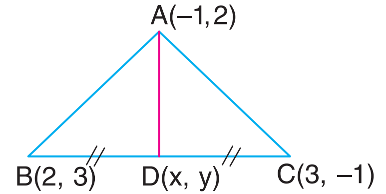
$|BC| = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} \Rightarrow |BC| = \sqrt{17}$ br dir.

c. BC kenarına ait kenarortay uzunluğunu bulalım.

D(x,y) noktası [BC] nın orta noktası olduğundan

$x = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ ve $y = \frac{3-1}{2} = 1$ dir. $D\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ ise

$|AD| = \sqrt{\left(-1-\frac{5}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+1} = \frac{\sqrt{53}}{2}$ br bulunur.



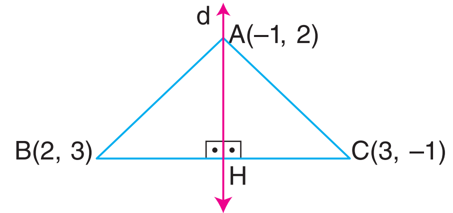
ç. [BC] nın yüksekliğini taşıyan doğrunun denklemini bulalım.

d = AH doğrusu, A noktasından geçip [BC] na dik olan doğrudur. d ve BC doğruları dik olduğundan

$m_d . m_{BC} = -1$ olur.

$m_d . \frac{-1-3}{3-2} = -1 \Rightarrow m_d = \frac{1}{4}$ olur.

Eğimi $\frac{1}{4}$ olup A(–1, 2) noktasından geçen doğrunun denklemi,



$y - 2 = \frac{1}{4}.(x-(-1)) \Rightarrow 4y - 8 = x + 1 \Rightarrow 4y - x - 9 = 0$ bulunur.

Uygulayalım:

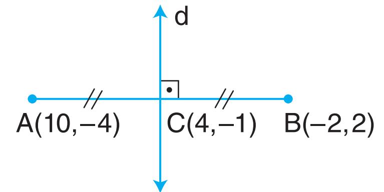
Analitik düzlemde A(10, –4) ve B(–2, 2) noktalarının oluşturduğu [AB] nın orta dikmesinin denklemini bulalım.

Çözelim:

A ile B nin orta noktası $C\left(\frac{10+(-2)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$ ise

C(4, –1) olur. Şekilde görüldüğü gibi

$d \perp [AB]$ olduğundan, $m_d . m_{AB} = -1$ dir.



$m_{AB} = \frac{2-(-4)}{-2-10} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ ise; $-\frac{1}{2}.m_d = -1$ olduğundan $m_d = 2$ olur.

C(4, –1) den geçen ve eğimi 2 olan d doğrusunun denklemi, $y-(-1) = 2.(x-4) \Rightarrow y = 2x - 9$ olur.

Pekiştirelim:

1. $ax + 3y = 5$ ve $4x + by = 7$ denklemi ile verilen doğruların kesişim noktası A(1, 1) olduğuna göre a.b değerini bulunuz.

2. $2x + 3y = 6$

$x - y = 8$

$x + y = k$ denklemleri ile verilen doğrularının bir noktada kesişmesi için k kaç olmalıdır?

3. $x = 4$ ve $y = -3$ denklemi ile verilen doğruların kesişim noktasının başlangıç noktasına olan uzaklığı kaç br dir?

4. $2y - (a + 2)x + 3a - 6 = 0$ denklemi ile verilen doğru orijinden geçtiğine göre a kaçtır?

5. A(– 3, 4), B(2, 6) ve C(k, 8) noktaları doğrusal olduğuna göre k kaçtır?

6. $(2 - a)x - (2.a + 1)y - 5 = 0$ denklemine sahip doğrunun eğimi $-\frac{1}{3}$ olduğuna göre a nın değeri kaçtır?

7. $ax - 3y + 12 = 0$ ve $2x - 6y - c = 0$ denklemlerinin aynı doğruyu göstermesi için a.c kaç olmalıdır?

8. A(3, 4), B(2, y) ve C(1, 2) noktalarını köşe kabul eden bir ABC üçgeni çizilemiyorsa y kaçtır?

9. A(1, – 3), B(x, y) ve C(2, 4) noktaları doğrusal olduğuna göre x ve y arasındaki ilişkiyi bulunuz.

10. Eğimi –2 ve geçtiği bir nokta A(– 2, 3) olan doğrunun denklemini bulunuz.

11. Eğim açısı 45° ve geçtiği bir nokta B(3, 3) olan doğrunun denklemini bulunuz.

12. A(3, 2) ve B(5, 1) noktalarından geçen doğrunun üzerindeki bir nokta C(a, – 2) ise a kaçtır?

13. Orijinden ve $A(1, -\sqrt{3})$ noktasından geçen doğrunun eğim açısı kaç derecedir?

14. Orijinden geçip 30° eğim açısı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

15. $2x - 3y + 4 = 0$ denklemi ile verilen doğruya paralel olup A(–1 , 3) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

16. $5x + 7y + 3 = 0$ denklemi ile verilen doğru, $ax + by + 9 = 0$ denklemi ile verilen doğruyla çakışıktır. Buna göre a + b kaçtır?

17. $x + 4y + 8 = 0$ denklemi ile verilen doğru, $ax - 8y - 3 = 0$ denklemi ile verilen doğruya diktir. Buna göre a kaçtır?

18. $3x + 2y + 5 = 0$ denklemi ile verilen doğruya dik olup A(2 , –1) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

19. $y = x$ doğrusuna paralel olup A(2, –2) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

20. $y = -x$ doğrusuna dik olup A(1 , –3) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

21. Eğim açısı 30° olan bir doğruya dik olup A(2, –3) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

22.

Yukarıda verilenlere göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

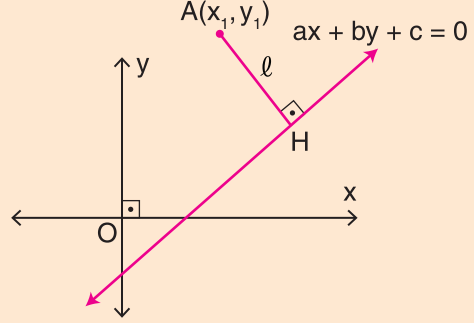
2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Öğrenelim:

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı ℓ ise

$$\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir. Bu uzaklık, doğru üzerinde bulunup A noktasına en yakın olan H noktası ile A arasındaki uzaklıktır. $\ell = |AH|$ olur.



Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(3, –5) noktasının 3x + 4y – 4 = 0 denklemine sahip doğruya olan uzaklığı kaç br dir? Bulalım.

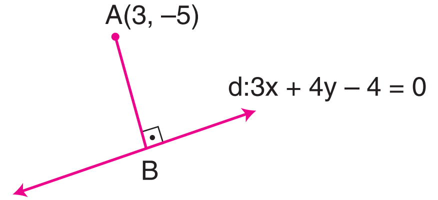
Çözelim:

A noktasının verilen doğruya en yakın noktası B ise

$$|AB| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3.3 + 4.(-5) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$|AB| = \frac{|9 - 20 - 4|}{5}$$

$|AB| = 3$ br dir.



Uygulayalım:

Analitik düzlemde A(3, k) noktasının 6x – 8y + 6 = 0 denklemine sahip doğruya olan uzaklığı 4 br olduğuna göre k nin alabileceği değerler nelerdir? Bulalım.

Çözelim:

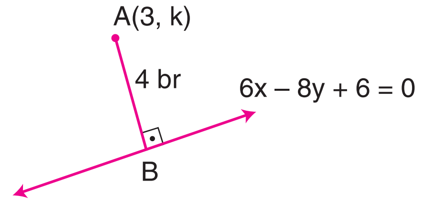
A nın doğruya en yakın noktası B olsun.

$$|AB| = \frac{|6.3 - 8.k + 6|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|24 - 8k|}{10} = 4$$

$\Rightarrow |24 - 8k| = 40$ olur.

$24 - 8k = 40$ veya $24 - 8k = -40$ tır.

$k = -2$ veya $k = 8$ olabilir.



Öğrenelim:

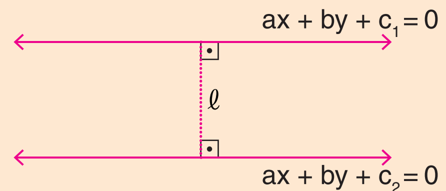
Denklemleri

$d_1 : ax + by + c_1 = 0$

$d_2 : ax + by + c_2 = 0$

olan paralel iki doğru arasındaki uzaklık ℓ ise

$$\ell = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ dir.



Dikkat Edelim!

Paralel doğrular arasındaki uzaklık, farklı bir şekilde de bulunabilir. Bu doğrular üzerinde herhangi bir nokta alınarak, bu noktanın diğer doğruya olan uzaklığı bulunduğunda paralel doğrular arasındaki uzaklık bulunmuş olur.

Uygulayalım:

Analitik düzlemde $x - 4y + 2 = 0$ ve $2x - 8y + 5 = 0$ denklemleri ile verilen doğruların arasındaki uzaklık kaç br dir? Bulalım.

Çözelim

1. Yol: x ve y li terimlerin katsayıları eşitlenirse

$2x - 8y + 4 = 0$ ve $2x - 8y + 5 = 0$ doğruları arasındaki uzaklık,

$$\frac{|4-5|}{\sqrt{2^2+(-8)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{34} \text{ br olur.}$$

2. Yol: İlk doğruda $y = 0$ için $x = -2$ olur. $A(-2,\ 0)$ noktasının ikinci doğruya uzaklığını bulalım.

$$\frac{|2.(-2) - 8.0 + 5|}{\sqrt{2^2+(-8)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{17}}$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{34} \text{ br olur.}$$

Uygulayalım:

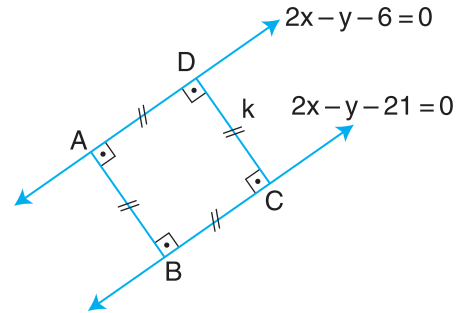
Analitik düzlemde $2x - y = 6$ ve $2x - y = 21$ denklemlerine sahip doğrular veriliyor. Karşılıklı iki kenarı bu doğrular üzerinde olan karenin alanı kaç br^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

Yandaki şekilde kenarlarından ikisi verilen doğrular üzerinde olan ABCD karesi görülmektedir. Karenin kenar uzunluğu olan k nin uzunluğu, bu paralel doğrular arasındaki uzaklık kadardır.

$$k = \frac{|-6-(-21)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \Rightarrow k = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} \text{ br olur.}$$

$$A(ABCD) = k^2 = (3\sqrt{5})^2 = 45 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

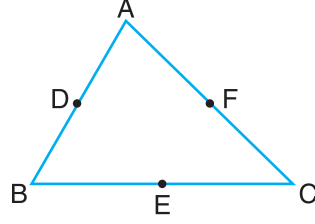


Pekiştirelim:

1. $A(1,4)$ noktasının $d: x + y - 6 = 0$ doğrusuna uzaklığı kaç br dir?
2. $P(5,\ 6)$ noktasının $d: 3x + y + k = 0$ doğrusuna uzaklığı $\sqrt{10}$ br olduğuna göre k nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?
3. A köşesinin koordinatları (2, 3) ve BC kenarı $3x + 4y + 12 = 0$ doğrusu üzerinde olan ABCD karesinin alanı kaç br^2 dir?
4. $5x - 12y + 1 = 0$ doğrusunun $5x - 12y + 53 = 0$ doğrusuna uzaklığı kaç br dir?
5. İki kenarı $3x - 4y + 8 = 0$ ve $3x - 4y + 8 = 0$ doğruları üzerinde olan karenin çevresi kaç br dir?
6. $3x - 4y + 3 = 0$ ve $8y - 6x - k = 0$ doğruları arasındaki uzaklık 2 br olduğuna göre k, hangi değerleri alabilir?

2. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1. ABC üçgen ve D, E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.



D(1,3), E(2,5), F(4,–2)

Verilenlere göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2. A, B ve C doğrusal

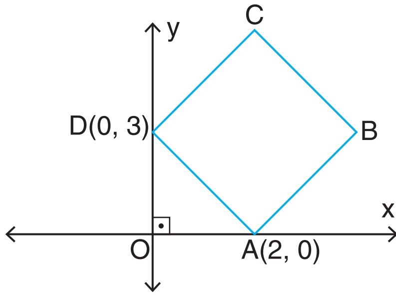
$5.|AB| = |AC|$

A(2,–3) ve C(12,–18)

Verilenlere göre B noktasının koordinatları toplamı kaç olur?

3. P(–1, 2) noktası $2x - y + a = 0$ doğrusu üzerinde ise a kaçtır?

4.



Yukarıdaki analitik düzlemde ABCD karedir. D(0, 3) ve A(2, 0) olduğuna göre B noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

5. Analitik düzlemde A(2, 5) ve B(–1, a) noktaları veriliyor.

$|AB| = \sqrt{13}$ br ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.

6. $2x + \frac{y}{3} - 2 = 0$ doğrusu ile koordinat eksenlerinin sınırladığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

7. Analitik düzlemde y = 12 doğrusu üzerindeki A(5, a) noktasının başlangıç noktasına (orijine) uzaklığı kaç br dir?

8. Uç noktaları (2, 3) ve (–4, 5) olan AB doğru parçasının orta noktası $2x + ky + 6 = 0$ doğrusu üzerinde ise k kaçtır?

9. A ve B noktalarının orta noktası orijin ise aşağıdakilerden kaç tanesi doğru olabilir?

I. Her iki nokta, x ekseni üzerindedir.

II. Her iki nokta, y ekseni üzerindedir.

III. Biri I. bölgede, diğeri IV. bölgededir.

IV. Biri II. bölgede, diğeri IV. bölgededir.

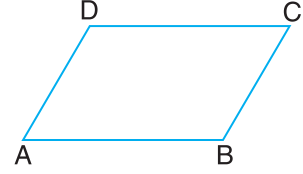
V. Her iki nokta da III. bölgededir.

10. A(–2, 5)

B(5, 2)

C(9, 1)

D(a, b)



Verilenlere göre ABCD paralelkenarının [BD] köşegeninin uzunluğu kaç br dir?

11. $2x - \frac{y}{2} + 1 = 0$ doğrusunun x eksenini kestiği noktanın apsisiyle $\frac{x}{3} + 2y - 1 = 0$ doğrusunun y eksenini kestiği noktanın ordinatının toplamı kaçtır?

12. $C \in [AB]$ olmak üzere A(2, –7) ve B(10, 13) noktaları veriliyor.

[AB] nı $|AC| = 3.|CD|$ oranında bölen C noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

13. A(2, 3), B(–4, 1) ve C(–2, 1) noktaları ABC üçgeninin köşeleridir.

ABC üçgeninin [BC] kenarına ait kenarortay uzunluğu kaç br dir?

14. Analitik düzlemde $x = 4$ doğrusu üzerindeki A(a, 3) noktasının başlangıç noktasına olan uzaklığı kaç br dir?

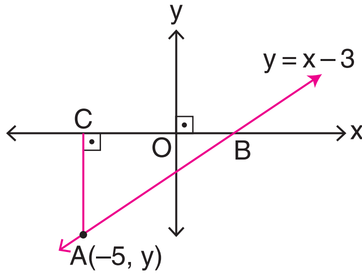
15. A(a, b) ve B(c, d) noktaları veriliyor. A ve B noktaları $5x - 3y - 2 = 0$ doğrusu üzerinde farklı iki nokta olduğuna göre $\frac{c - a}{d - b}$ oranı kaçtır?

16. A(0, 7) ve B(5, 2) noktalarına eşit uzaklıkta olup x ekseni üzerinde bulunan noktanın apsisi kaçtır?

17. $x = 0$, $y = -1$ ve $x + y = a$ doğruları arasında kalan üçgenin alanı 8 br^2 ise a hangi değeri alabilir?

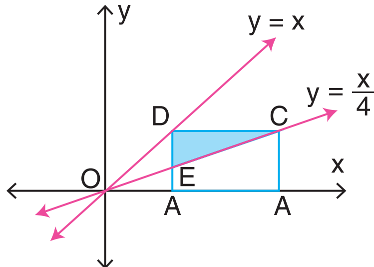
18. A(2, 5) ve B(–3, 1) noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır?

19.



Şekildeki $y = x - 3$ doğrusu ve A(–5, y) noktası verilmiştir. ABC üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

20.



ABCD dikdörtgen, D ve C köşeleri sırasıyla $y = x$ ve $y = \frac{x}{4}$ doğruları üzerindedir.

A(ABCD) = 48 br^2

Verilenlere göre DEC üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

21. A(a – 4, 3), B(–2, 1) ve C(–3, –1) noktaları veriliyor. C noktası AB doğrusunun üzerinde ise a kaçtır?

22. Aşağıdaki doğrulardan hangisi,

$2x - 5y + 1 = 0$ doğrusuna paraleldir?

I. $y + \frac{5}{2}x - 1 = 0$ **II.** $4x - 5y + 1 = 0$

III. $y = \frac{2}{5}x + 1$ **IV.** $2y = \frac{4}{5}x - 3$

23. $2x - y + 6 = 0$ ve $x + y - 4 = 0$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

24. $y = 3x$ doğrusuna apsisi 3 olan noktasından çizilen dik doğru, x eksenini hangi noktada kesmektedir?

25. Denklemleri $ay - 3x + 6 = 0$ ve $4x + 3y + 7 = 0$ olan paralel doğrular arasındaki uzaklık, kaç br dir?

26. $2x - 3y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi m_1,

$x + 2y + 5 = 0$ doğrusunun eğimi m_2 ve

$4x - y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi m_3 ise

m_1, m_2 ve m_3 arasındaki sıralamayı bulunuz.

27. Eğimi $\frac{1}{3}$ olan ve (–1, 3) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

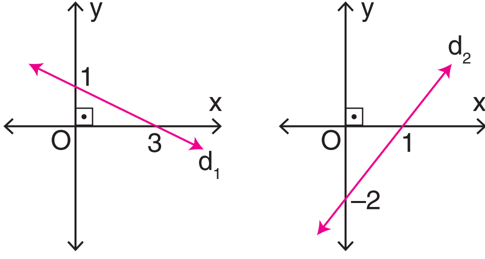
28. $ax - (a + 2)y + 5 = 0$

$8y - ax - 7 = 0$

doğruları birbirine dik olduğuna göre a kaçtır?

29. $x - 2y + 1 = 0$ doğrusuna paralel olan ve A(–1, 2) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

30.



Yukarıda grafikleri verilen d_1 ve d_2 doğruları aynı koordinat düzleminde çizilirse kesişim noktasının ordinatı kaç olur?

31. $2x + 3y = 6$, $x - y = 8$ ve $x + y = k$ doğrularının bir noktada kesişmesi için k kaç olmalıdır?

32. A(3, –2) ve B(0, –1) noktalarından geçen doğruya dik olan bir doğrunun eğimi kaçtır?

33. $2x - y - 1 = 0$ ve $y - x - 2 = 0$ doğrularının kesişim noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{3}$ olan doğrunun denklemini bulunuz.

34. $d_1 : mx + y + 2 = 0$

$d_2 : 12x + 3my - 1 = 0$

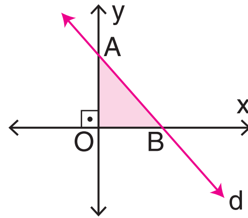
$d_3 : (p - 1)x + y - 2 = 0$

doğruları için $m > 0$, $d_1 \parallel d_2$ ve $d_2 \perp d_3$ olduğuna göre p kaçtır?

35. A(0, 6) ve

$A(\widehat{AOB}) = 12$ br^2 dir.

Şekildeki analitik düzlemde d doğrusunun denklemini bulunuz.



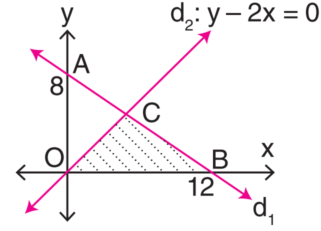
36. A(1, 4) ve B(–3, 6) noktaları veriliyor.

[AB] nın orta dikmesinin denklemini bulunuz.

37. Köşeleri; A(5,–1) , B(2, 3) ve C(4, 1) olan ABC üçgeninin [AC] kenarına ait yüksekliğin denklemini bulunuz.

38. A(2, 1) ve B(–1, m + 1) noktalarından geçen doğrunun eğim açısı 135° olduğuna göre m kaçtır?

39.

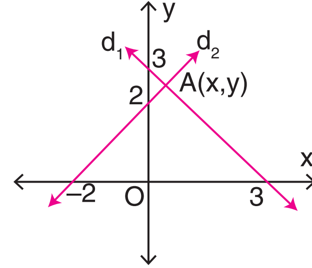


d_1 ve d_2 doğruları C noktasında kesişiyor.

A(0, 8), B(12, 0)

Verilenlere göre $A(\widehat{OCB})$ kaç br^2 dir?

40.



Şekildeki d_1 doğrusu, x eksenini (3, 0) ve y eksenini (0, 3) noktasında; d_2 doğrusu, x eksenini (–2, 0) ve y eksenini ise (0, 2) noktasında kesmektedir.

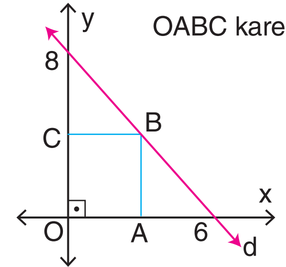
d_1 ve d_2 doğrularının A kesim noktasının koordinatlarnı bulunuz.

41. A(2, –3) noktasının $3x + 4y - 7 = 0$ denklemi ile verilen doğruya olan uzaklığını bulunuz.

42. $y = x + 1$ ve $y = x + 3$ denklemine sahip doğrular arasındaki uzaklığı bulunuz.

43. $2x - 3y + 6 = 0$ ile $4x + ky - 16 = 0$ paralel doğruları arasındaki uzaklığı bulunuz.

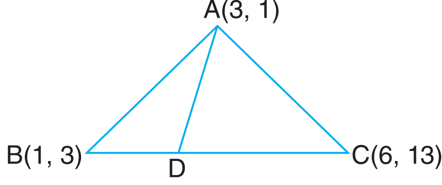
44.



Yukarıdaki şekilde d doğrusunun eksenleri kestiği noktalar verilmiştir. Verilenlere göre A(OABC) kaç br^2 dir?

2. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

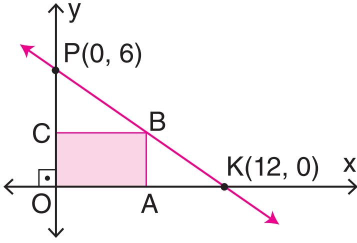
1. Aşağıdaki ABC üçgeninde A(3, 1), B(1, 3), C(6, 13) ve 3.|BD| = 2.|DC| dur.



Verilenlere göre |AD| kaç br dir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.



Yukarıda OABC dikdörtgeninde K(12, 0), P(0, 6) ve 2.|BA| = |BC| dur.

Verilenlere göre OABC dikdörtgeninin alanı kaç br^2 dir?

A) 8 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

3. A(–1, 3) noktasının denklemi 4x + 3y + k = 0 olan doğruya uzaklığı 2 br ise a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) –10 B) –5 C) 0 D) 5 E) 10

4. A(3t – 1, t + 1) noktasının denklemi x – y + 6 = 0 olan doğruya uzaklığı 0 ise t kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

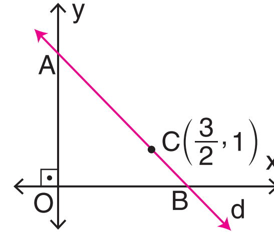
5. A(t + 1 , 5.t) ve B(t – 1, t – 12) noktaları veriliyor. AB doğru parçasının orta noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğuna göre A noktası hangi bölgededir?

A) I. bölge B) II. bölge C) I. veya II. bölge D) II. veya III. bölge E) IV. Bölge

6. İki kenarı 4x – 3y + 15 = 0 ve 4x – 3y – 5 = 0 doğrularının üzerinde bulunan karenin alanı kaç br^2 dir?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 16 E) 25

7.



Şekildeki analitik düzlemde d doğrusu verilmiştir.

2.|OB| = |AO| ve $C\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ noktası d doğrusu üzerinde ise $A(\widehat{AOB})$ kaç br^2 dir?

A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) $\frac{11}{2}$ E) 6

8. A(1, 2), B(a, –1) ve C(2, 3) noktaları, koordinat düzleminde tepe noktası B olan bir ikizkenar üçgenin köşeleridir.

Verilenlere göre a kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9. (3a + 2)x – (b + 3)y – 2 = 0

(a + 1)x – by – 1 = 0

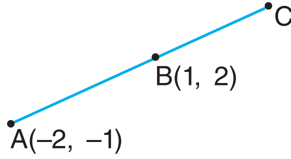
doğrularının iki noktası ortak olduğuna göre a + b kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 5

10. $4x + 3y = 12$ doğrusu, analitik düzlemi A ve B noktalarında kesmektedir. A ve B noktaları C(7, 0) noktasıyla birleştirilerek ABC üçgeni oluşturuluyor.
Verilenlere göre $A(\widehat{ABC})$ kaç br^2 dir?

A) 6 B) 8 C) 16 D) 18 E) 24

11.



Yukarıda verilen AB doğru parçasını dıştan $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{5}{2}$ oranında bölen C noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 3

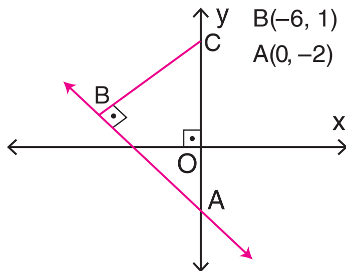
12. A(3, 7), B(8, 2), $C \in [AB]$ ve $3.|AC| = 2.|BC|$ olduğuna göre C noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır?

A) 8 B) 2 C) 10 D) 11 E) 12

13. Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G(2, 3) ve köşe koordinatlardan biri B(–1, 1) dir. BD kenarortay olduğuna göre
D noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) $-\frac{15}{2}$ B) –1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{15}{2}$ E) 1

14.



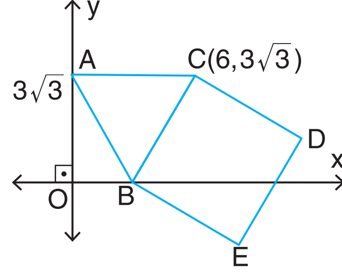
Yukarıdaki analitik düzlemde verilenlere göre C noktasının ordinatı kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

15. Köşeleri A(5, 11), B(–7, –3) ve C(1, –5) olan ABC üçgeninde A köşesinden geçen kenarortayın uzunluğu kaç br dir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 17

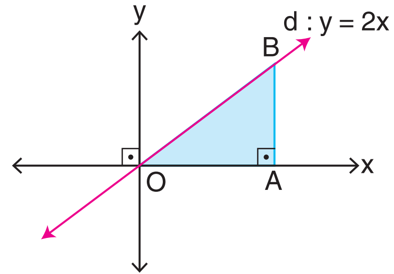
16.



ABC eşkenar üçgen ve BCDE karesinin B köşesi, x ekseni üzerindedir.
$A(0, 3\sqrt{3})$ ve $C(6, 3\sqrt{3})$ olduğuna göre E noktasının apsisi kaçtır?

A) $3\sqrt{3}$ B) $3 + 3\sqrt{3}$ C) 6 D) $2 + 3\sqrt{3}$ E) 2

17.



Yukarıdaki analitik düzlemde $[OA] \perp [AB]$ dir.
Şekilde verilenlere ek olarak $|OB|$ değerinin de bilinmesiyle

I. $A(\widehat{OAB})$ kaç br^2 dir?

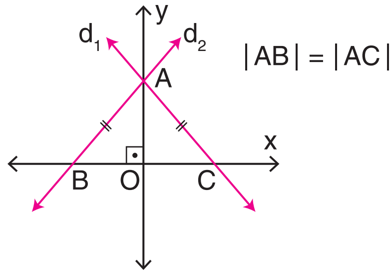
II. $|OA|$ kaç br dir?

III. $Ç(\widehat{OAB})$ kaç br dir?

sorularından hangileri çözülebilir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) II ve III D) I ve III E) I, II ve III

18.



$|AB| = |AC|$

Aşağıdakilerden hangisi bilinirse yukarıdaki analitik düzlemde verilen d_1 ve d_2 doğrularının denklemleri bulunabilir?

A) ABC üçgeninin alanının kaç br^2 olduğu

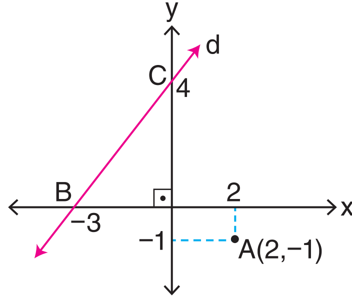
B) |AB| ve |BC| değerleri

C) ABC üçgeninin çevresinin kaç br olduğu

D) d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri

E) |BC| değeri

19.



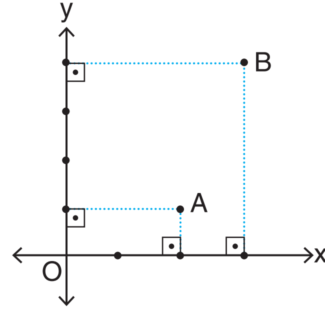
Şekilde A noktasının d doğrusuna uzaklığı kaç br dir?

A) $\frac{33}{5}$ B) $\frac{28}{5}$ C) $\frac{16}{5}$ D) 4 E) $\frac{23}{5}$

20. $\left.\begin{aligned} ax - y &= 6 \\ 4x + (a+4)y &= -6 \end{aligned}\right\}$ denklemleriyle verilen doğrular paralel olduğuna göre a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

21.



Yukarıdaki analitik düzlemde A ve B noktaları bulunarak işaretlenmiştir. A noktasında bulunan bir karınca B noktasına en kısa yoldan ulaşmak isterse izlemesi gereken yolun denklemi aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

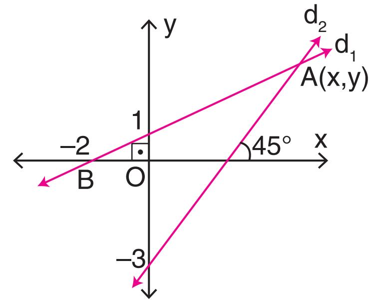
(Eksen üzerindeki iki nokta arası 1 birimdir.)

A) $y - 3x + 5 = 0$ B) $2y - 3x + 4 = 0$

C) $y - x - 1 = 0$ D) $y + 3x - 5 = 0$

E) $y + 3x + 5 = 0$

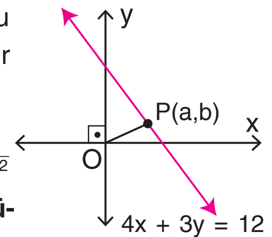
22.



Şekilde d_1 doğrusuyla d_2 doğrusunun kesişim noktası A(x, y) olduğuna göre x + y kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

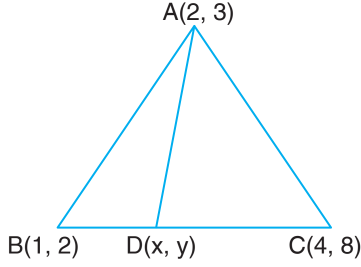
23. Yandaki şekilde $4x + 3y = 12$ doğrusu üzerinde herhangi bir P(a, b) noktası alınmıştır.



Buna göre $\sqrt{a^2 + b^2}$ nin alabileceği **en küçük** değer kaçtır?

A) 3 B) 4 C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{12}{5}$

24.

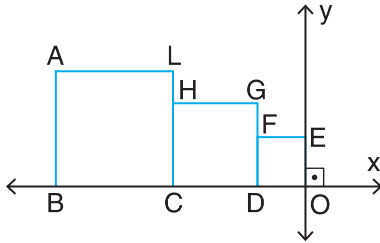


Şekildeki ABC üçgeninin köşelerinin koordinatları A(2, 3), B(1, 2) ve C(4, 8) dir.

$|DC| = 2.|BD|$ olduğuna göre AD kenarının uzunluğu kaç br dir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 4 E) $\sqrt{5}$

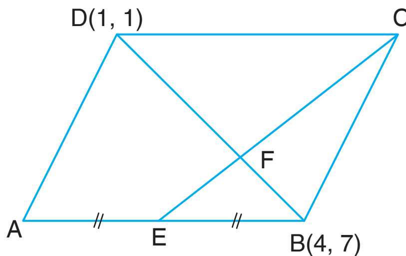
25.



Analitik düzlemde yukarıdaki gibi üç kare çizilmiştir. A(–17, 10) ve E(0, 3) olduğuna göre ortadaki karenin alanı kaç br^2 dir?

A) 36 B) 25 C) 16 D) 4 E) 2

26.



ABCD paralelkenar

$[BD] \cap [EC] = \{F\}$

$|AE| = |EB|$

B(4, 7) ve D(1, 1)

Verilenlere göre F noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 6) B) (3, 6) C) (2, 7) D) (3, 5) E) (3, 3)

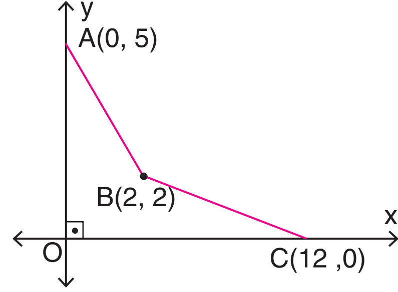
27. A(–1, 2) noktasından geçen ve $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x + 2y - 1 = 0$ B) $3x + 2y + 1 = 0$

C) $3x + 2y - 2 = 0$ D) $2x + 3y + 5 = 0$

E) $2x - y + 1 = 0$

28.

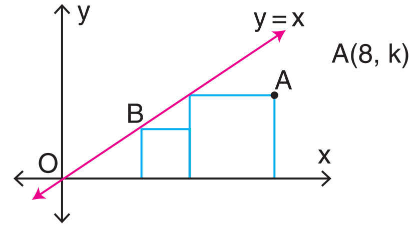


Analitik düzlemde A(0,5), B(2,2) ve C(12,0) noktaları veriliyor.

Verilenlere göre A(AOCB) kaç br^2 dir?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

29.



Yukarıdaki analitik düzlemde iki kare çizilmiştir.

Verilenlere göre B noktasının apsisi kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

30. x eksenini (4, 0) noktasında kesen doğru $y = 2x - 4$ doğrusuna dik ise bu doğrular ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) 2 E) $\frac{4}{5}$

3. Alt Öğrenme Alanı: FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

- Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problem çözmeniz,
- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizip yorumlamanız, ikinci dereceden fonksiyonlarla modellenebilen problemleri çözmeniz,
- Bir fonksiyonun grafiğinden dönüşümler yardımı ile yeni fonksiyon grafikleri çizmeniz amaçlanmaktadır.

"Matematiğin özünde kolay şeyleri zorlaştırmak değil, karmaşık şeyleri basitleştirmek vardır."

Gudder (Gadır)

3. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1. Aşağıda verilen f, g ve h fonksiyonları için karşılarında istenen değerleri bulunuz.

a. $f(x) = x^2 - 2$ için $f(-2) = ?$ $f(0) = ?$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

b. $g(x) = x - 3x^2$ için $g(2) = ?$ $g(x + 1) = ?$

$3 + g(x) = ?$

c. $h(x) = x^3 - 4x^2$ için $h(2) + h(4) = ?$

2. Aşağıdaki tabloda bir hareketlinin yol - zaman değerleri verilmiştir.

Zaman (dk)	1	2	3	4	5
Yol (m)	800	1600	2400	3200	4000

Buna göre verilen hareketli için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. 1 - 4 dakikaları arasındaki ortalama hızı hesaplayınız.

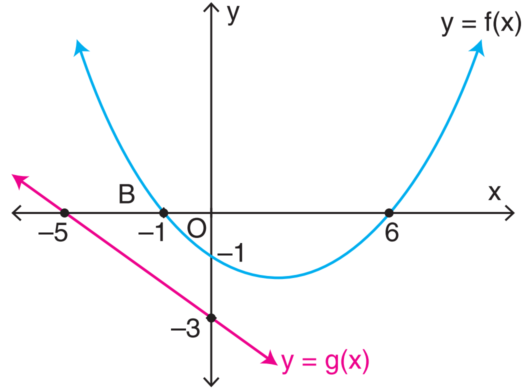
b. Hareketlinin zamana bağlı aldığı yolu veren fonksiyonu bulup bu fonksiyonun hangi tür fonksiyon olduğunu belirleyiniz.

3. A(2, 1) ve B(–3, –2) noktaları için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. x ekseni boyunca sağa 3 br ve y ekseni boyunca aşağıya 2 br ötelenmesi sonucu oluşan noktaların koordinatlarını bulunuz.

b. x eksenine, y eksenine ve orijine göre simetrileri alındığında oluşan noktaların koordinatları ne olur?

4.



Yukarıda verilen f ve g fonksiyonlarına ait grafiklerin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

5. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin köklerinin gerçek sayılar kümesine varlığını inceleyip varsa köklerini bulunuz.

a. $x^2 - 3x - 4 = 0$

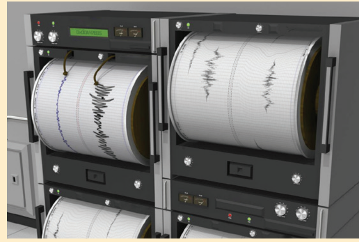
b. $6x^2 + x - 2 = 0$

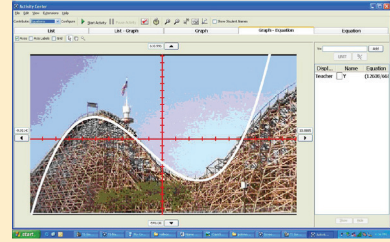
c. $3x^2 - 7x + 10 = 0$

ç. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3.1. Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

Matematik sadece sayılar, şekiller ve cisimler üzerine çalışan bir bilim dalı değildir. En temel elemanlarından biri de fonksiyonlardır. Örüntü ve ilişki içeren tüm durumlarda fonksiyon kavramı karşımıza çıkar. Özellikle gerçek yaşam problemlerinin matematiksel modellemesini oluştururken sıklıkla kullanılır. Gelecekte nüfusun kaç olacağı, bir ağacın yaşı, depremin büyüklüğünü hesaplaması bunlardan bazılarıdır. Fonksiyonun cebirsel gösteriminin yanında grafiksel gösterimi de matematiksel olarak önemlidir. Çünkü fonksiyon ile ilgili bazı özellikleri kolaylıkla grafikten görebiliriz. Grafik; fonksiyonun ne zaman maksimum değerini aldığı, ne zaman hep arttığı ya da pozitif, negatif olduğunu bularak fonksiyonu anlamamızda kolaylık sağlar. Günlük yaşantıda siz de fonksiyonun kullanıldığı yerlere örnekler veriniz.





3.1.1. Fonksiyonların Grafik ve Tablo Temsili

Hatırlayalım:

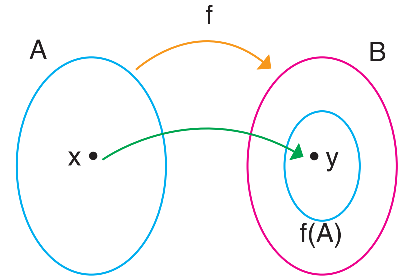
Bir kümenin her bir elemanını başka bir kümenin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen kurala **fonksiyon** adı verilir.

Yandaki şemada verilen A dan B ye f fonksiyonu,

f : A → B biçiminde gösterilir. **y = f(x)** olarak yazılır.

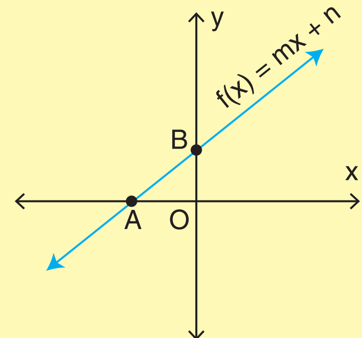
$x \in A$ ve $y = f(x) \in B$ dir.

Burada A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** ve f(A) kümesine de fonksiyonun **görüntü kümesi** adı verilir.



Dikkat Edelim!

Elemanları bir doğru üzerinde olan bir fonksiyona **doğrusal fonksiyon** denir. Doğrusal fonksiyon $m, n \in \mathbb{R}$ üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ biçiminde ifade edilir. Yanda $f(x) = mx + n$ doğrusal fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Burada A, grafiğin x eksenini, B ise y eksenini kestiği noktadır.

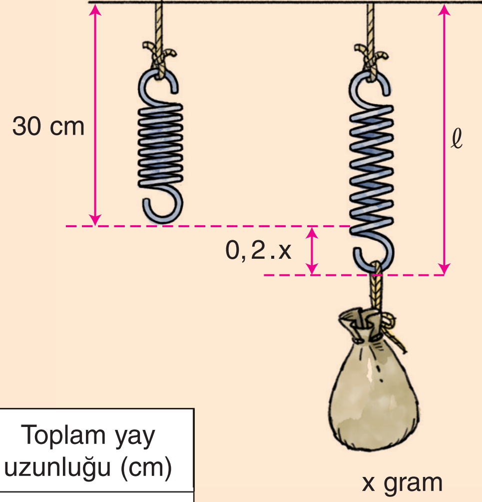


Öğrenelim:

Aşağıdaki örneği inceleyelim.

Yandaki şekilde herhangi bir ağırlık konulmadığında yayın uzunluğu 30 cm olarak verilmiştir. Yay, ucuna konan herhangi bir nesnenin ağırlığına göre gram başına 0,2 cm uzamaktadır.

ℓ, uzayan yayın toplam uzunluğunu göstermektedir. Buna göre yayın uzunluğunu yayın ucuna konan nesnenin ağırlığına bağlı olarak gösteren fonksiyonu yazalım. Öncelikle bunu birkaç adımda inceleyelim.



Nesnenin ağırlığı (gr)	Yayın ilk uzunluğu (cm)	Uzama miktarı (cm)	Toplam yay uzunluğu (cm)
1	30	0,2.1	30 + 0,2.1
2	30	0,2.2	30 + 0,2.2
3	30	0,2.3	30 + 0,2.3
4	30	0,2.4	30 + 0,2.4
x	30	0,2.x	30 + 0,2.x

O hâlde yayın toplam uzunluğunu yayın ucuna konan nesnenin ağırlığına bağlı olarak veren fonksiyon, $\ell = f(x) = 30 + 0{,}2 . x$ olarak bulunur. Bu ifade, yayın toplam uzunluğu ile nesnenin ağırlığı arasındaki ilişkidir. Yayın ucuna 250 gr ağırlığında bir nesne konduğunda yayın uzunluğunun kaç cm olacağını bulalım. $x = 250 \Rightarrow \ell = f(250) = 30 + 0{,}2 . 250 = 80$ cm olur.

Nesne konduktan sonra yayın uzunluğu 105 cm olsaydı nesnenin ağırlığının kaç gr olacağını bulalım. Şimdi, $\ell = f(x) = 105$ olarak verilmiş ve x değeri sorulmaktadır. Bunu iki yolla yapalım.

1. Yol:

$\ell = f(x) = 30 + 0{,}2 . x = 105$ olduğuna göre $0{,}2 . x = 75 \Rightarrow x = 375$ gr bulunur.

2. Yol:

f(x) fonksiyonunun ters fonksiyonunu yazalım.

$f(x) = 30 + 0{,}2 . x = \ell \Rightarrow x = \dfrac{\ell - 30}{0{,}2}$ olur. Yani $f^{-1}(\ell) = \dfrac{\ell - 30}{0{,}2}$ bulunur.

$x = f^{-1}(\ell) = \dfrac{\ell - 30}{0{,}2}$ ilişkisi, nesnenin ağırlığını yayın toplam uzunluğuna bağlı veren fonksiyondur. Yani f(x) in tersidir. Burada; $\ell = 105$ olduğuna göre $x = \dfrac{105 - 30}{0{,}2} = 375$ gr bulunur.

Böyle bir problem durumunda ister yayın toplam uzunluğu ister konan nesnenin ağırlığı verilsin f(x) ya da $f^{-1}(x)$ fonksiyonları yardımıyla istenen değer kolaylıkla bulunabilir.

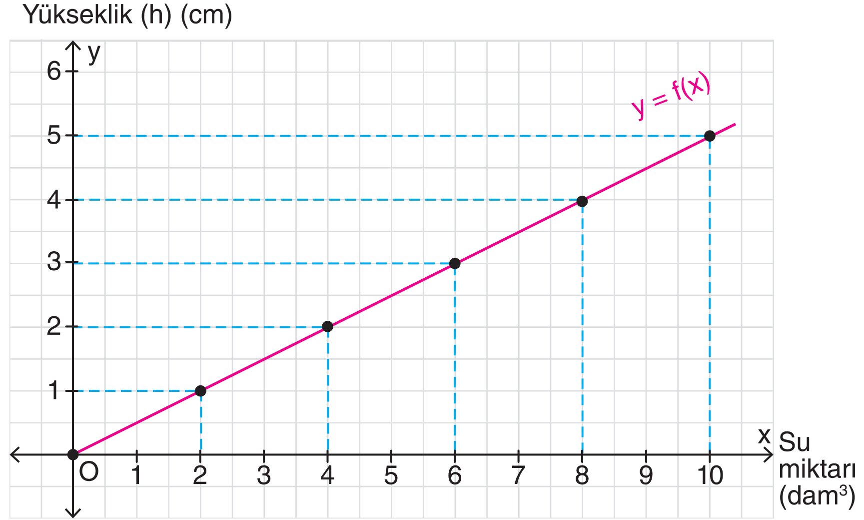
Uygulayalım:

Yandaki fotoğrafta bir havuz görülmektedir. Bu havuza 2 dam^3 su konduğunda havuz, 1 cm yüksekliğe kadar su ile dolmaktadır. Buna göre suyun yüksekliğinin su miktarına bağlı değişimini modelleyip yüksekliğin 1 m olması için havuza ne kadar su akıtılması gerektiğini bulalım.

Çözelim:

Havuza akan su miktarı ile yükseklik arasındaki ilişkiyi hem tabloda hem de grafik üzerinde gösterelim.

Su miktarı (dam^3)	Yükseklik (cm)
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
⋮	⋮
x	$\frac{x}{2}$



Görüldüğü gibi bu fonksiyon doğrusaldır ve fonksiyonun kuralı, $f(x) = \frac{x}{2}$ dir. Bu ilişki, yüksekliğin su miktarına bağlı matematiksel modellemesidir. Yani $h = f(x) = \frac{x}{2}$ olur.

Yüksekliğin 1 m olması için ne kadar suya ihtiyacımız olduğunu belirleyelim. Yaptığımız modellemede yükseklik birimi cm olduğundan isteneni 1 m = 100 cm olarak alıp sonucu bulalım.

$h = 100$ için $100 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 200$ dam^3 suya ihtiyaç olduğu belirlenir.

Uygulayalım:

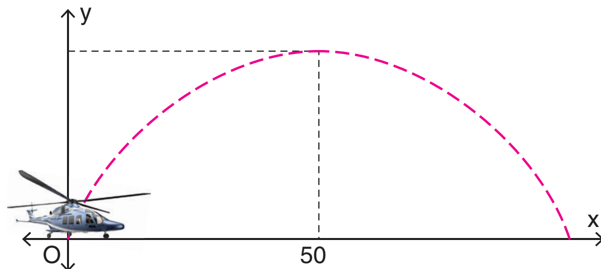
Havacılık tarihimizin en önemli isimlerinden olan Vecihi Hürkuş, vatanına ve milletine duyduğu sevgiyle Balkan Savaşı ve Kurtuluş Savaşı'na gönüllü olarak katılmıştır. Üstün bir azim, sabır ve vatanseverlik örneği gösteren Hürkuş, 1925 te Vecihi KVI adlı ilk Türk uçağını imal etmiştir. Günümüzde birçok projeye onun adı verilmiştir. Onun adının verildiği bir helikopter aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi hareket etmektedir. Helikopterin izlediği yol, $y = f(x) = -0{,}0024 \cdot x^2 + 0{,}24 \cdot x$ fonksiyonunun grafiğine karşılık gelmektedir.

a. Helikopter kalktığı yerden kaç km ileriye iner? Bulalım.

b. Helikopter kalktığı yerden 50 km sonra maksimum yüksekliğe ulaştığına göre helikopterin ulaştığı maksimum yüksekliği bulalım.

c. Helikopterin sürekli yükseldiği aralığı bulalım.

ç. Helikopterin sürekli alçaldığı aralığı bulalım.



Çözelim:

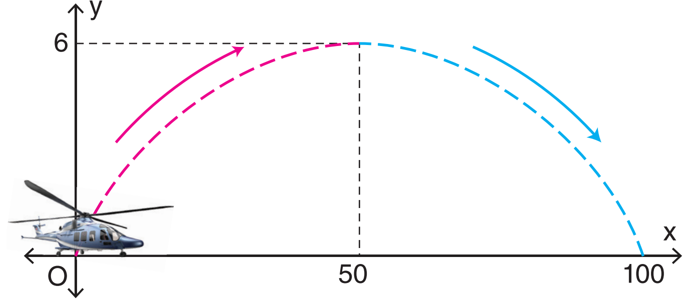
a. Helikopterin indiği yer, x eksenini kestiği noktadır. Yani y = 0 iken x değerini bulmamız gerekmektedir.

$y = f(x) = -0{,}0024 \cdot x^2 + 0{,}24 \cdot x = 0$

$x \cdot (-0{,}0024 \cdot x + 0{,}24) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 100$ bulunur.

O hâlde eğrinin x eksenini kestiği nokta, yani helikopterin yükselmeye başladığı yerden indiği yere uzaklık 100 km dir.



b. Helikopter yerden 50 km sonra en yükseğe ulaşıyorsa verilen fonksiyonda x = 50 için y değerini bulmamız gerekmektedir.

$y = f(x) = -0{,}0024 \cdot x^2 + 0{,}24 \cdot x \Rightarrow y = f(50) = -0{,}0024 \cdot (50)^2 + 0{,}24 \cdot 50 \Rightarrow y = 6$ km bulunur.

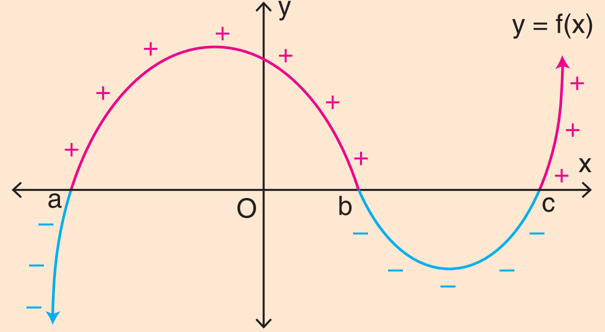
Yani fonksiyonun maksimum değeri, 6 dır.

c. Helikopterin sürekli yükseldiği aralık grafikte de görüldüğü gibi [0 , 50] aralığıdır.

ç. Helikopterin sürekli alçaldığı aralık ise [50 , 100] aralığıdır.

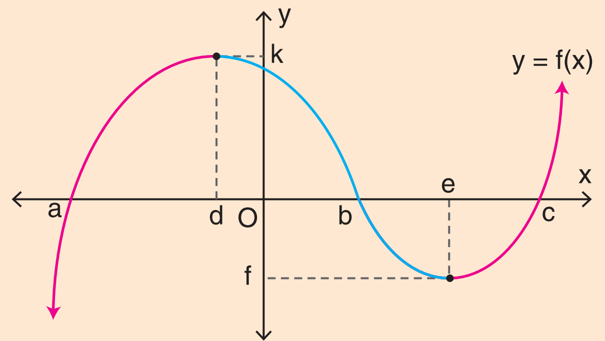
Öğrenelim:

Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafikte y = f(x) fonksiyonunun daima **pozitif** olduğu aralık, y ekseninin üstünde kalan kısım; daima **negatif** olduğu aralık, x ekseninin altında kalan kısımdır.



Yani verilen grafikte fonksiyonun pozitif değerler aldığı aralık, $(a,b) \cup (c,\infty)$ dur. Fonksiyonun negatif değerler aldığı aralık ise $(-\infty,a) \cup (b,c)$ aralığıdır.

Fonksiyonun [a,c] aralığında **maksimum noktası** (d,k) ve **minimum noktası** ise (e,f) dir. Bunlar, verilen aralıkta aldığı en büyük ve en küçük değeri gösterir. Ayrıca $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise fonksiyon (x_1, x_2) aralığında **artan**dır. $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise fonksiyon, (x_1, x_2) aralığında **azalan**dır.

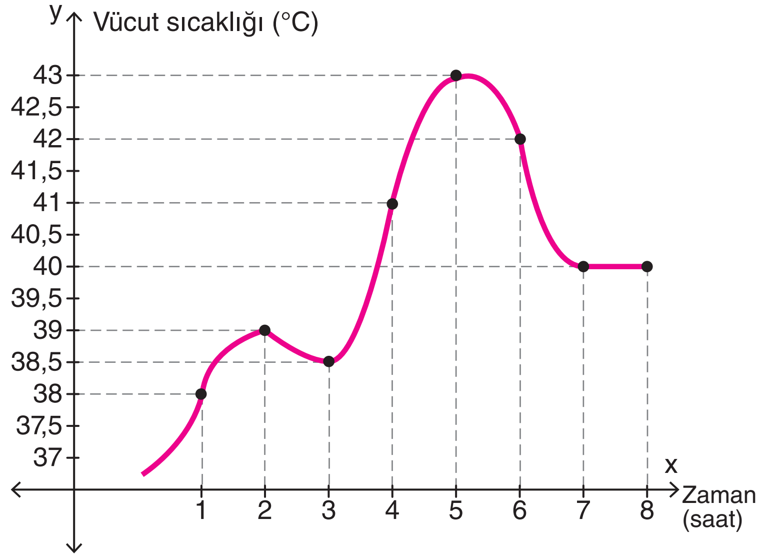


Verilen y = f(x) fonksiyonu,

$(-\infty,d) \cup (e,\infty)$ aralığında artan fonksiyon iken (d,e) aralığında azalan fonksiyondur.

Uygulayalım:

İşini titizlikle yapan Doktor Beril hastalarına değer verdiği için anlaşılması kolay olan bir gösterim yolunu tercih etmektedir. Yandaki grafik sıtma hastalığına yakalanan bir hastasının vücut sıcaklığının zamana göre değişimini göstermektedir. Sabırla aşağıdaki durumları hastalarına anlatmıştır. Bu durumları bulalım.



a. Hastanın vücut sıcaklığı, kaç saat sonra maksimum olmuştur?

b. Hastanın vücut sıcaklığı hangi aralıkta artış göstermiştir?

c. Hastanın vücut sıcaklığı, hangi aralıkta azalmıştır?

ç. Hastanın vücut sıcaklığı, hangi aralıkta sabittir? Bulalım.

Çözelim:

a. Hastanın vücut sıcaklığı, maksimum 43°C dir ve 5 saat sonra bu değere ulaşmıştır. Yani verilen eğriyi bir fonksiyon eğrisi olarak düşünürsek fonksiyonun maksimum noktası (5,43) olur.

b. Hastanın vücut sıcaklığı, $[0,2]\cup[3,5]$ aralığında artış göstermiştir. Bu aralıklarda alınan 1 ve 2 noktaları için $1<2 \Rightarrow f(1)<f(2)$ olduğundan ya da $4<5 \Rightarrow f(4)<f(5)$ olduğundan fonksiyon bu aralıklarda artandır.

c. Hastanın vücut sıcaklığı, $[2,3]\cup[5,7]$ aralığında azalmıştır. Bu aralıklarda alınan 2 ve 3 noktaları için $2<3 \Rightarrow f(2)>f(3)$ olduğundan ya da $6<7 \Rightarrow f(6)>f(7)$ olduğundan fonksiyon bu aralıklarda azalandır.

ç. Hastanın vücut sıcaklığı, [7,8] aralığında sabittir. Yani bu aralıkta fonksiyon ne artan ne de azalandır.

Uygulayalım:

Yanda $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x) = -x^3 + x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

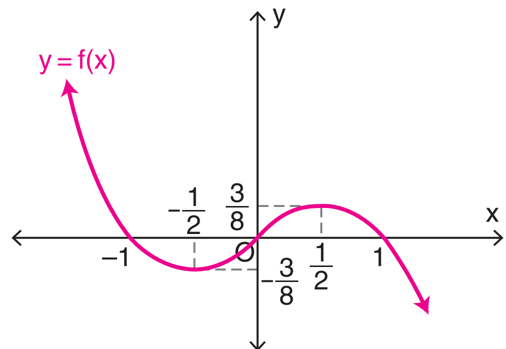
Verilenlere göre

a. Grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktaları,

b. Fonksiyonun pozitif ve negatif değerler aldığı aralıkları,

c. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları,

ç. Fonksiyonun [–1,1] da maksimum ve minumum değerlerini bulalım.



Çözelim:

a. Fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar

$y = 0 \Rightarrow -x^3 + x = 0$ ise $x.(-x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$ olur.

O hâlde fonksiyon, x eksenini –1, 0 ve 1 apsisli noktalarda kesmektedir.

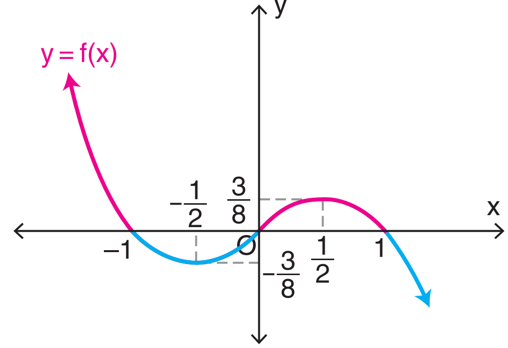
Fonksiyonun y eksenini kestiği nokta, x = 0 için

$y = f(x) = -x^3 + x \Rightarrow y = f(x) = 0 + 0 = 0$ olur.

O hâlde fonksiyon, y eksenini (0,0) noktasında kesmektedir.

b. Fonksiyonun pozitif değerler aldığı aralık, x ekseninin üstünde kalan kısımdır.

Yani fonksiyon, $(-\infty, -1) \cup (0,1)$ aralığında pozitif değerler alır. Fonksiyonun negatif değerler aldığı aralık ise x ekseninin altında kalan kısımdır. Yani fonksiyon, $(-1, 0) \cup (1,\infty)$ aralığında negatif değerler alır.



c. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyelim. Bunun için aşağıdaki tabloları inceleyelim.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–1/2
f(x)	24	13,125	6	1,875	0	–0,375

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ dir. Yani x değerleri artarken f(x) değerleri azaldığı için fonksiyon, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ aralığında azalandır. Şimdi de $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığını inceleyelim.

x	–1/2	0	–1/2
f(x)	–0,375	0	0,375

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan fonksiyon, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında artandır. Yani x değerleri artarken f(x) değerleri de arttığı için fonksiyon bu aralıkta artandır. Son olarak $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralığını inceleyelim.

x	1/2	1	1,5	2
f(x)	0,375	0	–1,875	–6

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi x değerleri artarken f(x) değerleri azaldığı için fonksiyon $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralığında azalandır.

ç. Fonksiyonun [–1,1] aralığındaki maksimum değeri, $x = \frac{1}{2}$ ye karşılık gelen $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ dir. Minumum değeri de $x = -\frac{1}{2}$ ye karşılık gelen $y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ dir.

Uygulayalım:

Yandaki grafik, bir şirketin ilk açıldığı yıldan 5. yıla kadar kâr ve zarar (milyon TL) durumunu göstermektedir.

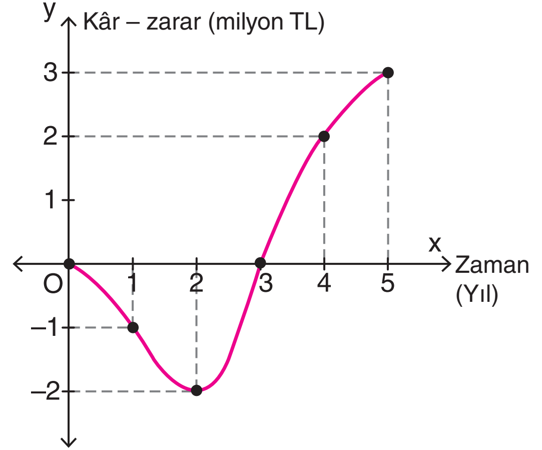
Verilenlere göre

a. Şirketin kâr - zarar durumunun en az ve en fazla olduğu yılı,

b. Şirketin ne kâr ne de zarar ettiği yılı,

c. Şirketin hangi yıllar arasında zarar, hangi yıllar arasında kâr ettiğini,

ç. Şirketin kârında hangi yıllar arasında düşüş, hangi yıllar arasında artış olduğunu bulalım.



Çözelim:

a. Grafiğe göre şirket, 2. yılda 2 milyon TL zarar etmiştir. O hâlde bu grafik bir fonksiyon grafiği olarak düşünülürse fonksiyonun minimum noktası, (2,–2) dir. Şirketin en fazla kâr sağladığı yıl, 5. yıldır. Şirket bu yılda 3 milyon TL kâr sağlamıştır. Yani fonksiyonun maksimum noktası, (5,3) tür.

b. Şirketin ne kâr ne de zarar ettiği yıl, 3. yıldır. Yani fonksiyonun x eksenini kestiği nokta, (3,0) olur.

c. Şirket (0,3) yıl aralığında zarar etmiştir. Yani fonksiyon, (0,3) aralığında negatiftir. Şirket, (3,5) yıl aralığında kâr etmiştir. Yani fonksiyon, (3,5) aralığında pozitiftir.

ç. Şirketin ekonomik anlamda düşüş yaptığı aralık, (0,2) dir. Yani fonksiyon, (0,2) aralığında azalandır. Şirketin kârı, (2,5) aralığında ekonomik anlamda artmıştır. Yani fonksiyon, (2,5) aralığında artandır.

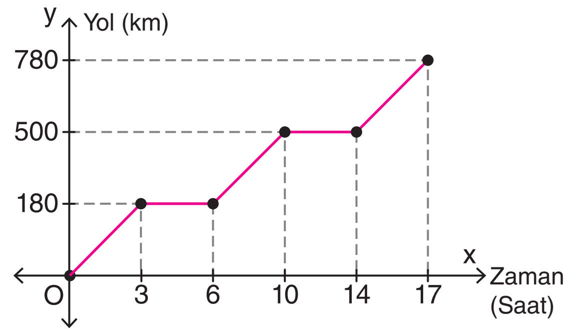
Uygulayalım:

Bir hareketlinin yol - zaman grafiği yanda verilmiştir.

Verilenlere göre hareketli,

a. 10. saat sonunda kaç km yol gitmiştir?

b. Kaç saat durağan kalmıştır? Bulalım.



Çözelim:

a. Hareketlinin yol - zaman grafiğine karşılık gelen fonksiyon, (10,500) noktasından geçmektedir. O hâlde hareketlinin 10. saatin sonunda 500 km yol gittiği sonucuna ulaşılır.

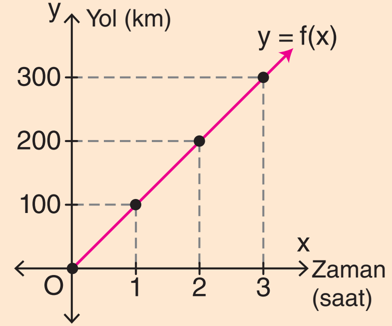
b. Hareketli, fonksiyonun grafiğinde de görüldüğü gibi (3,6) ve (10,14) aralıklarında durağan (sabit) kalmıştır.

O hâlde hareketli, (6 – 3) + (14 – 10) = 3 + 4 = 7 saat durağan kalmıştır.

Öğrenelim:

Değişim, aynı niteliğe ait iki nicelik arasındaki farktır. **Ortalama değişim hızı** ise aynı niteliğe ait iki nicelik arasındaki farkın zamana göre değişimidir.

Yandaki grafik, bir aracın zamana bağlı olarak aldığı yolu veren grafiktir. Buna göre aracın 2 ile 3. saatler arasındaki ortalama değişim hızını bulalım. Grafikte f(2) = 200 ve f(3) = 300 olarak verilmiştir.



O hâlde aracın bu saatler arasındaki ortalama değişim hızı,

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{300 - 200}{3 - 2} = 100 \text{ km/sa. olarak bulunur.}$$

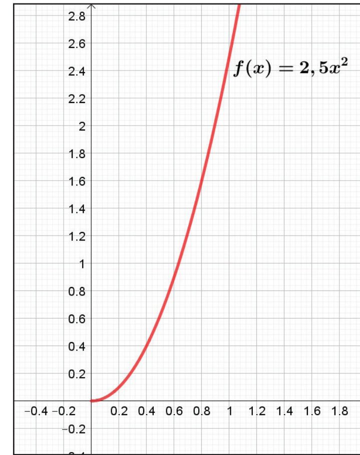
Ayrıca bu doğrunun eğimi, m = 100 dür.

Bu durumda bir fonksiyonun [a, b] daki ortalama değişim hızı, bu aralığın uç noktalarından geçen doğrunun yani kesenin eğimine karşılık gelir.

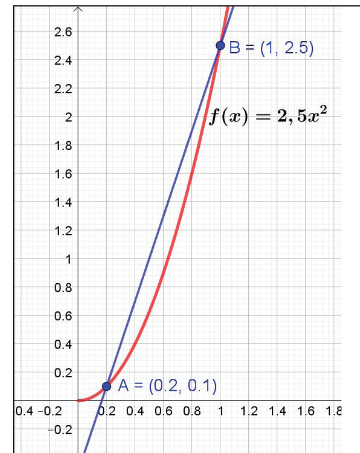
$$\text{Ortalama değişim hızı} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Keşfedelim:

1. Yandaki grafik, Ay'dan fırlatılan bir nesnenin x saniyede Ay'dan uzaklaşma miktarını ifade eden grafiktir. Uzaklaşma miktarı, x saniyede f(x) (metre) kadardır. Buna göre Ay'dan bırakılan bir nesnenin 0,2 saniye ile 1 saniye arası yani [0,2 , 1] aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.



2. Yandaki grafikte eğri üzerindeki (0,2, 0,1) ve (1, 2,5) noktalarından geçen d doğrusu çizilmiştir. Bu doğrunun eğimini bulunuz.



3. Fırlatılan nesnenin 0,2 saniye ile 1 saniye arasındaki ortalama değişim hızı ile d doğrusunun eğimini karşılaştırınız.

4. Ay'dan fırlatılan nesnenin [0,3, 0,7] aralığındaki ortalama değişim hızı ile hangi doğrunun eğiminin eşit olduğunu belirleyiniz.

▶ Buna göre ortalama değişim hızı ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

Uygulayalım:

Aşağıdaki tablo, zeytinyağının kütlesine bağlı hacmini göstermektedir.

Kütle (gr)	1,84	2,76	3,68	4,6	5,52
Hacim (cm^3)	2	3	4	5	6

Verilenlere göre

a. 3 ile 6 cm^3 hacimleri arası ortalama değişim hızını bulalım.

b. 2 ile 4 cm^3 hacimleri arası yani [2,4] aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.

c. a ve b adımlarından elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırarak yorumlayalım.

Çözelim:

a. Tabloda verilen değerlere göre zeytinyağının 3 ile 6 cm^3 hacimleri arasındaki ortalama değişim hızını bulmak için hacmi V(cm^3), kütleyi de m (gr) ile gösterelim.

V = 3 için m = 2,76, V = 6 için m = 5,52 değerleri kullanılır.

$$\text{Ortalama değişim hızı} = \frac{\text{Kütledeki değişim}}{\text{Hacimdeki değişim}} \text{ olduğundan}$$

$$\text{Ortalama değişim hızı} = \frac{5{,}52 - 2{,}76}{6 - 3} = 0{,}92 \text{ gr/cm}^3 \text{ bulunur.}$$

b. V = 2 için m = 1,84 , V = 4 için m = 3,68 olarak verilmiştir. Buna göre istenen ortalama değişim hızı,

$$\text{Ortalama değişim hızı} = \frac{3{,}68 - 1{,}84}{4 - 2} = 0{,}92 \text{ gr/cm}^3 \text{ bulunur.}$$

c. Her iki adımda da bulunan ortalama değişim hızının eşit çıkması, tablo ile verilen nicelikler arasında doğrusal bir ilişkinin olduğunun göstergesidir. Ortalama değişim hızı yani eğim 0,92 olduğuna göre bu ilişki, m(V) = 0,92.V biçiminde bir fonksiyona karşılık gelir.

Bulunan 0,92 gr/cm^3 değeri, fiziksel anlamda zeytinyağının yoğunluk (özkütle) değerine karşılık gelir.

Uygulayalım:

Bir taş belli bir hız ile 20 m yükseklikten yukarı doğru atılıyor. t saniye sonra taşın yüksekliğini veren cebirsel ilişki $h(t) = 2 + 20.t - 4{,}8.t^2$ şeklinde modelleniyor.

Buna göre taşın t = 1 ve t = 3 saniyeleri arası yani [1,3] aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.

Çözelim:

Cebirsel olarak verilen ilişkiden

$h(1) = 2 + 20.1 - 4{,}8.1^2 = 17{,}2$ m ve

$h(3) = 2 + 20.3 - 4{,}8.3^2 = 18{,}8$ m bulunur.

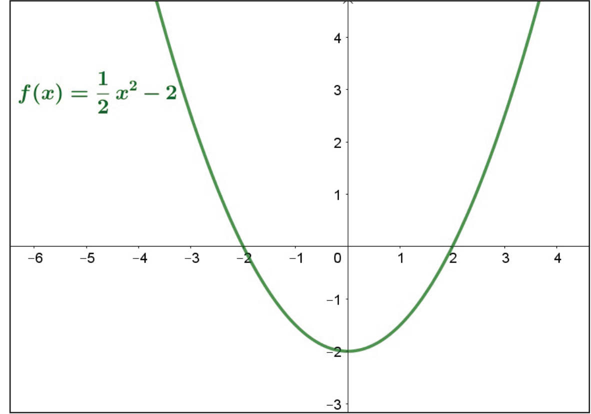
O hâlde taşın [1,3] aralığındaki ortalama değişim hızı,

$$\text{Ortalama değişim hızı} = \frac{h(3) - h(1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{18{,}8 - 17{,}2}{2} = 0{,}8 \text{ m/sn. olarak bulunur.}$$

Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ fonksiyonunun GeoGebra yazılımında çizilmiş grafiği verilmiştir. Buna göre



a. Fonksiyonun [–3,–1] aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.

b. Fonksiyonun [1,3] aralığındaki ortalama değişim hızını bulup yorumlayalım.

Çözelim:

a. [–3,–1] aralığındaki ortalama değişim hızı için f(–3) ve f(–1) değerlerini bulalım.

$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 - 2 = \frac{9}{2} - 2$ ise

$f(-3) = \frac{5}{2} = 2,5$ olur.

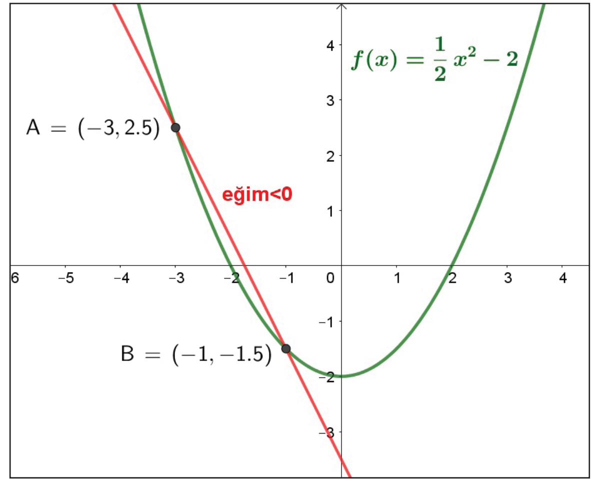
$f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^2 - 2 = \frac{1}{2} - 2$ ise

$f(-1) = -\frac{3}{2} = -1,5$ olur.

O hâlde bu aralıktaki ortalama değişim hızı,

$$\frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{-1,5 - 2,5}{2} = -2 \text{ dir.}$$

Ortalama değişim hızının negatif olması, $(-3, -\frac{5}{2})$ ve $(-1, -\frac{3}{2})$ noktalarından geçen kesenin eğiminin negatif olduğu anlamına gelir. Bu da [–3, –1] aralığında fonksiyonun azalan olduğunu gösterir. Yandaki grafikte bu durum gösterilmiştir.

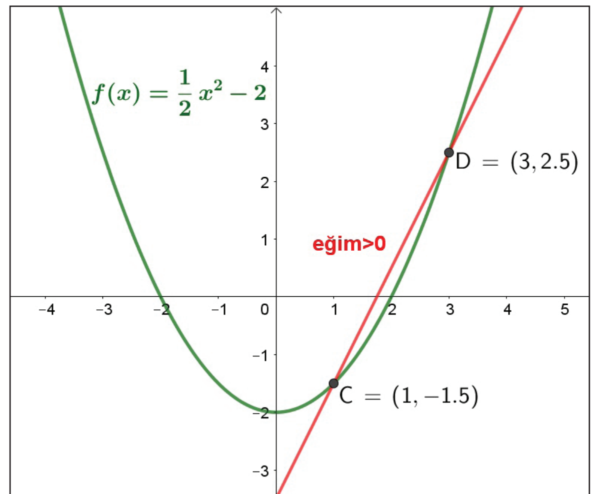


b. Verilen aralık için f(1) = –1,5 ve f(3) = 2,5 bulunur.

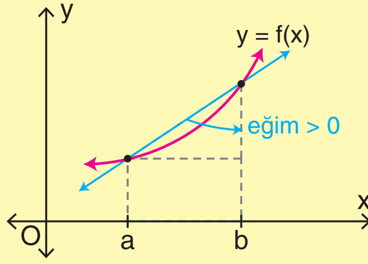
[1,3] aralığındaki ortalama değişim hızı,

$$= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2,5 - (-1,5)}{2} = 2 \text{ dir.}$$

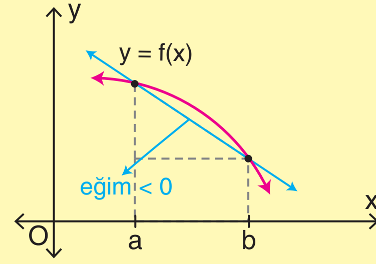
Ortalama değişim hızının pozitif olması, (1,–1,5) ve (3, 2,5) noktalarından geçen kesenin eğiminin pozitif olduğu anlamına gelir. Bu da [1,3] aralığında fonksiyonunun artan olduğunu gösterir. Yandaki grafikte bu durum gösterilmiştir.



Dikkat Edelim!



a. Verilen f fonksiyonuna göre [a,b] aralığında bu aralığın uç noktalarından geçen doğrunun eğimi pozitiftir. Buna göre fonksiyon, bu aralıkta artandır.



b. Verilen f fonksiyonuna göre [a,b] aralığında bu aralığın uç noktalarından geçen doğrunun eğimi negatiftir. Buna göre fonksiyon, bu aralıkta azalandır.

Uygulayalım:

Aşağıdaki tabloda bir fonksiyona ait x ve f(x) değerleri görülmektedir.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–3	–2	0	2	2,5	3	–6	–7	–8

Verilenlere göre

a. Fonksiyonun [–3,0] aralığında ortalama değişim hızını bulup fonksiyonun bu aralıkta artan mı, azalan mı olduğunu belirleyelim.

b. Fonksiyonun yukarıda verilen hangi aralıkta ortalama değişim hızının $-\frac{8}{3}$ olduğunu bulalım.

Çözelim:

a. Fonksiyonun [–3,0] aralığındaki ortalama değişim hızı için f(–3) = 0 ve f(0) = 3 olduğundan

Ortalama değişim hızı $= \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{3 - 0}{0 + 3} = 1$ dir.

Ortalama değişim hızı pozitif olduğundan verilen fonksiyonun [–3, 0] da çizilen keseninin eğitimi de pozitif olacaktır. Bu durumda fonksiyon, [–3, 0] da artandır.

b. Fonksiyonun hangi aralıkta ortalama değişim hızının $-\frac{8}{3}$ olduğunu bulmak için f(x) teki değişimin 8, x teki değişimin 3 olduğu aralıkları inceleyelim.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–3	–2	0	2	2,5	3	–6	–7	–8

$-5 \xrightarrow{+3} -2 \xrightarrow{+3} 1$

$-3 \xrightarrow{+5} 2 \xrightarrow{-8} -6$

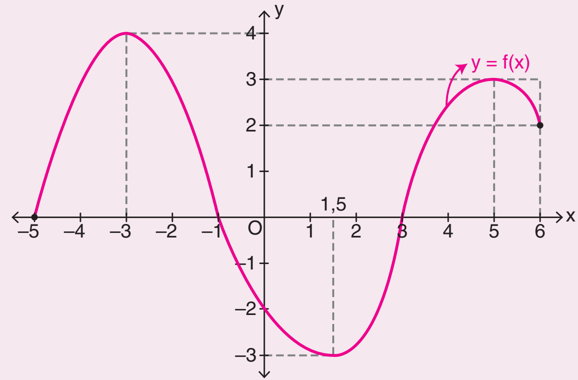
Örneğin – 5 ile – 2 arasında x teki değişim, 3 tür. Fakat f(–2) = 2 ile f(–5) = –3 arasındaki değişim, 5 tir. Bu aralıktaki ortalama değişim hızı, $-\frac{8}{3}$ değildir.

[–2,–1] aralığını göz önüne alırsak f(–2) = 2 ve f(1) = –6 dır. Yani bu aralıkta

Ortalama değişim hızı $= \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{-6 - 2}{1 - (-2)} = -\frac{8}{3}$ bulunur. Demek ki [–2,1] aralığındaki ortalama değişim hızı, $-\frac{8}{3}$ tür.

Pekiştirelim:

1. Yanda f: [–5,6] → [–3,4] ile tanımlı y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



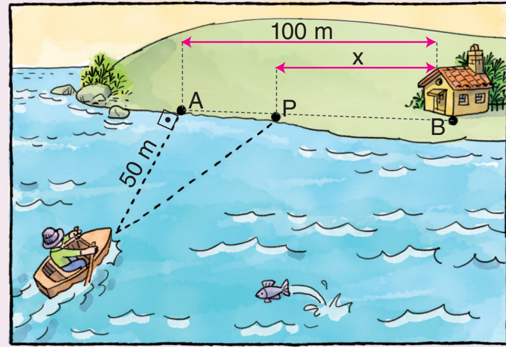
a. Grafiğin x eksenini kestiği noktaları belirleyiniz.

b. Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları belirleyiniz.

c. Fonksiyonun maksimum ve minimum olduğu noktaları bulunuz.

c. Fonksiyonun [2, 4] ve [–2, –1] aralıklarında ortalama değişim hızını bulup bu aralıklarda fonksiyonun artan ve azalanlığını belirleyiniz.

2. Ali, bayramlarda ilk olarak ailesine giderek anne ve babasının elini öpmekte ve onları ihmal etmemektedir. Kıyıya en yakın nokta olan A noktasına 50 m uzaklıktaki kayıkta bulunan Ali, A noktasından 100 m uzaklıktaki B noktasında olan ailesine ulaşmak istemektedir. A ile B noktaları arasındaki P noktasına ulaşıp oradan da eve yürümeyi planlamaktadır. Saatte 30 km kürek çektiğini ve 40 km/sa. hız ile yürüdüğünü düşünerek Ali'nin eve varış süresi olan t yi, x in bir fonksiyonu biçiminde yazınız. Buna göre Ali'nin 5 dakika ile 10 dakika arasında gittiği yolun ortalama değişim hızını bulunuz.



3. Bir arabanın dakikada gittiği yol yandaki tabloda verilmiştir.

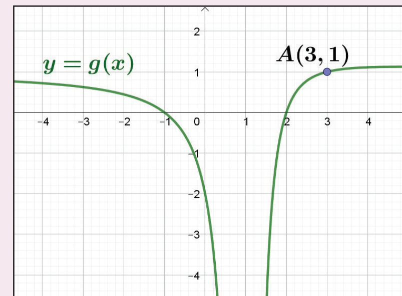
Zaman (t) (dk.)	0	1	2	3	4	5	6
Yol (s) (m)	0	4	16	36	64	100	144

Verilenlere göre

a. Arabanın gittiği yol ile zaman ilişkisini kullanarak aldığı yolun zamana bağlı değişimini modelleyiniz.

b. Arabanın [2,5] dakikalar aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

4. Yandaki y = g(x) fonksiyonunun grafiğidir.



a. Grafiğin eksenleri kestiği noktaların koordinatlarını,

b. Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları,

c. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

5. Belli bir zaman aralığında ortalama değişim hızı 68 km/sa olan hareketli 340 km yol aldığında aradan kaç saat geçmiştir?

3.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri

Aşağıda basketbol topunun izlediği yol, nasıl bir eğriye karşılık gelmektedir? Bu gibi eğrilere nerelerde rastlanır? Örnekler veriniz.

3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri

Hatırlayalım:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemine ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini sağlayan x değerini ya da değerlerini bulurken yapılan işlemlere denklem çözmek, denklem çözümü sonucunda elde edilen her bir çözüme denklemin kökü adı verilir.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi çözme yollarından biri (eğer verilen denklem çarpanlarına ayrılıyorsa) çarpanlarına ayırarak denklemin kökünü ya da köklerini bulmaktır.

Örneğin $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadesi

$ax^2 + bx + c = (mx + n).(px + r)$ biçiminde çarpanlarına ayrılıyor ise

$ax^2 + bx + c = (mx + n).(px + r) = 0$ yazılarak

$mx + n = 0$ veya $px + r = 0$ elde edilen birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler çözülür ve verilen denklemin kökleri bulunur.

Örneğin $x^2 - 100 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 10) = 0 \Rightarrow x = 10 \wedge x = -10$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 5 \wedge x = 3$ olur.

Verilen ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdeki cebirsel ifade çarpanlara ayrılmıyorsa $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde önce denklemin diskriminantı denilen $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesine bakılır.

1. $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.

Bu kökler, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ eşitlikleri ile bulunur.

2. $\Delta = 0$ ise kökler, $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ile bulunur.

3. $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek sayılar kümesinde kökü yoktur.

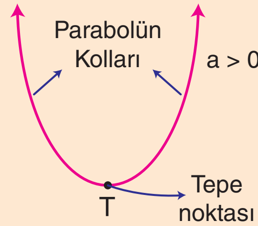
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri toplamı, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ve çarpımı $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$ olur.

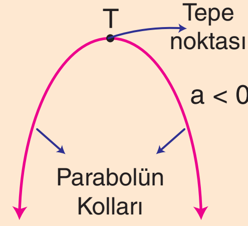
Öğrenelim:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir.

$f = \{(x,y) \mid y = ax^2 + bx + c\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ve } a \neq 0\}$ kümesinin elemanlarının analitik düzlemde karşılık gelen noktalarına f fonksiyonunun **grafiği** denir. İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerine özel olarak **parabol** adı verilir.

$a \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği a nın pozitiflik - negatiflik durumuna göre aşağıdaki gibidir.



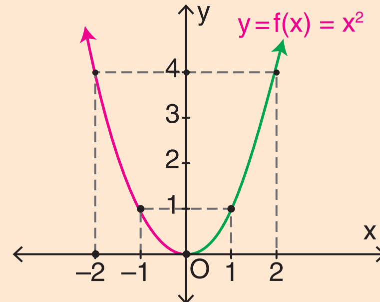


- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunun $a > 0$ için grafiğinde (parabol) kolları yukarı doğrudur. Bu durumda parabolün minumum değeri olan T noktasına parabolün **tepe noktası** denir.

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunun $a < 0$ için grafiğinde (parabol) kollar aşağı doğrudur. Bu durumda parabolün maksimum değeri olan T noktasına parabolün **tepe noktası** denir.

Örneğin $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun (yani $a > 0$ için) grafiğinin (parabolün) artan ve azalanlığını inceleyelim. $y = f(x) = x^2$ için değer tablosu yapalım. Analitik düzlemde bu noktaları yerleştirelim.

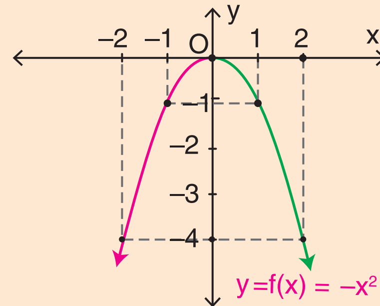
x	–2 ↗	–1 ↗	0 ↗	1 ↗	2
y	4 ↘	1 ↘	0 ↗	1 ↗	4



Grafikten de görüldüğü gibi $y = x^2$ nin grafiği olan parabol $(-\infty, 0)$ aralığında azalan, $(0, \infty)$ aralığında artandır. Bundan dolayı parabolün kolları yukarı doğrudur.

Benzer şekilde $y = f(x) = -x^2$ fonksiyonunun (yani $a < 0$) için grafiğinin (parabol) artan ve azalan olduğu aralığı belirleyelim. Bunun için $y = f(x) = -x^2$ için değer tablosu yapalım. Analitik düzleme bu noktaları yerleştirip parabolü çizelim.

x	–2 ↗	–1 ↗	0 ↗	1 ↗	2
y	–4 ↗	–1 ↗	0 ↘	–1 ↘	–4



Grafikten de görüldüğü gibi $y = -x^2$ nin grafiği olan parabol $(-\infty, 0)$ aralığında artan, $(0, \infty)$ aralığında azalandır. Bundan dolayı parabolün kolları aşağıya doğrudur.

Şimdi parabolün tepe noktasının koordinatları olan T (r, k) ikilisinin fonksiyon $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde verildiğinde nasıl elde edileceğini açıklayalım.

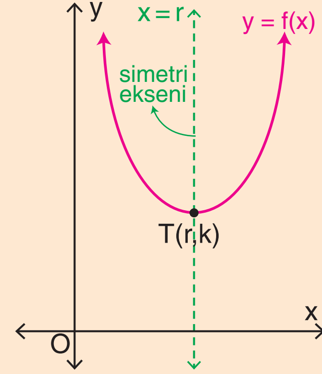
$ax^2 + bx + c$ cebirsel ifadesi, tam kareye tamamlama yolu ile $a(x-r)^2 + k$ cebirsel ifadesine dönüştürülebilir. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ bulunur.}$$



Buradan görüleceği gibi $f(x) = a(x-r)^2 + k$ fonksiyonunda aranan r ve k değerleri, $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olarak bulunur. Ayrıca elde edilen ifadeden de görüldüğü gibi $f(r) = k$ dir.

Elde edilen $T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ noktasına,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin (yani parabolün) **tepe noktası** adı verilir.

Yukarıda $y = f(x)$ eğrisi üzerinde tepe noktası görülmektedir. Ayrıca parabolün kolları, tepe noktasından geçen y eksenine paralel olan doğruya göre simetriktir. Yani $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğindeki kollar, $x = r = -\frac{b}{2a}$ **simetri eksenine** göre simetriktir.

Uygulayalım:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $f(x) = -x^2 + 8x - 14$ fonksiyonunun grafiği için tepe noktasını ve simetri eksenini belirleyip çizelim.

Çözelim:

$y = -x^2 + 8x - 14$ fonksiyonunun tepe noktası,

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2.(-1)} = 4$ ve

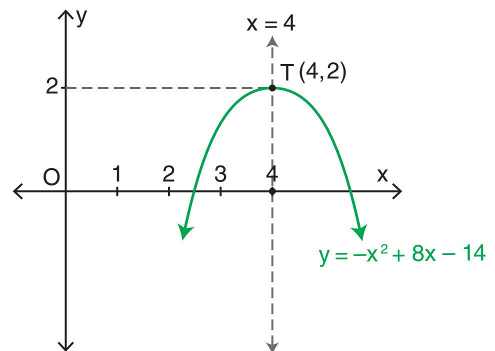
$k = f(r) \Rightarrow k = f(4) = -4^2 + 8.4 - 14 = 2$ olur.

Yani T(4, 2) olarak buluruz.

Bu durumda fonksiyonun simetri ekseni $x = 4$ doğrusu olur.

Fonksiyonda $a = -1 < 0$ olduğundan grafik yandaki gibi olur.

Tepe noktası T(4, 2) ve kolları aşağıya doğru olan parabol yandaki gibi çizilir.



Uygulayalım:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $y = f(x) = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonunun grafiği olan parabolün tepe noktasını ve simetri eksenini bulalım. Parabol üzerinde seçilen herhangi bir noktanın parabolün simetri eksenine göre simetriğinin yine parabol üzerinde olduğunu gösterelim.

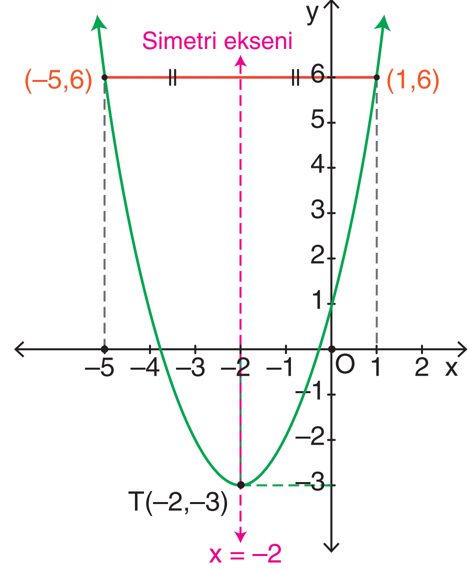
Çözelim:

Önce fonksiyon grafiğinin tepe noktasını bulalım.

$a = 1$, $b = 4$ ve $c = 1$ olmak üzere

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2.1} = -2$ ve

$k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4.1.1 - 4^2}{4.1} = -3$ olur.



k değeri, fonksiyonda $x = r$ yazılarak da bulunabilir.

$r = -2$ olduğundan

$f(-2) = (-2)^2 + 4.(-2) + 1 = -3$ bulunur.

O hâlde $y = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası, T(–2, –3) tür. Simetri ekseni de $x = -2$ doğrusudur. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

Örneğin eğri üzerinde $x = -5$ için

$f(-5) = (-5)^2 + 4.(-5) + 1 = 25 - 20 + 1$

$f(-5) = 6$ bulunur.

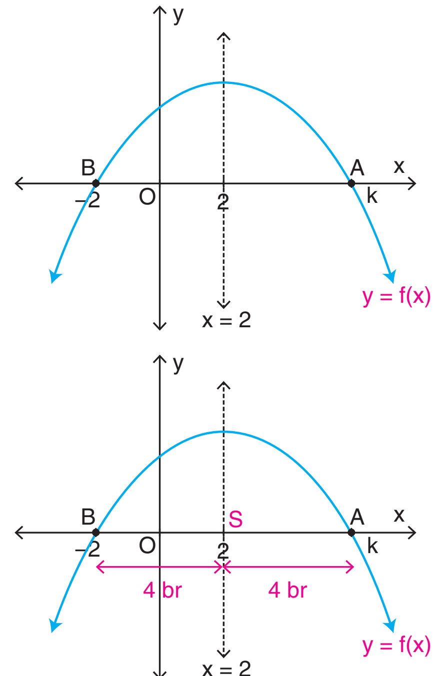
Yani (–5, 6) noktası, eğri üzerindedir.

(–5, 6) noktasının $x = -2$ doğrusuna göre simetriği olan nokta, (1, 6) noktasıdır.

Bu nokta da $f(1) = 1^2 + 4.1 + 1 = 6$ olduğundan parabol üzerindedir.

Uygulayalım:

Yandaki grafik, $y = f(x)$ fonksiyonuna ait bir paraboldür. Bu parabolün simetri ekseni $x = 2$ doğrusudur. Parabolün x eksenini kestiği noktalar B(–2, 0) ve A(k, 0) ise A noktasının apsisini bulalım.



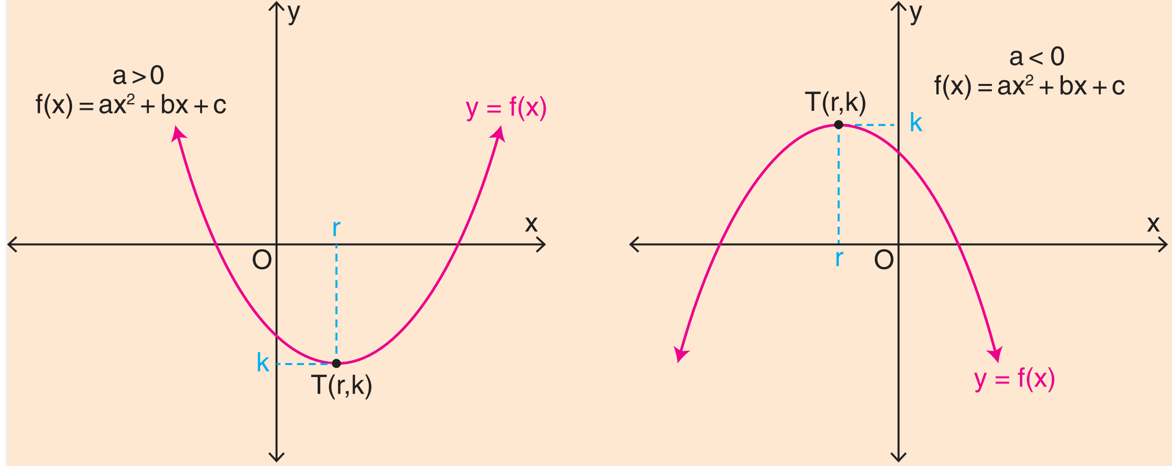
Çözelim:

Simetri ekseni parabolün kollarına eşit uzaklıkta olduğundan $|BS| = |2 - (-2)| = 4$ br dir. S noktası, B ile A nın orta noktasıdır. Buna göre

$|BS| = |SA| = 4$ br dir. $|SA| = k - 2 = 4$ ise $k = 6$ olur.

Öğrenelim:

Aşağıda ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların ($y = f(x) = ax^2 + bx + c$), $a > 0$ veya $a < 0$ iken grafikleri ve tepe noktaları verilmiştir.



Grafiklerde görüldüğü gibi $a > 0$ iken $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en küçük değeri vardır. $a < 0$ iken ise $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en büyük değeri vardır. En büyük ve en küçük değer, grafiklerden görüleceği gibi parabolün tepe noktasının ordinatına karşılık gelir.

$T(r, k)$ tepe noktasının koordinatlarına göre düzenlenen ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon, $a, b, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - r)^2 + k$ biçimindedir.

Fonksiyon grafiğinin tepe noktası ile fonksiyonun en küçük ya da en büyük değerini cebirsel olarak ilişkilendirelim.

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ise

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ biçiminde yazılabilir.

1. $a > 0$ için $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ olur. Bu durumda

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{4ac - b^2}{4a} \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

O hâlde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun **en küçük değeri**, tepe noktasının ordinatı olan $y = k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ değeridir. Fonksiyon, bu değeri $x = r = -\frac{b}{2a}$ apsisli noktada alır.

2. $a < 0$ için $a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 \leq 0$ olur. Bu durumda

$a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

O hâlde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun **en büyük değeri**, tepe noktasının ordinatı olan $y = k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ değeridir. Fonksiyon, bu değeri $x = r = -\frac{b}{2a}$ apsisli noktada alır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en büyük ya da en küçük değeri, $x = -\frac{b}{2a}$ için $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olarak elde edilir.

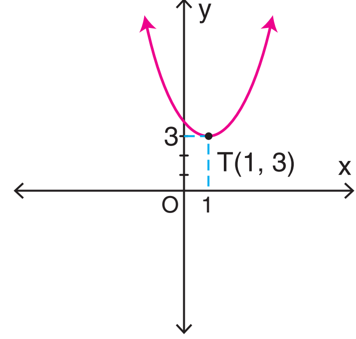
Uygulayalım:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ fonksiyonunun en küçük değerini bularak grafiğini çizelim.

Çözelim:

Verilen fonksiyonun denklemi, tepe noktası T(r, k) olmak üzere $y = a(x-r)^2 + k$ biçiminde verilmiştir. Bu durumda $y = 2(x-1)^2 + 3$ verildiğine göre r = 1 ve k = 3 tür. O hâlde fonksiyonun grafiğinin tepe noktası T(1, 3) olur. Verilen fonksiyonda a = 2 > 0 olup parabolün kolları yukarı doğrudur. O hâlde parabolün en küçük değeri, tepe noktasının ordinatı kadardır yani 3 tür.

Tepe noktası T(1, 3) olup kolları yukarı olan parabol yandaki gibi çizilir.



Uygulayalım:

$x, y \in \mathbb{R}$, $2x + y = 12$ ise $x.y$ nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözelim:

$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$ olur. $x.y = x.(12-2x) = 12x - 2x^2$ ifadesinin en büyük değeri isteniyor. Bu durumda $f(x) = -2x^2 + 12x$ parabolünün en büyük değerini bulmalıyız.

$r = -\frac{12}{-4} = 3 \Rightarrow k = f(3) = -2.3^2 + 12.3 = 18$ olur.

Bu durumda $x.y$ nin en büyük değeri, 18 bulunur.

Uygulayalım:

$a, b \in \mathbb{R}$, $A = 2a^2 - 8a + 7$ ve $B = -b^2 - 4b + 3$ olarak veriliyor. A nın en küçük değeri m ve B nin en büyük değeri n ise m.n çarpımının değerini bulalım.

Çözelim:

A ve B ifadelerine karşılık gelen eğriler paraboldür.

$f(a) = 2a^2 - 8a + 7 \Rightarrow r = -\frac{-8}{4} = 2 \Rightarrow k = f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 7 = -1$ olur.

O hâlde $m = -1$ bulunur.

$g(b) = -b^2 - 4b + 3 \Rightarrow r = -\frac{-4}{-2} = -2 \Rightarrow k = g(-2) = -4 + 8 + 3 = 7$ olur.

O hâlde $n = 7$ bulunur.

Dolayısıyla $m - n = (-1).7 = -7$ olur.

Öğrenelim:

a, b, c $\in$ $\mathbb{R}$, a $\neq$ 0 olmak üzere f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = $ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun çizimini yapmak için parabolün eksenleri kestiği noktaları belirleyelim.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

$\Delta > 0$ için denklemin x_1 ve x_2 gibi farklı iki gerçek kökü olduğunu,

$\Delta = 0$ için denklemin birbirine eşit x_1 gibi tek kökü olduğunu,

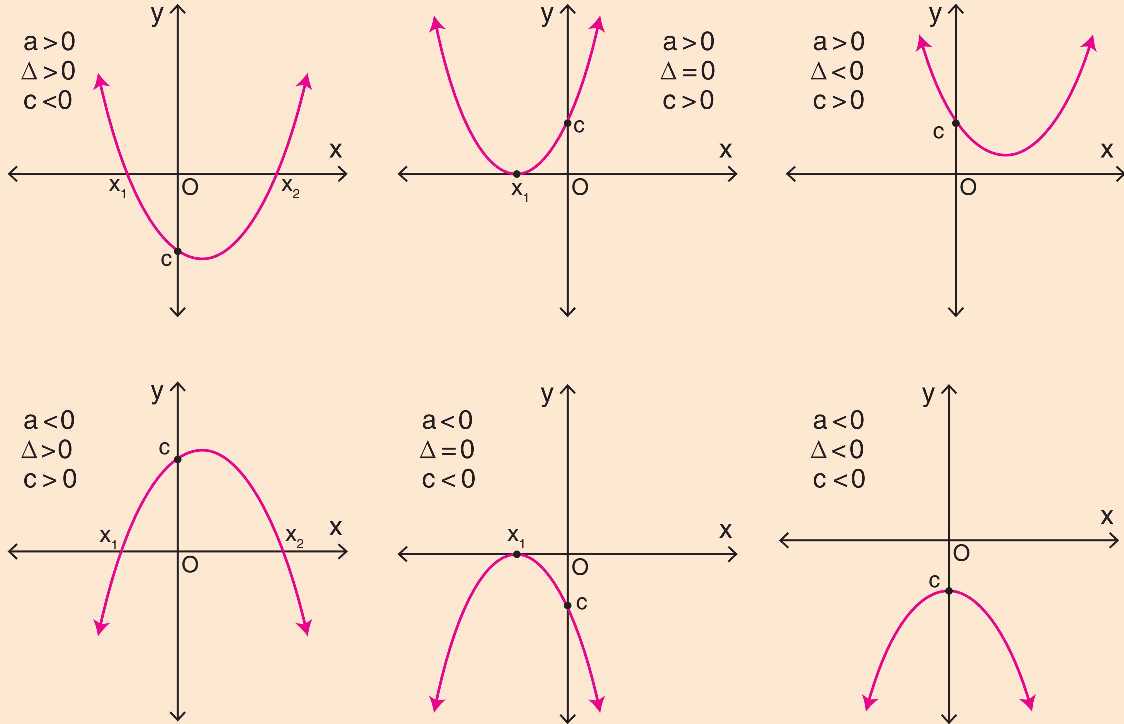
$\Delta < 0$ için denklemin gerçek kökleri olmadığını biliyoruz.

O hâlde $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 gibi birbirinden farklı iki kökü varsa $f(x_1) = 0$ ve $f(x_2) = 0$ olduğundan f(x) eğrisi, x eksenini $(x_1, 0)$ ve$(x_2, 0)$ noktalarında keser.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1 gibi tek kökü varsa $f(x_1) = 0$ olduğundan f(x) eğrisi, x eksenini sadece $(x_1, 0)$ noktasında keser. Yani bu noktada f(x) eğrisi x eksenine teğet olur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökü yoksa o zaman f(x) eğrisi, x eksenini kesmez.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun y eksenini kestiği noktayı bulmak için ise x = 0 iken y değeri bulunur. Yani f(x) eğrisinin eksenini kestiği nokta, (0, f(0)) = (0, c) noktasıdır.



Buna göre $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin çizimi (parabolün çizimi), aşağıdaki adımlar izlenerek yapılır.

1. Adım: Tepe noktası bulunur.

2. Adım: Eksenleri kestiği noktalar bulunur.

3. Adım: Bazı x sayıları için y = f(x) değerleri bulunarak fonksiyona ait (x, f(x)) ikililerinin bulunduğu **değişim tablosu** adı verilen tablo oluşturulur. Değişim tablosuna tepe noktasının koordinatlarını yazmakta fayda vardır. Çünkü fonksiyonun tepe noktasına göre artan ve azalanlığı buradan görülür. Burada artan veya azalan olduğu aralıklar da belirlenebilir.

4. Adım: Grafik, bu adımlar yardımıyla çizilir.

Uygulayalım:

f: ℝ → ℝ, y = f(x) = $x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Grafiğin adım adım çizimi aşağıdaki gibidir.

1. Adım: Verilen fonksiyonun grafiğinin çiziminde tepe noktasının koordinatlarını bulalım.

a = 1, b = –2 ve c = – 3 olduğundan

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.1} = 1$ ve $k = f(1) = 1^2 - 2.1 - 3 = -4$ bulunur.

O hâlde parabolün tepe noktası, T(1, –4) tür.

2. Adım: Parabolün x eksenini kestiği noktalar varsa bulalım. Bunun için $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin köklerini belirleyelim.

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$

$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ ve $x_2 = -1$ dir.

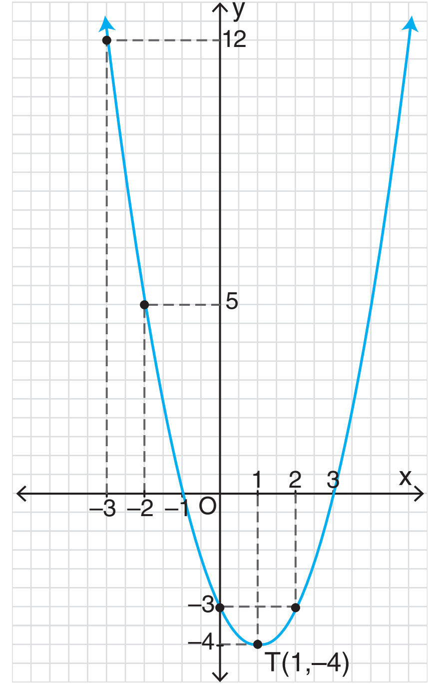
Demek ki parabol x eksenini (3, 0) ve (–1, 0) noktalarında keser. f(0) = –3 olduğundan parabol, y eksenini (0, –3) noktasında keser.

3. Adım: Fonksiyonun bazı x değerleri için değişim tablosunu yapalım.

x	–∞	–3	–2	–1	0	1	2	3	∞
y = f(x)		12 ↘	5 ↘	0 ↘	–3 ↘	–4 ↗	–3 ↗	0	

O hâlde fonksiyonun grafiği (–∞ , 1) da azalan, (1, ∞) da artan bir fonksiyondur.

4. Adım: Bu işlemlerden sonra fonksiyonun grafiği yandaki gibi çizilir.



Uygulayalım:

f: ℝ → ℝ olmak üzere y = f(x) = $-x^2 + 6x - 8$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Fonksiyonda a < 0 olduğundan parabolün kolları aşağıya doğrudur. $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2.(-1)} = 3$ ve

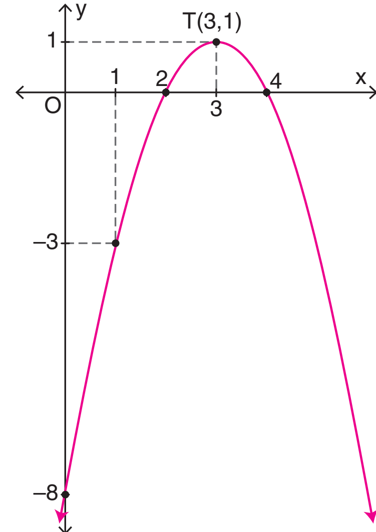
$k = f(3) = -3^2 + 6.3 - 8 = 1$ ise T(3,1) dir.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4.(-1).(-8) = 4 > 0$ olduğundan iki farklı gerçek kök vardır.

$x_{1,2} = \frac{-6 \mp \sqrt{4}}{2.(-1)} \Rightarrow x_1 = \frac{-6-2}{-2} = 4$ ve

$x_2 = \frac{-6+2}{-2} = 2$ bulunur. x = 0 için y = f(0) = –8 bulunur.



O hâlde parabolün eksenleri kestiği noktalar, (2,0), (4,0) ve (0,–8) dir.

Değişim tablosu yapalım:

x	–∞	0	1	2	3	4	+∞
y = f(x)		–8 ↗	–3 ↗	0 ↗	1 ↘	0	

Belirlenen noktaları analitik düzlemde işaretleyerek parabolü bir önceki sayfadaki gibi çizebiliriz.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x - 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Parabolün tepe noktasını, eksenleri kestiği noktalarını bulup değişim tablosunu yaparak grafiği çizelim.

1. Adım: Tepe noktasının koordinatları, $(r, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ dır.

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2.3} = -\frac{1}{6}$ ve $k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.3.(-2) - 1^2}{4.3} = -\frac{25}{12}$ ise $T\left(-\frac{1}{6}, -\frac{25}{12}\right)$ olur.

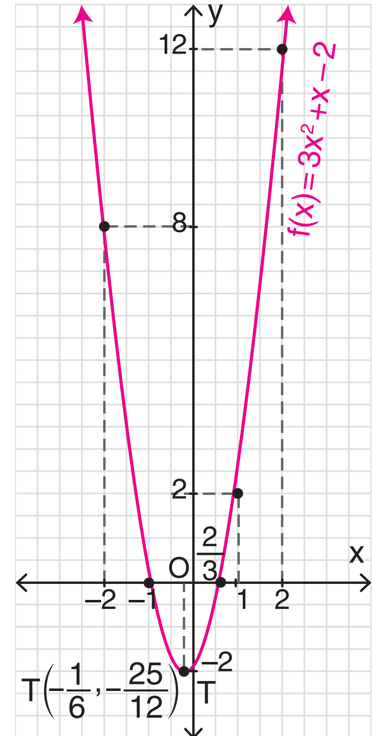
2. Adım: $f(x) = 3x^2 + x - 2$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaları bulalım.

$3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4.3.(-2) = 25$ tir. $x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{25}}{2.3} \Rightarrow x_1 = -1$ ve $x_2 = \frac{2}{3}$ bulunur.

Grafiğin y eksenini kestiği nokta ise x = 0 için y = f(0) = –2 olur. O hâlde grafiğin eksenleri kestiği noktalar, (–1, 0), $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ve (0, –3) tür.

3. Adım: Bazı x değerleri için değişim tablosunu yapalım.

x	–∞	–2	–1	$-\frac{1}{6}$	0	1	2	+∞
y = f(x)		8 ↘	0 ↘	$-\frac{25}{12}$ ↗	–2 ↗	2 ↗	12	



Fonksiyon $(-\infty\ -\frac{1}{6})$ aralığında azalan, $(-\frac{1}{6}, \infty)$ aralığında artandır.

4. Adım:

Bulunan değerler analitik düzlemde yerleştirilerek bu noktalardan geçen parabol yandaki gibi çizilir.

Uygulayalım:

f: ℝ → ℝ için $y = f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

$y = f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ fonksiyonuna ait parabolün tepe noktası,

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2.3} = -1$ ve $k = f(-1) = 3.(-1)^2 + 6.(-1) + 5 = 2$ olur.

Yani tepe noktasının koordinatları, T(–1,2) dir.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

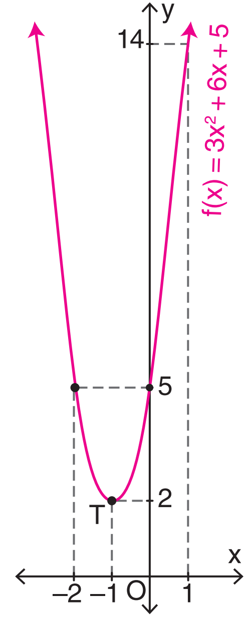
$3x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4.3.5 = 36 - 60 = -24$ olur.

$\Delta < 0$ olduğundan parabol, x eksenini kesmez. Parabol y eksenini x = 0 için y = f(0) = 5 yani (0,5) noktasında keser.

Değişim tablosu yapalım.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y = f(x)		5 ↘	2 ↗	5 ↗	14	

Bulduğumuz noktaları analitik düzlemde yerleştirerek y = f(x) fonksiyonunun grafiğini yandaki gibi çizebiliriz.



Uygulayalım:

f: ℝ → ℝ için $y = f(x) = -2x^2 - 3x + 9$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

$a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.

$y = f(x) = -2x^2 - 3x + 9$ fonksiyonuna ait parabolün tepe noktası,

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2.(-2)} = -\frac{3}{4}$ ve

$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.(-2).9 - (-3)^2}{4.(-2)} = \frac{81}{8}$ ise

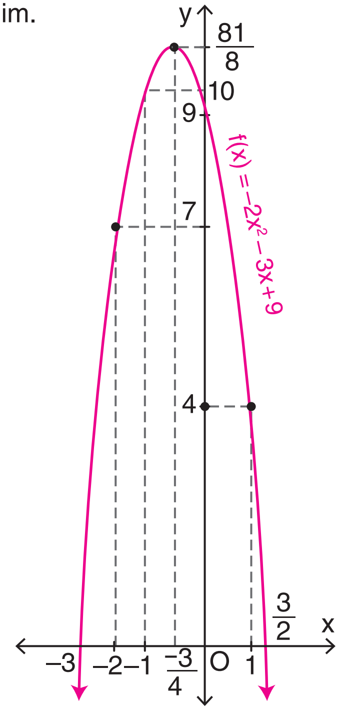
$T\left(-\frac{3}{4}, \frac{81}{8}\right)$ bulunur. Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$-2x^2 - 3x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4.(-2).9 = 81 > 0$ dır.

$x_{1,2} = \frac{-(-3) \mp \sqrt{81}}{2.(-2)} \Rightarrow x_1 = \frac{3-9}{-4} = \frac{3}{2}$ ve $x_2 = \frac{3+9}{-4} = -3$ bulunur. x = 0 için y = f(0) = 9 bulunur. O hâlde parabolün eksenleri kestiği noktalar, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, (–3,0) ve (0,9) dur.

Değişim tablosu yapalım.

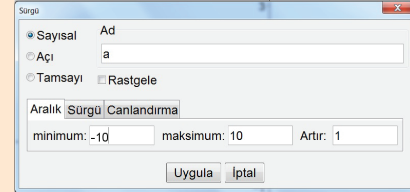
x	$-\infty$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	0	1	$+\infty$
y = f(x)		0 ↗	7 ↗	10 ↗	$\frac{81}{8}$ ↘	9 ↘	4	



Belirlenen noktaları analitik düzlemde işaretleyerek parabolü yukarıdaki gibi çizebiliriz.

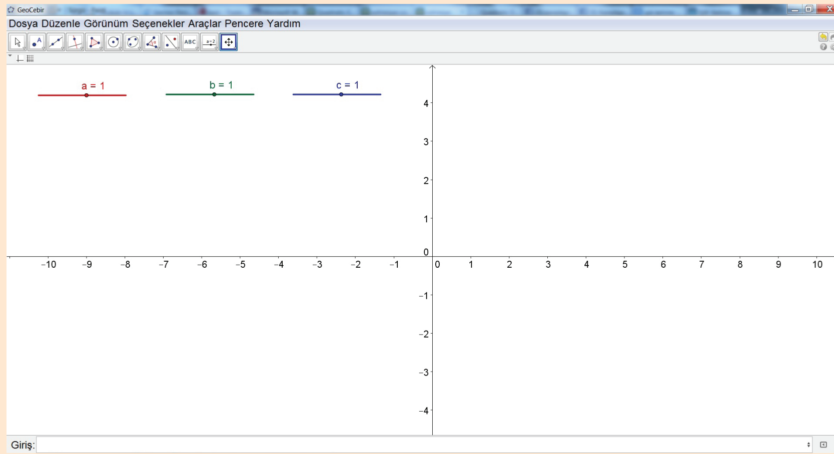
Öğrenelim:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere a, b, c $\in \mathbb{R}$, a $\neq$ 0 için y = f(x) = $ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun katsayılarındaki değişimin fonksiyonun grafiği üzerine etkisini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak inceleyelim. Bunun için ücretsiz bir yazılım olan GeoGebra yazılımını kullanalım.



Önce a, b ve c katsayılarındaki değişimin grafik üzerindeki etkisini belirlemek için a, b ve c nin farklı değerleri üzerinde inceleme yapabileceğimiz sürgüler oluşturalım. Yazılımda a=2 Sürgü sürgü araç çubuğunu tıklayarak çıkan pencerede a adlı sayısal sürgü oluşturalım. Burada yandaki gibi minumum değere –10, maksimum değere 10 girip artırmasını 1 olacak biçimde yazıp a sürgüsünü oluşturabiliriz.

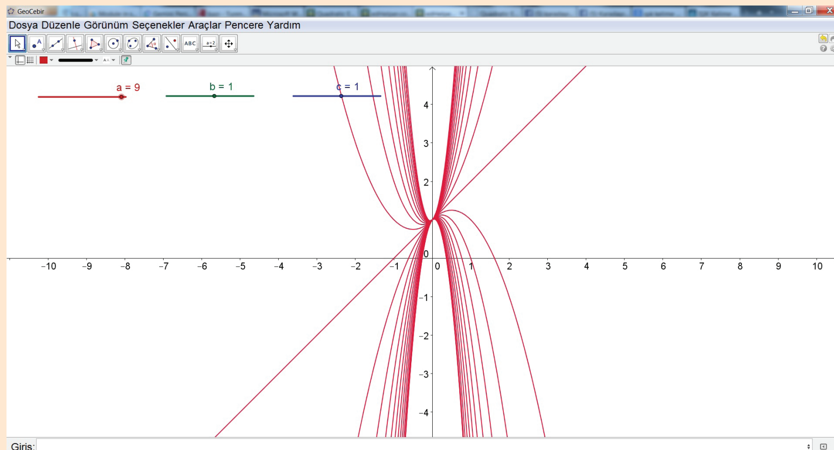
Benzer şekilde b ve c sürgüleri de oluşturalım. Katsayılara ait sürgüler aşağıdaki gibidir.



Yazılımın en alttaki giriş satırına Giriş: f(x)=a*x^2+b*x+c girilerek enter tuşuna basılır ve b = 1 ve c = 1 için grafik çizilmiş olur.

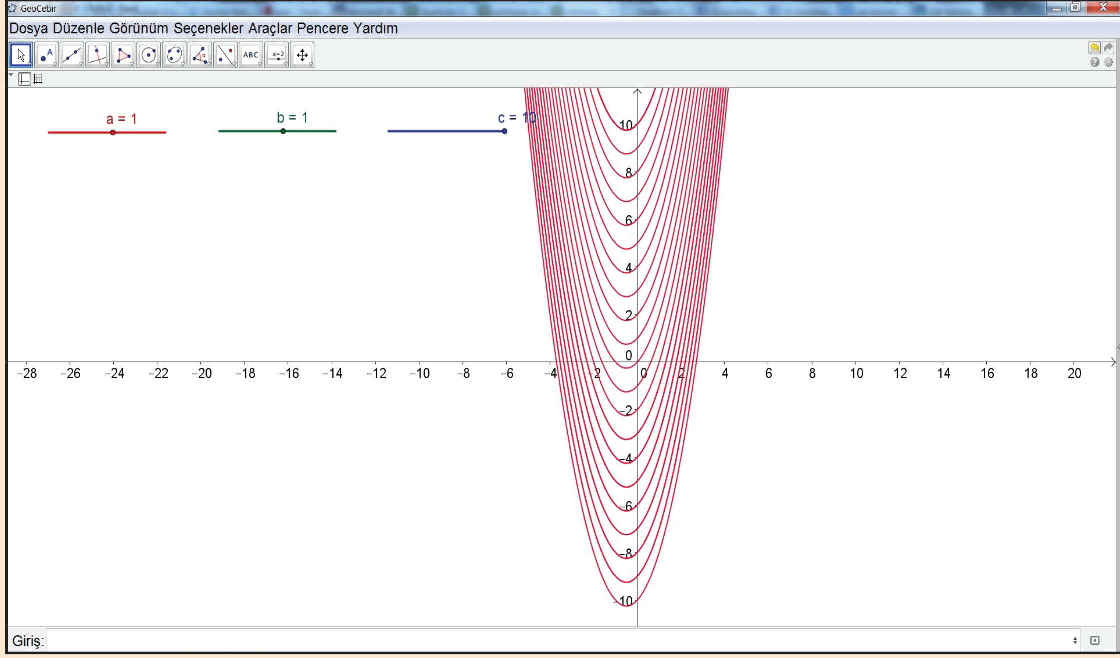
Yazılımda b = 1 ve c = 1 sabit kalıp a sürgüsünü oynattıkça a > 0 için parabolün kollarının yukarı doğru olduğu görülür. a büyüdükçe kollarının açıklıklarının daraldığı ve y eksenine yaklaştığı görülür. a < 0 için parabolün kollarının aşağıya doğru ve a büyüdükçe kollarının açıklıklarının arttığı gözlemlenir.

Yani f(x) = $ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinde a, parabolün kollarının yönüne ve kolların açıklığına etkisi vardır. Aşağıda eğriye iz verildiğinde $-10 \leq a \leq 10$ için çizilen tüm grafikler görülmektedir.

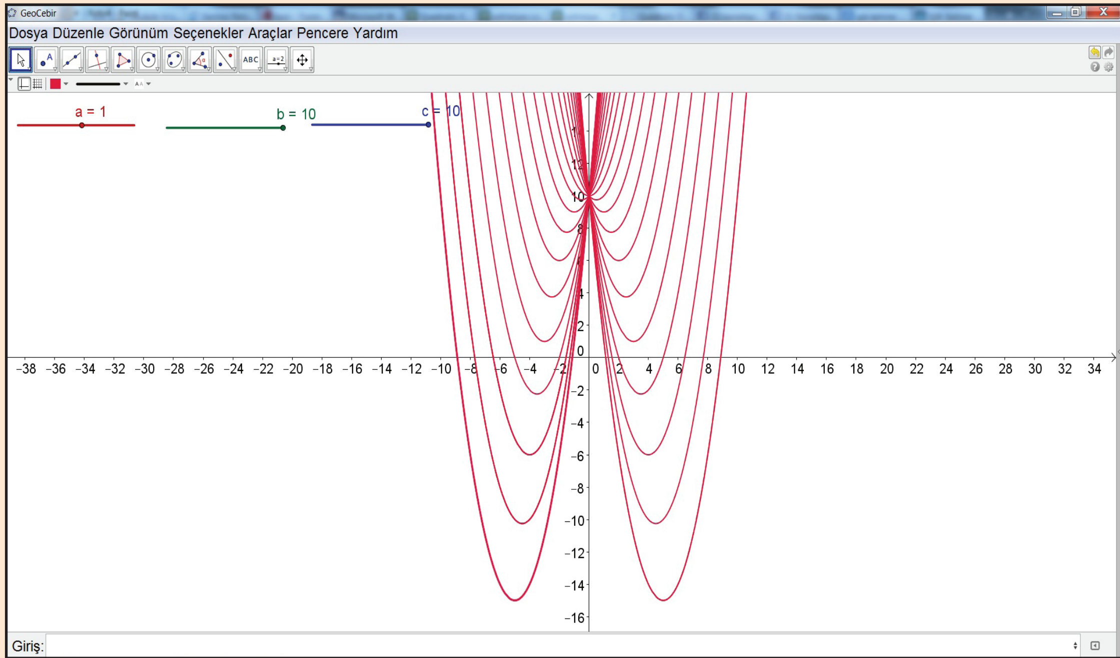


Yazılımda a = 1 ve b = 1 için yani a ve b sabit kalıp c sürgüsünü oynattıkça parabolün c br kadar y ekseni boyunca, c < 0 için c br kadar aşağıya, c > 0 için c br kadar yukarıya ötelendiği görülür.

Yani $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinde c, parabolün y ekseni boyunca öteleme hareketi yapmasını sağlar. Aşağıda bu durum görülmektedir.



Yazılımda a = 1 ve c = 10 sabit kalıp b sürgüsünü oynattıkça hem x hem y ekseni boyunca grafikte öteleme olduğu görülür. Bu öteleme, c = 10 olduğu için (0,10) noktası etrafında olur.



Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunun grafiğinde $a = \frac{1}{2}$ ve $c = -1$ alındığında grafikteki değişimi açıklayalım.

Çözelim:

$y = f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunda baş katsayısı $a = 2$ iken $a = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa parabolün kolları daha çok açılır. Yani kollar y ekseninden uzaklaşır. $c = -4$ iken $c = -1$ oluyorsa parabol, y ekseni boyunca 3 br yukarı doğru ötelenir.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $y = f(x) = x^2 - 12x + 20$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözelim:

Önce verilen fonksiyonu tam kare ifade olarak yazalım.

$f(x) = x^2 - 12x + 20 = \underbrace{x^2 - 12x + 36} - 16$

$f(x) = (x-6)^2 - 16$ olur.

Burada f(x) in en küçük değeri alması için $(x-6)^2$ en küçük olmalıdır.

Herhangi bir ifadenin karesinin en küçük değeri de sıfırdır.

Onun için $(x-6)^2$ ifadesinin en küçük değeri sıfır olmalıdır.

$(x-6)^2 = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ bulunur.

O hâlde fonksiyon, $x = 6$ için en küçük değerini alır.

Bu değer, $f(6) = (6-6)^2 - 16 = -16$ bulunur.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözelim:

f(x) fonksiyonunu tam kare ifade olarak yazalım.

$f(x) = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2)$

$= -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2\right)$

$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ olur.

Burada f(x) in en büyük değeri alması için $-2.\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ ifadesinin en küçük değeri alması gerekir.

Bunun için $-2.\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ sıfıra eşit olmalıdır.

$-2.\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ bulunur.

O hâlde fonksiyon, $x = \frac{3}{2}$ için en büyük değerini alır.

Bu değer, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ elde edilir.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $y = f(x) = -x^2 + 4x - 5$ fonksiyonunun varsa en büyük değerini bulalım.

Çözelim:

Verilen fonksiyonda $a < 0$ olduğundan fonksiyonun en büyük değeri vardır. Bu değer, $x = -\frac{b}{2a}$ için $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.(-1)} = 2$ olduğundan $k = f(2) = -2^2 + 4.2 - 5 = -1$ bulunur.

Fonksiyonun alabileceği en büyük değeri grafikten de görelim. Bunun için $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Çizilecek parabolün kolları, $a = -1 < 0$ olduğundan aşağı doğrudur.

Parabolün tepe noktası,

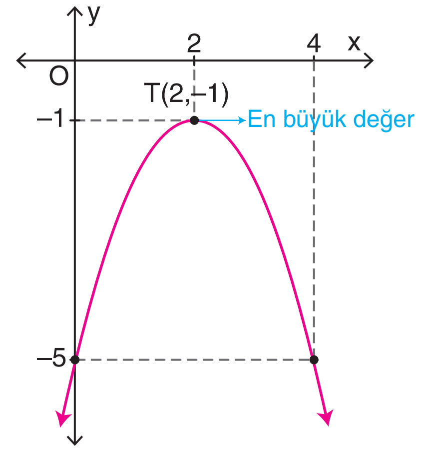
$r = -\frac{b}{2a} = 2$ ise $k = f(2) = -1$ dir.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$\Delta = 4^2 - 4.(-1).(-5) = 16 - 20 = -4 < 0$ olduğundan gerçek sayılarda bu denklemin kökü yoktur. Bu yüzden parabol, x eksenini kesmez.

$x = 0$ için $f(0) = -5$ bulunur. Demek ki parabol, y eksenini $(0, -5)$ noktasında kesmektedir.

Parabolün kolları $x = -\frac{b}{2a} = 2$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $(0, -5)$ noktasının $x = 2$ doğrusuna göre simetriği, $(4, -5)$ noktasıdır. Parabol, bu noktalardan geçer. Bulduğumuz noktaları analitik düzlemde işaretleyip parabolünü yandaki gibi çizelim.



Grafikte de görüldüğü gibi fonksiyonun en büyük değeri, tepe noktasının koordinatları ile ilişkilidir.

Yani $x = 2$ için $y = -1$ değeri, fonksiyonun en büyük değeridir.

Uygulayalım:

g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ için $y = g(x) = 2x^2 - 3x - 5$ fonksiyonunun en küçük değerini varsa bulalım.

Çözelim:

$g(x) = 2x^2 - 3x - 5$ fonksiyonunda $a > 0$ olduğundan fonksiyonun en küçük değeri vardır.

En küçük değer,

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2.2} = \frac{3}{4}$ için $k = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3.\frac{3}{4} - 5 = -6,125$ bulunur.

En küçük değeri fonksiyonun grafiğini çizerek de bulalım. Fonksiyonda $a = 2 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Parabolün tepe noktasının koordinatları, $\left(\frac{3}{4}, -6,125\right)$ tir.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

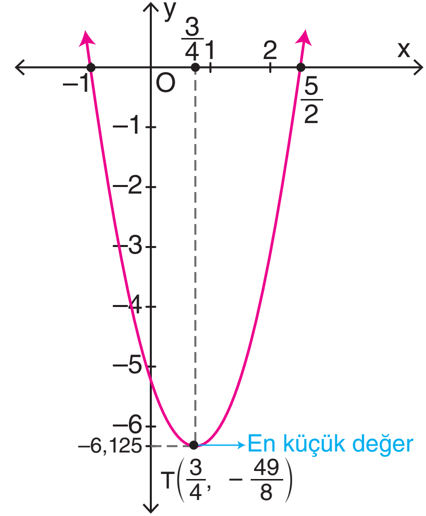
$\Delta = 9 - 4.2.(-5) = 49 > 0$ dır.

$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2.2} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3-7}{4} = -1$ ve $x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$ dir.

$x = 0$ için $g(0) = -5$ tir.

O hâlde parabol, eksenleri (–1, 0), $\left(\frac{5}{2},0\right)$ ve (0, –5) noktalarından kesmektedir.

Bulduğumuz noktaları analitik düzlemde yerleştirip parabolü yandaki gibi çizelim.



Grafikte de görüldüğü gibi fonksiyonun en küçük değeri vardır. Bu değer, tepe noktasının koordinatları ile ilişkilidir. Yani $x = \frac{3}{4}$ için y = –6,125 değeri, fonksiyonun en küçük değeridir.

Yani $y = -6,125 = -6\frac{1}{8} = -\frac{49}{8}$ ise

$T\left(\frac{3}{4},\ -\frac{49}{8}\right)$ olur.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = f(x) = x^2 + 3x - 11$ parabolü üzerinde alınan hangi noktanın koordinatları toplamının en küçük olduğunu bulalım.

Çözelim:

A(x,y), parabol üzerinde bir nokta olsun. İstenen, x + y nin en küçük değeridir. $y = x^2 + 3x - 11$ ise $x + y = x + x^2 + 3x - 11 = x^2 + 4x - 11$ bulunur. $g(x) = x^2 + 4x - 11$ fonksiyonu, en küçük değerini tepe noktasında alır.

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.1} = -2$ ve $k = f(-2) = (-2)^2 + 4.(-2) - 11 = -15$ bulunur.

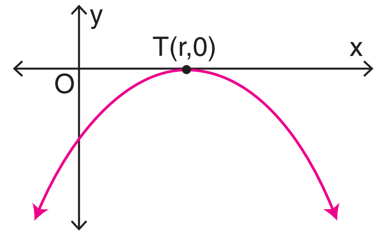
Demek ki $f(x) = x^2 + 3x - 11$ parabolü üzerindeki (–2, –15) noktasının koordinatları toplamı en küçüktür.

Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $y = f(x) = -5x^2 + 5mx - 6m + 4$ fonksiyonunun grafiği x eksenine teğet ise m nin kaç olduğunu bulalım.

Çözelim:

Verilen fonksiyon x eksenine teğet ise grafiği, yandaki gibi bir parabol olur. Bu durumda parabolün tepe noktası, T(r,0) olur. Bu da fonksiyonun en büyük değerinin 0 olduğunu gösterir. En büyük değer, $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ifadesi ile bulunduğuna göre



$\frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow \frac{4.(-5).(-6m + 4) - (5m)^2}{4.(-5)} = 0$ ise

$120m - 80 - 25m^2 = 0 \Rightarrow 5m^2 - 24m + 16 = 0$ bulunur.

Bu denklemin köklerini bulalım.

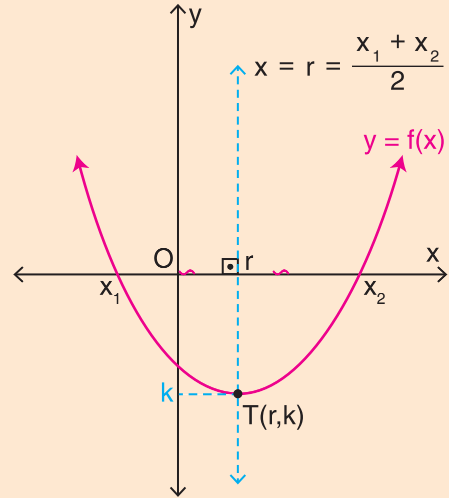
$\Delta = 24^2 - 4.5.16 = 256$

$m_{1,2} = \frac{-(-24) \mp \sqrt{256}}{4.5} = \frac{24 \mp 16}{20} \Rightarrow m_1 = \frac{24 - 16}{20} = \frac{2}{5}$ ve $m_2 = \frac{24 + 16}{20} = 2$ bulunur.

Yani m değeri, $\frac{2}{5}$ veya 2 bulunur.

Öğrenelim:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon grafiğinin x eksenini kestiği noktalar, x_1 ve x_2 olsun. Yani $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri, x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda denklemi $a.(x - x_1)(x - x_2) = 0$ şeklinde yazabiliriz. Ya da fonksiyonu $f(x) = a.(x - x_1)(x - x_2)$ şeklinde yazabiliriz. Bu şekilde verilen fonksiyonun grafiğini çizerken zaten x eksenini kestiği noktalar belli olduğundan y eksenini kestiği nokta ile parabolün tepe noktasını bulmak ve analitik düzlemde yerleştirip çizmek yeterli olacaktır. $(x_1,0)$ ve $(x_2, 0)$ noktaları $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $x = r = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ile bulunabilir. Burada $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ile elde edilen değer, tepe noktasının apsisidir. Bu değer fonksiyonda yerine yazılarak tepe noktasının ordinatı bulunur.



Uygulayalım:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $y = f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$ biçiminde verilen fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözelim:

Verilen fonksiyonun denkleminden

$2(x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ veya $x - 4 = 0$

$x = -1$ veya $x = 4$ bulunur.

Yani parabol x eksenini, $(-1, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarında keser.

Bu noktalar, $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna göre simetriktir.

Simetri ekseni,

$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$ bulunur.

O hâlde tepe noktasının apsisi, $r = \frac{3}{2}$ dir.

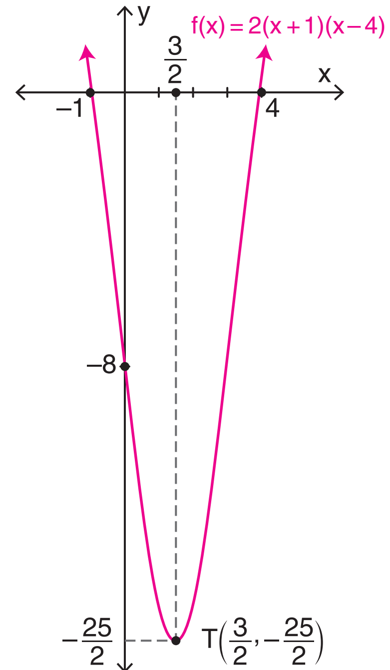
$k = f(r)$ olduğundan

$k = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2.\left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(\frac{3}{2} - 4\right) = -\frac{25}{2}$ bulunur.

Parabolün y eksenini kestiği nokta,

$x = 0$ için $y = f(0) = 2(0 + 1)(0 - 4) = -8$ olur.

Fonksiyonun grafiğini çizmek için x eksenini kestiği noktalar ve tepe noktası, analitik düzleme yerleştirilir. Yandaki parabole ulaşılır.



Uygulayalım:

Bir parabol, x eksenini –2 ve m apsisli noktalarda kesmektedir. Bu parabolün simetri ekseni x = 1 doğrusu olduğuna göre m kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

x = 1 değeri, parabolün x eksenini kestiği noktaların apsislerinin aritmetik ortalamasıdır.

O hâlde

$$x = r = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-2 + m}{2} \Rightarrow m = 4 \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $y = g(x) = -(x-2)(x+3)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözelim:

$-(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ve $x_2 = -3$ bulunur.

Simetri ekseni, $x = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$ doğrusudur.

O hâlde $r = -\frac{1}{2}$ dir.

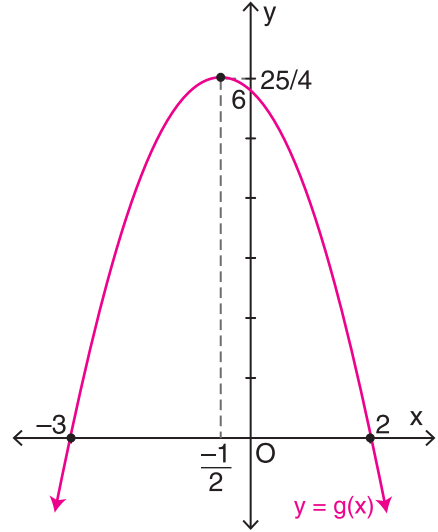
$$k = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2} - 2\right)\left(-\frac{1}{2} + 3\right)$$

$k = \frac{25}{4}$ bulunur. O hâlde $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ olur.

Parabolün y eksenini kestiği nokta ise

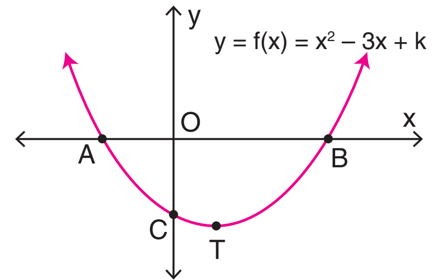
$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -(0-2)(0+3) = 6$ dır.

Bulunan değerlere uygun parabol yanda çizilmiştir.



Uygulayalım:

Yandaki grafikte görülen parabol, x eksenini A ve B noktalarında, y eksenini C noktasında kesmektedir. T noktası, parabolün tepe noktasıdır. |OB| = 2.|OA| olduğuna göre C noktasının ordinatını bulalım.



Çözelim:

Grafikte |OB| = 2.|OA| olarak verildiğine göre A(–t, 0) ise B(2t, 0) olacaktır. Burada A ve B noktaları parabolün x eksenini kestiği noktalar olduğuna göre bu noktaların apsisleri, f(x) = 0 denkleminin kökleridir. $x^2 - 3x + k = 0$ denkleminde kök toplamı ilişkisini kullanarak

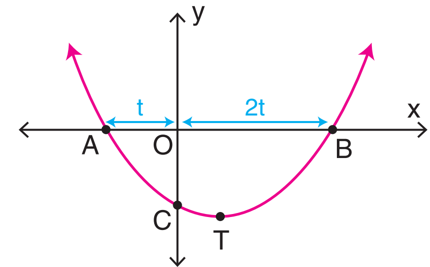
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3$ bulunur.

O hâlde $x_1 = -t$ ve $x_2 = 2t$ olduğundan

$x_1 + x_2 = -t + 2t = 3 \Rightarrow t = 3$ elde edilir.

Buna göre $x^2 - 3x + k = 0$ denkleminin kökleri, –3 ve 6 olur. $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -3.6 = \frac{k}{1} \Rightarrow k = -18$ bulunur.

Bu değer, fonksiyonun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır. Yani C nin ordinatı, –18 dir.

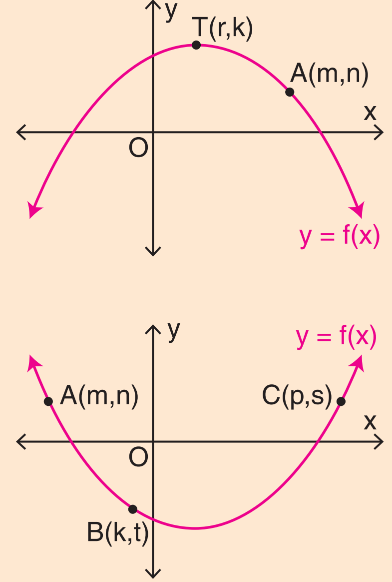


Öğrenelim:

Grafiği üzerinde belirli noktaları verilen yandaki gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun denklemini bulalım.

Önce tepe noktası $T(r, k)$ ve üzerindeki herhangi bir nokta $A(m, n)$ olan ikinci dereceden fonksiyon bulunur. Bunun için $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu yerine $f(x) = a(x - r)^2 + k$ biçimindeki yazım tercih edilir. Burada tepe noktasının koordinatları yerine yazıldığında fonksiyonda bilinmeyen olarak sadece a katsayısı kalır.

Bu da fonksiyon üzerindeki A noktasının koordinatları fonksiyonda yerine yazılarak bulunur.



Fonksiyon grafiği üzerinde bulunan üç farklı noktanın koordinatları yandaki gibi verilmişse $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda katsayılar,

$f(m) = n$, $f(k) = t$ ve $f(p) = s$ denklem sistemi çözülerek bulunur.

Uygulayalım:

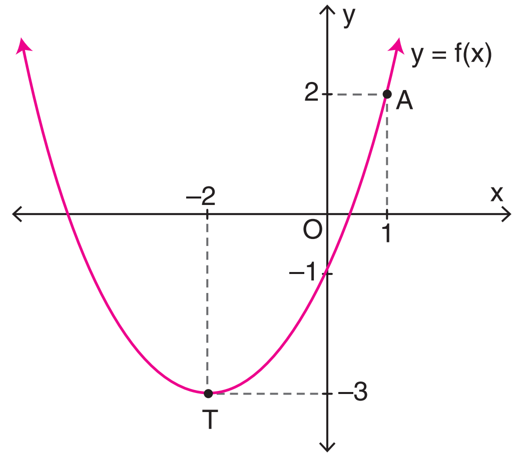
Yanda tepe noktası $T(-2, -3)$ ve geçtiği bir nokta $A(1, 2)$ olan ikinci dereceden fonksiyonun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun kuralını oluşturalım.

Çözelim:

Tepe noktası ve herhangi bir noktası belli olan fonksiyonun kuralını bulmak için $f(x) = a(x - r)^2 + k$ eşitliğini kullanalım. $T(-2, -3)$ olduğundan $r = -2$ ve $k = -3$ tür. O hâlde fonksiyon, $f(x) = a(x + 2)^2 - 3$ biçiminde yazılır. Parabol üzerindeki $A(1, 2)$ noktasını fonksiyonda yerine yazalım. Yani $x = 1$ için $y = 2$ olmalıdır.

Bu durumda grafiği verilen fonksiyon,

$y = f(x) = \frac{5}{9}(x + 2)^2 - 3$ bulunur.



Uygulayalım:

Yanda T tepe noktası ve üzerinde bir K noktası verilen parabol görülmektedir. Buna göre parabole ait fonksiyonun kuralını oluşturalım.

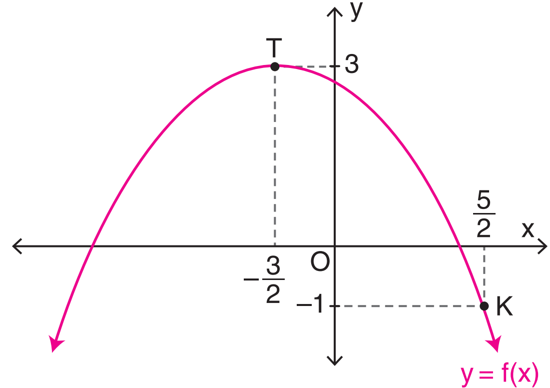
Çözelim:

Grafikte $r = -\frac{3}{2}$ ve $k = 3$ olduğundan istenen fonksiyon, $y = f(x) = a\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3$ biçiminde yazılır. a katsayısını bulmak için $K\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ noktasını kullanalım.

$-1 = a\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + 3 \Rightarrow 16a = -4 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

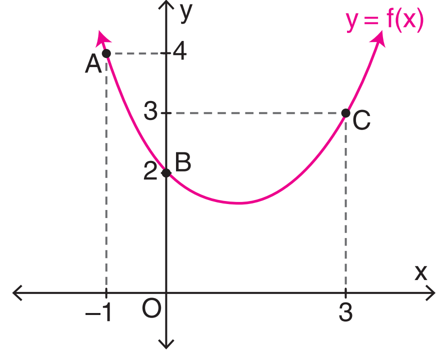
bulunur. O hâlde grafiği verilen fonksiyon,

$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3$ denklemine sahiptir.



Uygulayalım:

Yandaki parabol üzerinde koordinatları belli üç nokta verilmiştir. Bu grafiğe ait fonksiyonun kuralını oluşturalım.



Çözelim:

Grafik üzerinde üç noktası verilen fonksiyon için $f(x) = ax^2 + bx + c$ eşitliğini kullanalım. Grafik üzerindeki her nokta fonksiyonu sağlayacağı için

$f(-1) = 4 \Rightarrow a(-1)^2 + b.(-1) + c = 4 \Rightarrow a - b + c = 4$

$f(0) = 2 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$ ve

$f(3) = 3 \Rightarrow a.3^2 + b.3 + c = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c = 3$ olur.

Burada c = 2 olarak bulunduğundan diğer denklemlerde c yi yerine yazarsak

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 4 \Rightarrow a - b = 2 \\ 9a + 3b + c = 3 \Rightarrow 9a + 3b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 3b = 6 \\ 9a + 3b = 1 \end{array} \; +$$

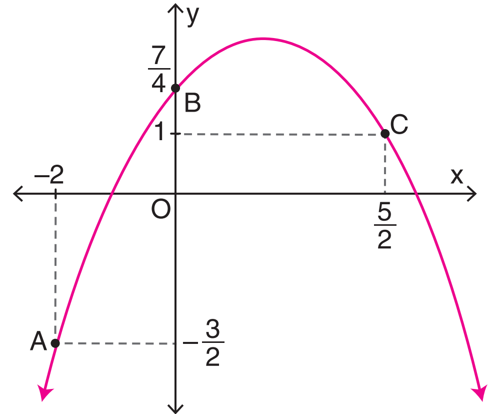
$$12a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{12}$$

$$a - b = 2 \Rightarrow \frac{7}{12} - b = 2 \Rightarrow b = -\frac{17}{12} \text{ olur.}$$

O hâlde grafiği verilen fonksiyon, $f(x) = \frac{7}{12}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$ denklemine sahiptir.

Uygulayalım:

Üzerinde A, B ve C noktaları verilen fonksiyonun denklemini oluşturalım.



Çözelim:

Grafik üzerindeki noktaların koordinatları,

$A\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $B\left(0, \frac{7}{4}\right)$ ve $C\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ şeklindedir.

Bu noktalardan geçen ikinci dereceden fonksiyon, $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$f(-2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a.(-2)^2 + b.(-2) + c = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 4a - 2b + c = -\frac{3}{2}$ olur.

$f(0) = \frac{7}{4} \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = \frac{7}{4} \Rightarrow c = \frac{7}{4}$ bulunur

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 \Rightarrow a.\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b.\left(\frac{5}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 1$ olur.

Bulduğumuz denklemlerde $c = \frac{7}{4}$ yazarsak,

$$\left.\begin{array}{l} 4a - 2b + c = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} / 4a - 2b = -\frac{13}{4} \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 1 \Rightarrow 2 / \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b = -\frac{3}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10a - 5b = -\frac{65}{8} \\ \frac{25}{2}a + 5b = -\frac{3}{2} \end{array} \; +$$

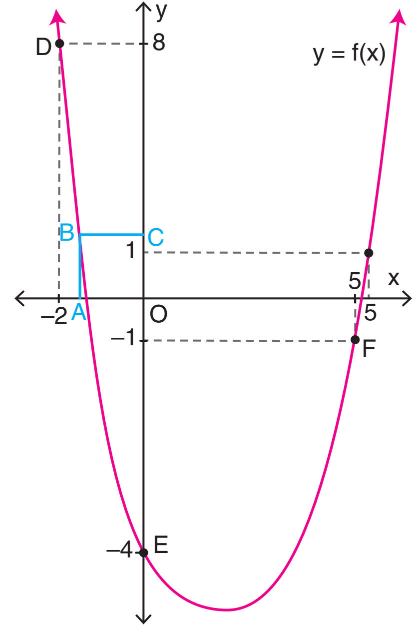
$$\frac{45}{2}a = -\frac{77}{8} \Rightarrow a = -\frac{77}{180} \text{ olur.}$$

$4a - 2b = -\frac{13}{4} \Rightarrow 4 \cdot \frac{-77}{180} - 2b = -\frac{13}{4} \Rightarrow b = \frac{277}{180}$ olur.

O hâlde istenen ikinci dereceden fonksiyon, $f(x) = \frac{-77}{180}x^2 + \frac{277}{180}x + \frac{7}{4}$ elde edilir.

Uygulayalım:

Yandaki parabol D, E ve F noktalarınından geçmektedir. Buna göre OABC karesinin çevresini bulalım.



Çözelim:

Grafik üzerindeki noktaların koordinatları; D(–2, 8), E(0, –4) ve F(5,1) dir. Buna göre bu üç noktadan geçen ikinci dereceden fonksiyon, $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$f(-2) = 8 \Rightarrow a.(-2)^2 + b.(-2) + c = 8 \Rightarrow 4a - 2b + c = 8,$

$f(0) = -4 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = -4 \Rightarrow c = -4$ ve

$f(5) = 1 \Rightarrow a.5^2 + b.5 + c = 1 \Rightarrow 25a + 5b + c = 1$ dir.

Denklemlerde $c = -4$ yazarsak

$4a - 2b + c = 8 \Rightarrow 4a - 2b = 12$

$25a + 5b + c = 1 \Rightarrow 25a + 5b = 5$

$$\begin{aligned} 2a - b &= 6 \\ + \quad 5a + b &= 1 \\ \hline 7a &= 7 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

$2a - b = 6 \Rightarrow 2.1 - b = 6 \Rightarrow b = -4$ bulunur.

O hâlde D, E ve F noktalarından geçen fonksiyonun denklemi, $f(x) = x^2 - 4x - 4$ elde edilir.

OABC kare olduğuna göre B noktasının apsisi ile ordinatı uzunlukça birbirine eşittir. Yani B(–k, k) gibi bir nokta olsun. B noktası, grafik üzerinde olduğundan f(x) i sağlar.

$f(-k) = k \Rightarrow k^2 + 4k - 4 = k \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$ bulunur. Bu denklemde

$\Delta = 9 - 4.1\,(-4) = 25$

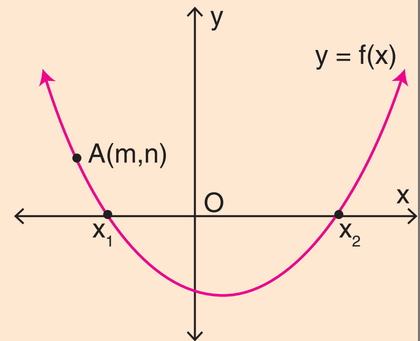
$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \text{ ve } k_2 = \frac{-3+5}{2} = 1 \text{ olur.}$$

Grafiğe göre B noktasının koordinatları, B(–1,1) olur. O hâlde OABC karesinin bir kenar uzunluğu 1 br dir.

Buradan Çevre (OABC) = 4 . 1 = 4 br bulunur.

Öğrenelim:

Bir parabolün x eksenini kestiği noktalar ile A(m, n) noktası verildiğinde y = f(x) ikinci dereceden fonksiyonunun denklemini bulalım.



Parabolün x eksenini kestiği noktalar, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun denkleminin kökleridir. Yani

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ yazılabilir.

Bu durumda fonksiyonun cebirsel ifadesi,

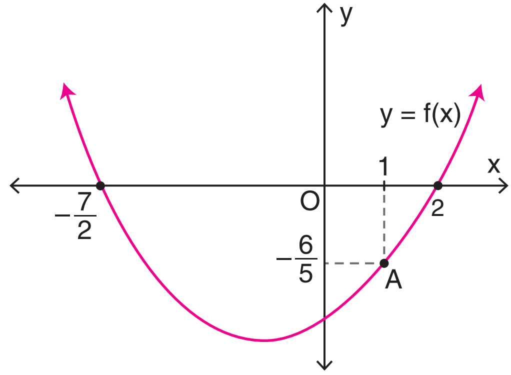
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçiminde olur.

Grafik üzerindeki farklı bir A(m, n) noktası fonksiyonu sağlayacağından fonksiyonda bilinmeyen a katsayısı böylelikle bulunur.

Böylece $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ fonksiyonu oluşturulur.

Uygulayalım:

Yanda grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesini bulalım.



Çözelim:

Grafikte x eksenini kesen noktalar verildiğine göre $x_1 = -\frac{7}{2}$ ve $x_2 = 2$ olmak üzere

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 2)$

bulunur. Fonksiyon grafiği üzerinde $A\left(1, -\frac{6}{5}\right)$ verildiğine göre bu nokta, fonksiyonu sağlar.

$f(1) = -\frac{6}{5} \Rightarrow a\left(1 + \frac{7}{2}\right)(1 - 2) = -\frac{6}{5}$

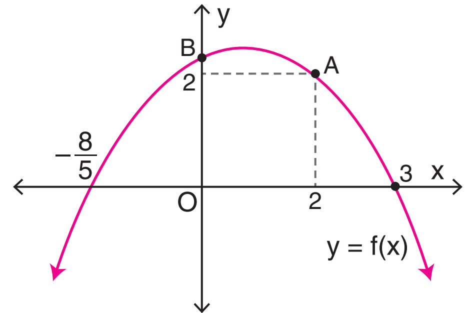
$\Rightarrow -\frac{9}{2}a = -\frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ olur.

Bu durumda grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesi,

$f(x) = \frac{4}{15}\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 2)$ biçiminde elde edilir.

Uygulayalım:

Yanda grafiği verilen y = f(x) ikinci dereceden fonksiyonunun y eksenini kestiği noktayı bulalım.



Çözelim:

Grafiğin y eksenini kestiği noktayı bulmak için önce y = f(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesini bulalım. Bunun için parabolün x eksenini kestiği noktalar verildiğine göre $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ şeklindeki ikinci dereceden fonksiyonu kullanalım.

$x_1 = -\frac{8}{5}$ ve $x_2 = 3$ olduğundan

$f(x) = a\left(x + \frac{8}{5}\right)(x - 3)$ olur.

Grafik üzerindeki A noktasının koordinatlarını kullanalım.

A(2,2) ise f(2) = 2 olacağından

$2 = a\left(2 + \frac{8}{5}\right)(2 - 3) \Rightarrow -\frac{18}{5}a = 2 \Rightarrow a = -\frac{5}{9}$ olur.

O hâlde fonksiyonun cebirsel ifadesi, $f(x) = -\frac{5}{9}\left(x + \frac{8}{5}\right)(x - 3)$ tür.

Parabolün y eksenini kestiği nokta için

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -\frac{5}{9}\left(0 + \frac{8}{5}\right)(0 - 3) \Rightarrow y = \frac{8}{3}$ bulunur.

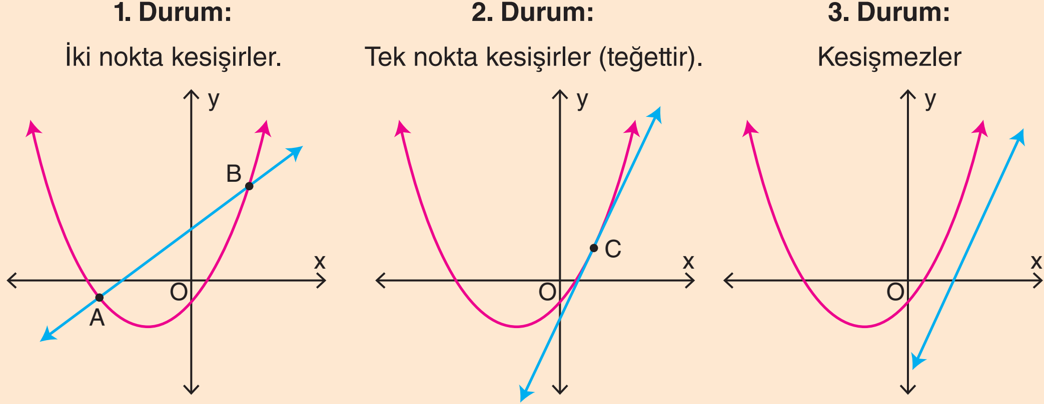
Demek ki parabol, y eksenini $B\left(0, \frac{8}{3}\right)$ noktasında kesmektedir.

Öğrenelim:

Bir doğru ile bir parabolün birbirine göre durumlarını inceleyelim.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu analitik düzlemde üç farklı biçimde bulunur.

1. Durum: İki nokta kesişirler. **2. Durum:** Tek nokta kesişirler (teğettir). **3. Durum:** Kesişmezler



Bir parabolle bir doğrunun kesişmesi demek, kesişim noktalarının her iki grafikte olması demektir.

Yani kesişim noktaları, her iki denklemi de sağlar. Dolayısıyla ortak çözüm yapılır.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{array}\right\} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + n \text{ yazabiliriz.}$$

Buradan elde edilen denklem düzenlenirse

$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ elde edilir.

Ortak çözümden elde edilen denklemin diskriminantı Δ olsun.

1. Durum: $\Delta > 0$ ise doğru parabolü iki farklı noktada keser.

2. Durum: $\Delta = 0$ ise doğru parabole teğettir. Tek noktada kesişirler.

3. Durum: $\Delta < 0$ ise doğru parabol ile kesişmez.

Parabol ile doğrunun kesişim noktaları varsa denklemlerinin birbirine eşitlenmesinden elde edilen ortak denklemde x değerleri bulunur. Daha sonra da bu x lere karşılık gelen y değerleri, herhangi bir denklemden elde edilir. Böylece bir parabol ile doğrunun kesişim noktaları bulunmuş olur.

Uygulayalım:

$y = f(x) = x^2$ denklemine sahip parabol ile $y = x$ denklemine sahip doğrunun kesişim noktalarını bulalım.

Çözelim:

Parabol ve doğrunun verilen denklemlerini ortak çözelim.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x.(x - 1) = 0 \text{ olur. Buradan } x = 0 \text{ veya } x = 1 \text{ bulunur.}$$

$x = 0$ için $y = 0^2 = 0$ ve $x = 1$ için $y = 1^2 = 1$ olur.

Dolayısıyla kesişim noktları, (0, 0) ve (1, 1) olarak bulunur.

Uygulayalım:

$y = x^2 + 4x + 6$ parabolü ile $y = -3x - 4$ doğrusunun birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözelim:

Verilen iki denklemin kesişim noktalarını bu iki denklemin ortak çözümünden elde ederiz. Bundan dolayı iki denklemde y leri eşitleyelim.

$x^2 + 4x + 6 = -3x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 6 + 3x + 4 = 0$ ise

$x^2 + 7x + 10 = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemde

$\Delta = 49 - 4.1.10$

$\Delta = 9$ bulunur.

$\Delta > 0$ olduğundan verilen doğru, parabolü iki farklı noktada kesmektedir. Bu noktaları bulalım. Ortak çözümden elde edilen denklemin kökleri, kesişim noktalarının apsisleri olur.

$x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 5) = 0$ ise

$x + 2 = 0 \lor x + 5 = 0$

$x = -2 \lor x = -5$ bulunur.

Elde edilen x değerlerini herhangi bir denklemde yerine yazalım.

$y = -3x - 4$ denkleminde $x = -2 \Rightarrow y = 2$ ve

$x = -5 \Rightarrow y = 11$ olur.

Buradan doğru ile prabolün kesiştikleri noktalar,

$(-2, 2)$ ve $(-5, 11)$ olarak elde edilir.

Uygulayalım:

$y = -x^2 - x + m - 1$ parabolü ile $y = -2x - m$ doğrusu kesişmemektedir.
Buna göre m in alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

Çözelim:

Verilen parabol ile doğru kesişmediklerine göre ortak çözümlerinden elde edilecek denklemde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} y &= -x^2 - x + m - 1 \\ y &= -2x - m \end{aligned}\right\} \Rightarrow -x^2 - x + m - 1 = -2x - m$$

$-x^2 + x + 2m - 1 = 0$ ise

$\Delta = 1^2 - 4.(-1).(2m - 1) < 0$ olmalıdır.

$1 + 8m - 4 < 0$

$m < \frac{3}{8}$ elde edilir.

O hâlde m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 0 dır.

Uygulayalım:

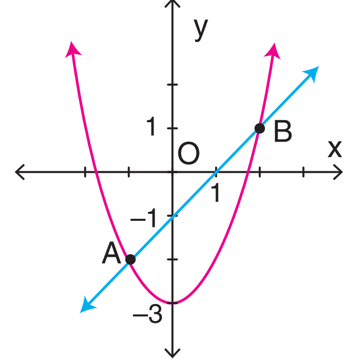
$y = x^2 - 3$ parabolü ile $x - y = 1$ doğrusu farklı A ve B noktalarında kesişmektedir.

a. [AB] nın orta noktasının koordinatlarını bulalım.

b. |AB| nu bulalım.

Çözelim:

Önce verilen parabol ile doğrunun kesişim noktalarını bulalım. Bu noktalar yandaki şekilde görüldüğü gibi A ve B noktalarıdır. Bu noktalar, verilen denklemlerin ortak çözümünden elde edilir.



$y = x^2 - 3$ $\qquad$ $x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$

$$x^2 - 3 = x - 1$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ olur.}$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0$$
$$x = 2 \vee x = -1 \text{ bulunur.}$$

Bulunan x değerleri, kesişim noktalarının apsisleridir.

Ordinatlarını bulmak için herhangi bir denklemde x değerini yerine yazarsak

$y = x - 1$ denkleminde $x = 2$ için $y = 1$ ve

$x = -1$ için $y = -2$ elde edilir.

Demek ki parabol ile doğrunun kesişim noktaları, A(–1, –2) ve B(2, 1) noktalarıdır.

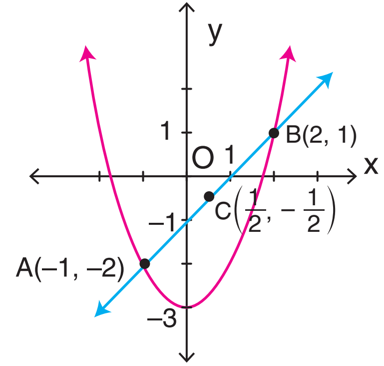
a. [AB] nın orta noktası $C(x_0, y_0)$ olsun.

$$x_0 = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad y_0 = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Yani $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ noktası aranan orta noktadır.

b. $|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 9}$ ise

$$|AB| = 3\sqrt{2} \text{ br bulunur.}$$

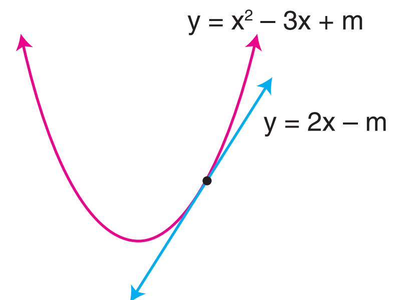


Uygulayalım:

$y = 3x^2 - 3x + m$ parabolü ile $y = 2x - m$ doğrusu teğet olduğuna göre m değerini bulalım.

Çözelim:

Doğru ile parabol birbirine teğet ise tek noktada kesişir. Bunların temsili şekilleri yandaki gibidir. O hâlde ortak çözümden elde edilecek denklemin diskriminantı 0 olmalıdır.



$y = 3x^2 - 3x + m$ ile $y = 2x - m$ denklemlerinden

$3x^2 - 3x + m = 2x - m \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2m = 0$ olur.

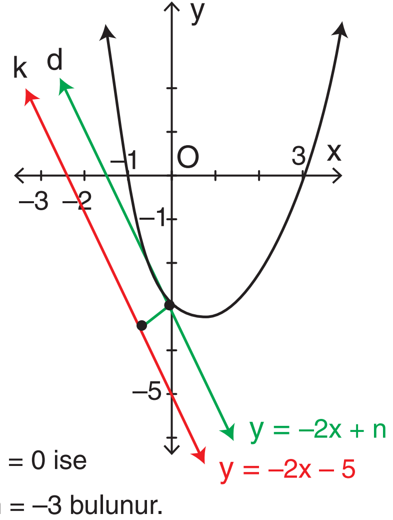
$$\Delta = (-5)^2 - 4.3.2m = 0 \text{ olmalıdır.}$$
$$25 - 24m = 0 \text{ ise}$$
$$m = \frac{25}{24} \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

$y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün $y = -2x - 5$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözelim:

Verilen parabol ve doğrunun grafikleri yanda çizilmiştir. Doğrunun parabole en yakın noktası, parabole çizilen d teğet doğrusu ile parabolün kesişim noktasıdır. Burada d ile k, paralel doğrular olmak zorundadır. Bu durumda d doğrusunun denklemi $y = -2x + n$ olur. Bu doğru parabole teğet olduğundan ortak çözümlerinden elde edilen denklemin diskriminantı 0 dır.



$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \\ y &= -2x + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = -2x + n$$

$$x^2 - 3 - n = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4.1.(-3 - n) = 0 \text{ ise}$$

$$n = -3 \text{ bulunur.}$$

O hâlde $y = x^2 - 2x - 3$ parabolü ile $y = -2x - 3$ doğrusunun kesim noktasını bulalım.

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \\ y &= -2x - 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = -2x - 3 \Rightarrow x = 0 \text{ bulunur.}$$

$y = -2x - 3$ denkleminde $x = 0$ ise $y = -3$ elde edilir.

Yani $y = -2x - 3$ doğrusu $y = x^2 - 2x - 3$ parabolüne $(0, -3)$ noktasında teğettir. Demek ki $y = x^2 - 2x - 3$ parabolü üzerinde $y = -2x - 5$ doğrusuna en yakın nokta $(0, -3)$ noktasıdır.

Uygulayalım:

$y = f(x) = -x^2 + 2x + 8$ parabolünün simetri ekseni d doğrusudur. Parabole tepe noktasında teğet olan doğru ise t doğrusudur. Verilenlere göre x ve y eksenleri ile birlikte d ve t doğrularının sınırladığı dörtgenin alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

Çözelim:

Denklemi verilen parabolün simetri ekseni,

$x = r = -\dfrac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow x = 1$ doğrusudur (d doğrusu).

Tepe noktası ordinatı ise

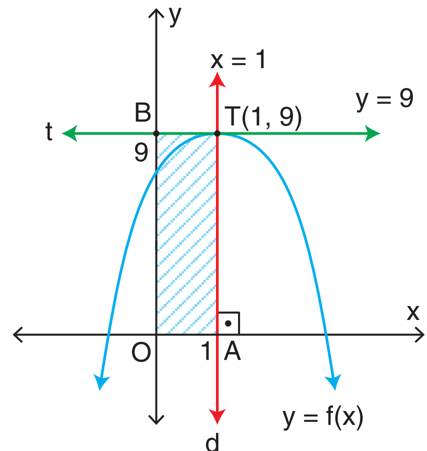
$k = f(r) \Rightarrow k = f(1) = -1 + 2 + 8 = 9$ bulunur.

Yandaki şekilde görüleceği gibi t doğrusunun denklemi,

$y = 9$ olur.

Taralı OATB dikdörtgeninin alanını bulmamız gerekiyor.

O hâlde Alan(OATB) = $|OA| . |AT| = 1 . 9 = 9$ br^2 bulunur.



Pekiştirelim:

1. Aşağıda verilen f: ℝ → ℝ tanımılı ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = x^2 - 3x - 28$ **b.** $m(x) = -x^2 + x + 12$ **c.** $n(x) = x^2 - 9x + 18$ **ç.** $P(x) = -5x^2 + 13x + 6$

2. Aşağıdaki fonksiyonların varsa en küçük ya da en büyük değerlerini bulunuz.

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ **b.** $t(x) = -4x^2 - 24x + 9$ **c.** $g(x) = 2x^2 - 16x - 5$ **ç.** $h(t) = -t^2 - 10t + 4$

3. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

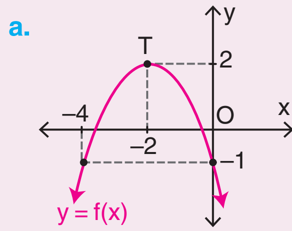
a. $f(x) = -(x + 2)^2 - 4$ **b.** $g(x) = -2(x + 3)^2 + 1$ **c.** $h(x) = 3(x - 3)(x + 3)$ **ç.** $h(x) = -2(x - 4)(x + 1)$

4. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerinin simetri eksenlerini bulunuz. Bu fonksiyonların grafiği üzerinde bir nokta seçiniz. Bu noktanın simetri eksenine göre simetriği olan noktanın, fonksiyonun grafiği üzerinde olduğunu gösteriniz.

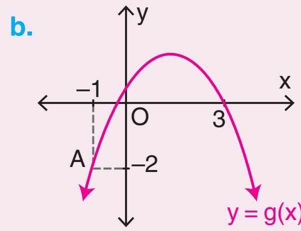
a. $f(x) = -x^2 - 2x - 5$ **b.** $f(x) = 8x^2 - 11x - 2$ **c.** $f(x) = 3x^2 + 9x - 6$ **ç.** $f(x) = -8x^2 + 16x + 4$

5. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların cebirsel ifadelerini bulunuz.

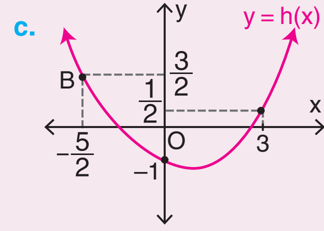
a.



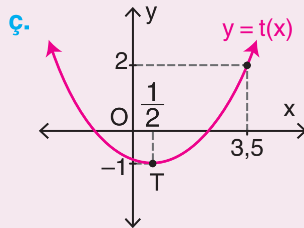
b.



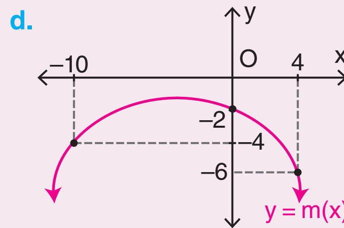
c.



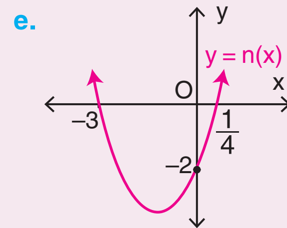
ç.



d.



e.



6. Tepe noktasının koordinatları (–1,2) olup (3,–1) noktasından geçen parabolün üzerindeki A noktasının apsisi –3 ise ordinatı kaçtır?

7. Bir f(x) fonksiyonun grafiği, x eksenini –7 ve 5 apsisli noktalarda kesmektedir. Buna göre bu fonksiyonun tepe noktasının apsisini bulunuz.

8. $y = 2x^2 + 4x + 6$ parabolü ile $y = x - 5$ doğrusunun birbirine göre durumunu belirleyiniz. Kesişiyorlarsa kesim noktalarını bulunuz.

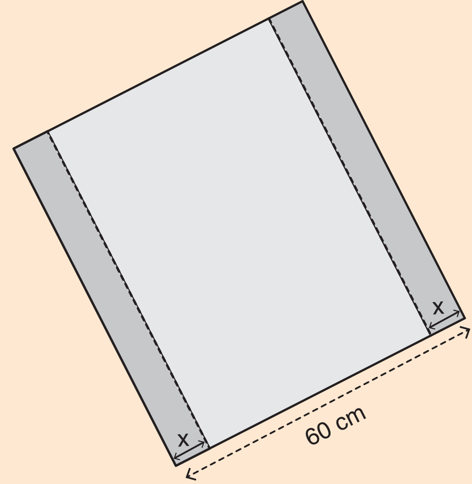
9. $y = x^2 - x - 2$ parabolü ile $y = mx - 2$ doğrusunun kesişim noktaları, A ve B dir. [AB] nın orta noktasının apsisi 4 ise m kaçtır?

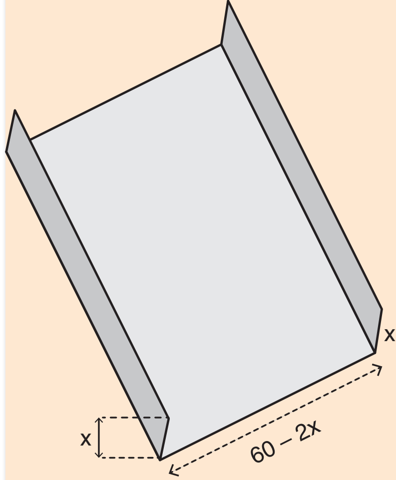
10. $y = x^2 + x$ parabolünün $y = 2x - 10$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

3.2.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlarla Modellenebilen Problemler

Öğrenelim:

Bir üreticinin elinde 60 cm genişliğinde yandaki şekilde görülen demir levha bulunmaktadır. Üretici, bu levhaları kullanarak, 60 cm lik kenarın iki ucundan x cm kaldırıp en fazla su akıntısının sağlanacağı oluk yapmak istemektedir. Bu oluğun en fazla su akıtma kapasitesine sahip olması için demir levhanın kenarlarından kaç cm kaldırması gerekir? Bulalım.





Yapılmak istenen oluk, yandaki şekilde görüldüğü gibidir. Levhanın yanlarından kaldırılacak x miktarına göre A alanını veren fonksiyonun cebirsel ifadesi,

$A(x) = x \cdot (60 - 2x)$ olur.

Matematiksel olarak ifade ettiğimiz A(x) fonksiyonu, ikinci dereceden bir değişkenli bir fonksiyondur.

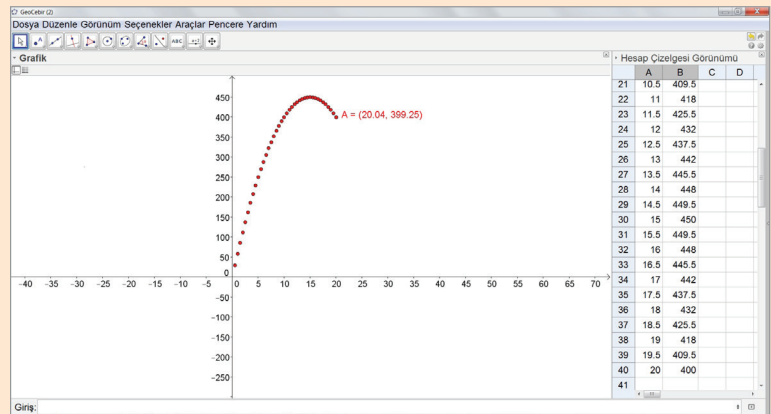
$A(x) = -2x^2 + 60x$ olur.

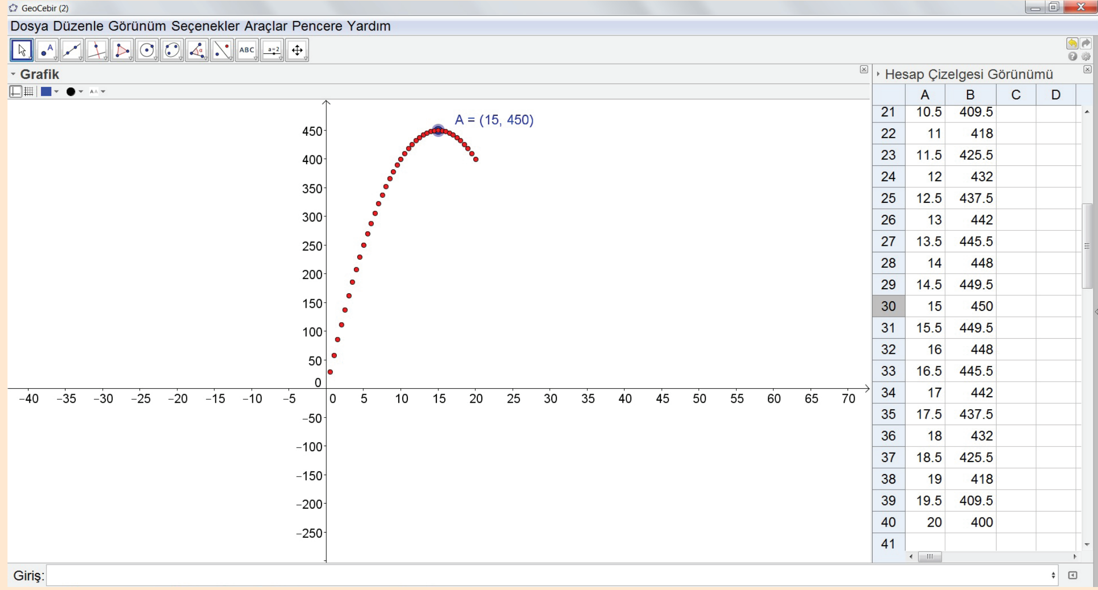
Aşağıda x in bazı değerleri (yani kaldırılan miktarlar) için oluğun alanını veren fonksiyona ait tablo ve tablodaki değerlere karşılık gelen noktalar kümesi, bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımı kullanılarak oluşturulmuştur.

GeoGebra yazılımı açıldıktan sonra "Görünüm" menüsünden "Hesap Çizelgesi Görünümü" tıklanarak yazılımın sağında Excel sayfasına benzer pencere açılır. Burada A sütununun ilk hücresine yani A1 hücresine 1, A2 hücresine 1,5 yazdıktan sonra ikisi birlikte seçilip 40. satıra kadar uzatıldığında 20 ye kadar sayılar çıkar.

B sütununun ilk satırına da –2*A1^2 + 60*A1 fonksiyonu yazıldığında A1 deki değere karşılık gelen fonksiyon değeri hesaplanır. Yine bu değer tutulup 40. satıra kadar uzatıldığında diğerlerine karşılık gelenler, yazılım tarafından hesaplanır. Tüm bu veriler seçilip farenin sol tarafına tıklandığında "Oluştur" menüsünde "Noktaları Listele" komutundan bu ikililer analitik düzlemde işaretlenir.

Yandaki görüntü elde edilir. Görüldüğü gibi alanın en büyük olduğu bir nokta vardır. Tablodaki verilere bakıldığında x = 15 için A(45) = 450 değerinin alanın en büyük değeri olduğu görülür.





Yukarıda grafik ve tablo oluşturulan bir yazılım olan GeoGebra yazılımında bu nokta gösterilmektedir. Görüldüğü gibi bu nokta, fonksiyonunun en büyük değeri yani parabolün tepe noktasıdır.

Bunu fonksiyonun cebirsel ifadesinden yararlanarak da bulabiliriz.

$A(x) = -2x^2 + 60x$ ifadesini tam kare yapalım.

$A(x) = -2(x^2 - 30x)$

$A(x) = -2(x - 15)^2 + 450$ elde edilir.

Bu fonksiyonun en büyük değeri istendiğine göre $(x - 15)^2 = 0 \Rightarrow x = 15$ bulunur.

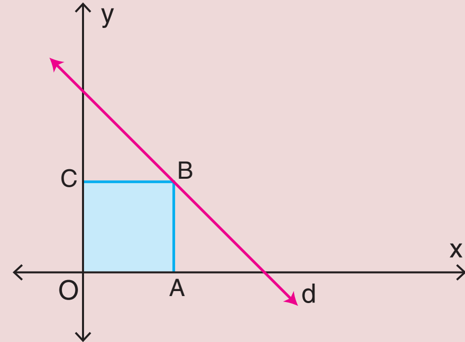
Demek ki alanın en büyük değeri, $A(15) = 450\ cm^2$ dir.

O hâlde üretici, 60 cm lik demir levhaları kenarlarından 15 cm kaldırarak suyun en fazla geçtiği bir oluk oluşturabilir.

Düşünelim:

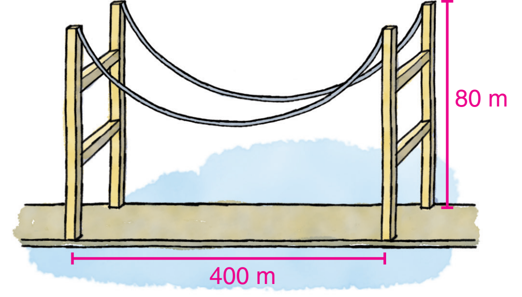
Yandaki analitik düzlemde OABC dikdörtgeninin B köşesi, denklemi $3x + 4y - 48 = 0$ olan d doğrusu üzerindedir.

Verilenlere göre OABC dikdörtgeninin alanının en büyük değerini tek değişkenli ikinci dereceden bir denklem biçiminde ifade ediniz. Bir bilgisayar yazılımı kullanarak bu değeri bulunuz.



Problem

Yardımseverlik, Türk kültürünün en önemli ögelerinden biridir. Bu bağlamda son derece cömert ve yardımsever olan Nazmiye Hanım, bulunduğu ilçeye yandaki gibi bir köprü yaptıracak; bu sayede ilçede yaşayan insanlar ulaşım sorunlarından kurtulacaktır.



Köprünün ayakları arası mesafe 400 m ve köprünün ayaklarının yerden yüksekliği 80 m dir. Ayaklar arasına yerleştirilen halatların yerden yüksekliği en az 40 m dir.

Halatların ve köprünün daha sağlam olması için köprünün ayakları arasına eşit aralıklı, yolun iki tarafına toplam 6 tane direk yerleştirilecektir. Direklerin uzunlukları toplamını bulalım.

Çözelim:

Köprünün ayakları arasının tam ortasına analitik düzlemi yerleştirelim. Bu durumda ayaklar arasındaki halatlar, parabole karşılık gelir. Bu parabole ait fonksiyon,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde olsun. Halatların yerden yüksekliği en az 40 m olduğuna göre parabolün tepe noktasının koordinatları, (0, 40) dır.

O hâlde $r = -\dfrac{b}{2a} = 0$ ve

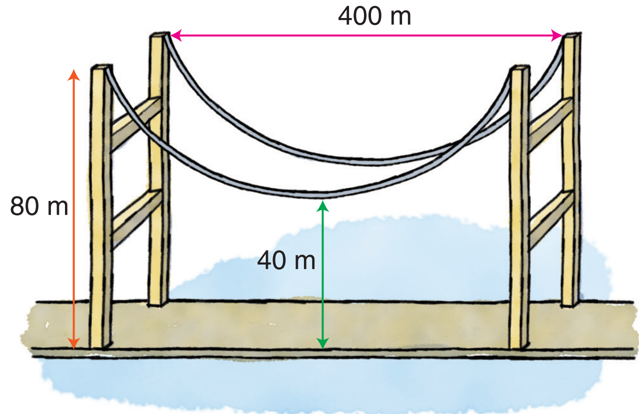
$k = f(0) = 40$ olmalıdır.

Bu durumda tepe noktası bilinen fonksiyon yazımını kullanalım. Yani

$f(x) = a(x - r)^2 + k$ için $r = 0$ ve

$k = 40$ olduğundan fonksiyon

$f(x) = ax^2 + 40$ olur.



Ayakların arası 400 m olup y eksenini ayakların tam ortasına yerleştirdiğimiz için parabolün üzerindeki iki nokta, (–200, 80) ve (200, 80) olacaktır. Bu noktalardan birini kullanarak fonksiyonda bilmediğimiz a katsayısını bulalım.

$f(200) = 80 \Rightarrow f(200) = a.200^2 + 40 = 80$

$\Rightarrow 40000.a = 40 \Rightarrow a = \dfrac{1}{1000}$ bulunur.

O hâlde fonksiyon, $f(x) = \dfrac{1}{1000} \cdot x^2 + 40$ elde edilir.

Yerleştirilen 6 direkten 3 tanesi yolun bir tarafında, 3 tanesi de diğer tarafında olacağına göre ayaklar arasına 100 m aralıklarla direkler yerleştirilmelidir. Bu direkler halata kadar olacağına göre f(–100), f(0) ve f(100) değerleri, direklerin boy uzunluklarını verecektir.

$f(-100) = \dfrac{1}{1000} \cdot (-100)^2 + 40 = 50\,m$

$f(0) = 40\,m$

$f(-100) = \dfrac{1}{1000} \cdot (100)^2 + 40 = 50\,m$

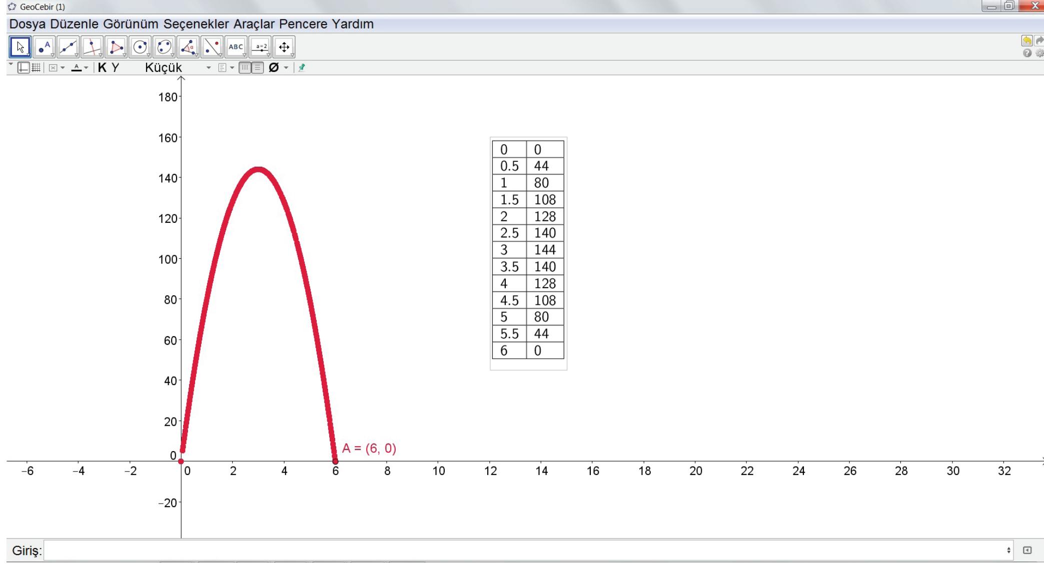
Yolun bir tarafındaki direklerin toplam uzunlukları, 50 + 40 + 50 = 140 m dir.

Yolun iki tarafına yerleştirilen direklerin toplam uzunlukları, 2.140 = 280 m olmalıdır.

Problem

Bir top, yerden yukarıya doğru belli bir hızla (m/sn.) atılıyor. Topun yerden yüksekliğini (h) zamana (t) bağlı olarak veren ilişki, $h(t) = -16t^2 + 96t$ şeklinde modelleniyor. Buna göre topun yerden en fazla kaç metre yüksekliğe ulaşacağını ve atıldıktan kaç saniye sonra yere düşeceğini bulalım.

Çözelim:



0	0
0.5	44
1	80
1.5	108
2	128
2.5	140
3	144
3.5	140
4	128
4.5	108
5	80
5.5	44
6	0

Yukarıda bilgi ve iletişim teknolojilerinden biri olan GeoGebra yazılımından yararlanarak topun belirli zamanlarda yerden yüksekliğini gösteren tablo ve topun izlediği yol gösterilmiştir. Bu çalışma önceki GeoGebra çalışmalarından da bilindiği üzere "Hesap Çizelgesi Görünümü" kullanarak oluşturulmuştur. Buradan da anlaşılacağı üzere top, bulunduğu yerden 6 saniye sonra düşmüştür.

Bunu cebirsel olarak gösterelim. Topun yere düştüğü yer x ekseni üzerinde olacağına göre verilen fonksiyona ait denklemin köklerini bulmamız gerekir.

$-16t^2 + 96t = 0 \Rightarrow -16t.(t-6) = 0 \;\Rightarrow\; t = 0$ veya $t = 6$ dır.

O hâlde top, 0 ve 6. saniyelerde yerdedir. Yani atıldıktan 6 saniye sonra yere düşmüştür.

Topun en fazla kaç metre yüksekliğe çıktığını bulalım. Bu da fonksiyonun en büyük değerine karşılık gelir. Yani tepe noktasının ordinatına eşittir. Yazılımdaki tabloda da görüldüğü gibi

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{96}{2.(-16)} = 3 \Rightarrow k = f(r) = f(3) = -16.3^2 + 96.3 = 144$ m bulunur.

O hâlde top, en fazla 144 m yüksekliğe ulaşmıştır.

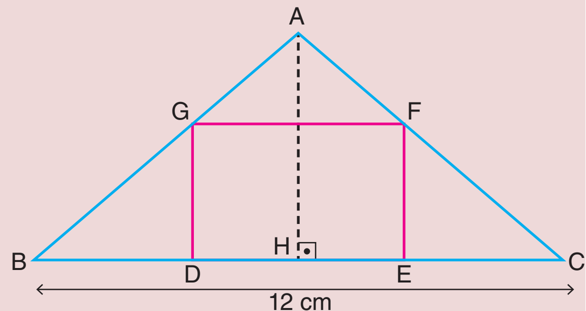
Düşünelim:

ABC üçgen ve DEFG dikdörtgen,

$G \in [AB]$, $F \in [AC]$, $[AH] \perp [BC]$,

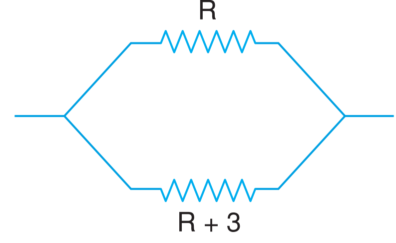
$|BC| = 12$ cm ve $|AH| = 10$ cm dir.

Verilenlere göre DEFG dikdörtgeninin alanının en büyük değeri kaç cm^2 dir?



Problem

Yandaki elektrik devresinde toplam direnç, 2 ohm dur. Rezistanslardan birinin direnci, diğerinin 3 ohm fazlasıdır. Her iki rezistans için dirençlerinin kaç ohm olduğunu bulalım.



Çözelim:

Paralel bağlı iki direncin toplam direnci,

$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ile bulunur. Buna göre

$\frac{1}{2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R+3} \Rightarrow 2.(R+3+R) = R.(R+3) \Rightarrow 4R + 6 = R^2 + 3R$

$\Rightarrow R^2 - R - 6 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir.

Bu denklemin köklerini bulduğumuzda bir tane direncin değerini elde ederiz.

$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 25$ ise

$R_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ ve $R_2 = \frac{1+5}{2} = 3$ bulunur.

Direnç negatif bir değer alamayacağı için R = 3 ohm olur.

Diğer direnç ise R + 3 = 3 + 3 = 6 ohm bulunur.

Problem

Bir yol yapımında çalışan mühendis, çevresine duyduğu sorumluluk ve işine duyduğu saygı gereği yolun son derece güvenli olmasını istemektedir. Bunun için bazı hesaplar yapmak zorundadır. Yolda yokuşlar vardır. Yokuşlardaki zirveler arası yumuşak geçişlerin sağlanması için gerekli eğimi belirler. %4 eğimli bir yolda x, yolun uzunluğu ve h yolun yüksekliğini gösterir. Yolun uzunluğu ile yüksekliği arasındaki ilişki, $h(x) = ax^2 + 0{,}04.x + c$ biçiminde tanımlanır.

Yolun belli bir noktasından 50 m ve 200 m uzaklıktaki yerden yükseklikleri eşit ve 20 m olduğuna göre yolun yüksekliğini veren fonksiyonun cebirsel ifadesini bulalım.

Çözelim:

Problemde fonksiyona ait (50, 20) ve (200, 20) noktaları verilmiştir. O hâlde

$20 = ax^2 + 0{,}04x + c$ eşitliğinde

$ax^2 + 0{,}04x + (c - 20) = 0$ biçiminde oluşturduğumuz denklemin kökleri 50 ve 200 olmalıdır.

Yani $x_1 = 50$ ve $x_2 = 200$ ise kökler toplamından $x_1 + x_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{0{,}04}{a}$ olur.

$50 + 200 = -\frac{0{,}04}{a} \Rightarrow a = -0{,}00016$ bulunur.

Şimdi de kökler çarpımından

$x_1 + x_2 = \frac{c-20}{a}$ ise

$50.200 = \frac{c-20}{-0{,}00016} \Rightarrow c = 18{,}4$ elde edilir.

O hâlde fonksiyonun cebirsel ifadesi, $f(x) = -0{,}00016.x^2 + 0{,}04.x + 18{,}4$ olur.

Problem

Yeni kurulan bir yerleşim yerinde ilk yılı 0 a karşılık gelmek üzere nüfus bilgisi yandaki tabloda verilmiştir.

Yıl	Nüfus
0	500
1	650
2	1100
3	1850
4	2900

x yılı, f(x) te nüfusu göstermek üzere aralarındaki ilişkinin $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde olduğu bilindiğine göre 10. yıldaki nüfusu bulalım.

Çözelim:

Fonksiyonun $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde olduğu bilindiğine göre bunun üzerindeki üç noktayı kullanarak fonksiyonun cebirsel ifadesini buluruz. Tablodaki istediğimiz 3 noktayı seçelim.

(0, 500), (1,650) ve (2, 1110) noktalarını seçersek

$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 500 \Rightarrow c = 500,$

$f(1) = a.1^2 + b.1 + c = 650 \Rightarrow a + b = 150$ ve

$f(2) = a.2^2 + b.2 + c = 1100 \Rightarrow 4.a + 2.b = 600$ dür.

$$\begin{array}{rl} -2a - 2b = & -300 \\ + \quad 4a + 2b = & + \; 600 \\ \hline 2a = & 300 \\ a = & 150 \text{ bulunur.} \end{array}$$

$a + b = 150 \Rightarrow 150 + b = 150 \Rightarrow b = 0$ olur.

O hâlde fonksiyonun cebirsel ifadesi, $f(x) = 150.x^2 + 500$ dür.

10. yıldaki nüfus,

$f(10) = 150.10^2 + 500 = 15\,500$ kişi olur.

Problem

Bir tekne, 4 saat boyunca 15 km uzunluğunda ve akıntı hızının 2 km/sa. olduğu bir nehirde akıntıya karşı gidip akıntı yönünde dönüyor. Teknenin akıntı yönünde ve akıntıya karşı ne kadar süre yol almış olduğunu bulalım.

Çözelim:

Teknenin akıntıya karşı hızı: $V = (x - 2)$ km/sa.

Teknenin akıntı yönünde hızı: $V = (x + 2)$ km/sa.

olur.

Toplam süre = akıntıya karşı gidilen süre + akıntı yönünde gidilen süre = 4 saat

Toplam süre = $\dfrac{15}{x-2} + \dfrac{15}{x+2} = 4$ ise

$15.(x + 2) + 15.(x - 2) = 4.(x - 2).(x + 2)$

$30x = 4x^2 - 16 \Rightarrow 4x^2 - 30x - 16 = 0$ denklemi elde edilir.

Bulduğumuz denklemin köklerini inceleyelim.

$\Delta = (-30)^2 - 4.4.(-16) = 1156$ ise

$$x_{1,2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{1156}}{2.4} = \frac{30 \pm 34}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{30-34}{8} = -0{,}5 \text{ ve } x_2 = \frac{30+34}{8} = 8 \text{ olur.}$$

O hâlde teknenin

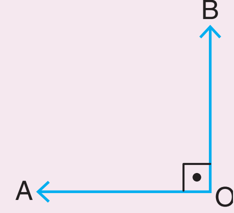
akıntıya karşı gittiği süre : $\dfrac{15}{8-2} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$ ve

akıntı yönünde gittiği süre : $\dfrac{15}{8+2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ saat bulunur.

Pekiştirelim:

1. Bir golf topuna belli bir m/sn. hızla vurulduğunda topun zamana (t) bağlı çıktığı yüksekliği (h) veren fonksiyon, $h(t) = -16t^2 + 160t$ ile veriliyor. Topa vuran kişinin bulunduğu yer ile topun düştüğü yer arasındaki uzaklık kaç m dir? Top, yerden en fazla kaç m yükseğe çıkar?

2. İki bisikletli şekildeki O noktasından A ve B yönlerine doğru hareket ederek dik biçimde birbirinden uzaklaşmaktadır. B yönüne giden bisikletli, A yönüne gidenden saatte 2 km daha hızlı gitmektedir. 4 saat sonra aralarındaki uzaklık 40 km olduğuna göre her bir bisikletlinin hızını bulunuz.



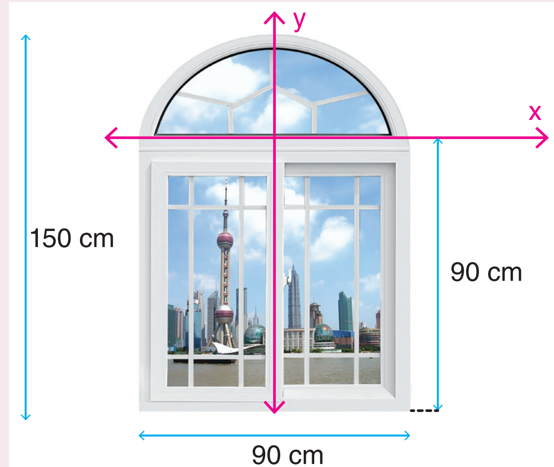
3. Çocukları çok seven ve onların mutluluğunu düşünen bir hayırsever, mahallesindeki okulun bahçesine basketbol sahası yaptıracaktır. Saha, kenar uzunlukları x + 3 ve x + 8 olan okulun bahçesindeki dikdörtgen şeklindeki araziye taban alanı 234 m^2 olacak şekilde yapılacaktır. Basketbol sahasının kenar uzunlukları kaç m olur?

4. Bir arabanın V hızıyla gideceği yolu (s) veren ilişki $s(V) = -\frac{1}{10}V^2 + \frac{1}{2}V$ biçiminde tanımlanmaktadır. Verilenlere göre bu yolculuktaki s nin en büyük değeri için V ne olmalıdır?

5. Bir su fıskıyesi sürekli olarak yandaki gibi su akıtmaktadır. Bu su fıskiyesinde suyun çıktığı yükseklik (h) ve zaman t olmak üzere, suyun gittiği yolu m/sn. cinsinden veren ilişki $h(t) = -16t^2 + 48t + 6$ olduğuna göre suyun çıktığı maksimum yükseklik kaç m dir?

6. Bir bilgisayar satışında; x bilgisayar sayısını ve G bilgisayar satışından kazanılan geliri göstermek üzere bilgisayar sayısına bağlı geliri gösteren ilişki, $G(x) = -\frac{x^2}{500} + 20x$ olduğuna göre kaç bilgisayar satıldığında gelirin en fazla olacağını bulunuz.

7. Yandaki gibi bir pencerenin üst kısmı parabol şeklindedir. Analitik düzlem şekildeki gibi yerleştirilmiştir. Pencerenin genişliği 90 cm, yüksekliği en fazla 150 cm dir. Pencerenin üst kısmına dikey biçimde dekorasyon amaçlı, eşit aralıklı 5 tane tahta yerleştirilecektir. Bu tahtaların uzunlukları kaçar cm olmalıdır?



3.3. Fonksiyonların Dönüşümleri

1. fotoğraf

2. fotoğraf

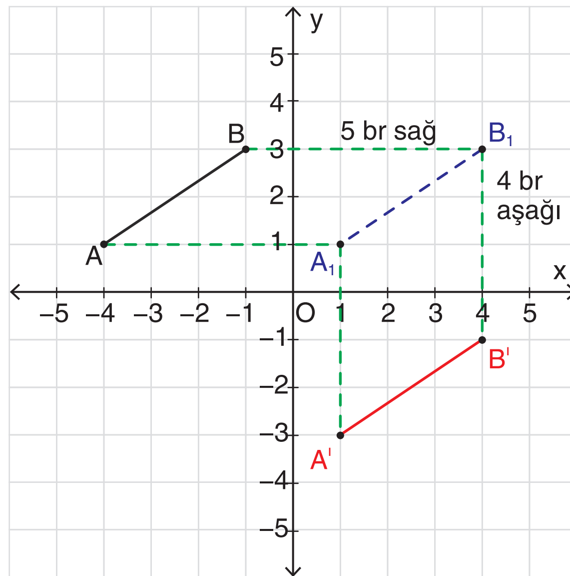
1. fotoğrafta köprü altında kırmızı çizili eğriler arasında,

2. fotoğrafta köprü üzerindeki beyaz doğrular arasında matematiksel olarak nasıl bir ilişki olmalıdır? Açıklayınız.

3.3.1. Dönüşüm Yardımıyla Grafik Çizimi

Hatırlayalım:

Genel olarak bir nesneyi bir yerden başka bir yere belirli bir doğrultu ve yönde kaydırma hareketine **öteleme** adı verilir. Doğruya göre öteleme yapılırken, x ve y eksenleri boyunca belirtilen yönde ve belirtilen birim kadar bütün noktalar paralel olarak ötelenir. Aşağıda [AB] nın x ekseni boyunca 5 br sağa, y ekseni boyunca 4 br aşağıya ötelenmesi sonucu oluşan [A′B′] sı çizilmiştir.



A(–4, 1) ve B(–1, 3) noktalarının bir önceki sayfada verilen öteleme sonucunda koordinatları

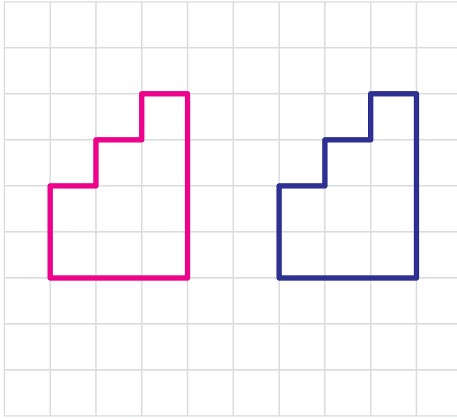
$$A(-4, 1) \xrightarrow[\text{5 br sağa}]{\text{x ekseni boyunca}} A'(-4 + 5, 1) \xrightarrow[\text{4 br aşağıya}]{\text{y ekseni boyunca}} A''(-4 + 5, 1 - 4) = A''(1, -3) \text{ tür.}$$

$$B(-1, 3) \xrightarrow[\text{5 br sağa}]{\text{x ekseni boyunca}} B'(-1 + 5, 3) \xrightarrow[\text{4 br aşağıya}]{\text{y ekseni boyunca}} B''(-1 + 5, 3 - 4) = B''(4, -1) \text{ dir.}$$

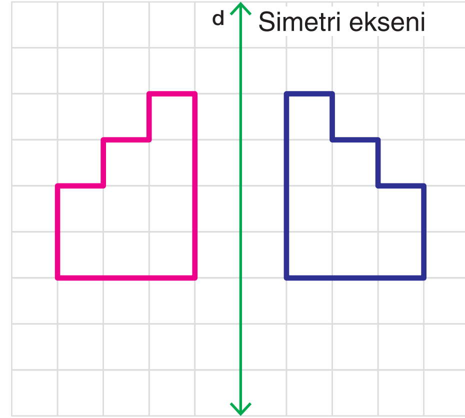
Herhangi bir C(x, y) noktasının x ekseni boyunca a br kadar sağa ötelenmesi sonucu C′(x + a, y) noktası, a br kadar sola ötelenmesi sonucu C′′(x – a, y) noktası elde edilir.

Benzer şekilde hernangi bir D(x, y) noktasının y ekseni boyunca a br kadar yukarı ötelenmesi sonucu D′(x, y + a) noktası, a br kadar aşağıya ötelenmesi sonucu D′′(x, y – a) noktası elde edilir. Bir şeklin öteleme sonucundaki görüntüsü, bu şekle eş ve simetriktir. Bu tür simetriye **öteleme simetrisi** denir.

Yansıma simetrisi ise bir şeklin üzerindeki tüm noktaların herhangi bir doğruya (simetri eksenine) göre eşit uzaklıkta yer alan noktaların bulunması sonucu elde edilen simetridir. Aşağıda yansıma ve öteleme simetrilerine ait şekil örnekleri görülmektedir. İnceleyiniz.

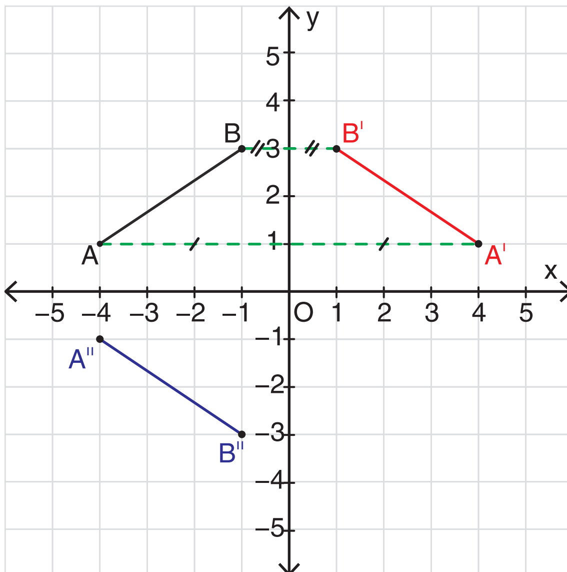


Öteleme simetrisi



Yansıma simetrisi

Aşağıdaki analitik düzlemde [AB] nın x ve y eksenlerine göre simetrileri görülmektedir.



A(–4, 1) ve B(–1, 3) noktalarının y eksenine göre simetrileri,

A(–4, 1) → A′(4, 1)

B(–1, 3) → B′(1, 3)

biçimindedir.

A ve B noktalarının x eksenine göre simetrileri,

A(–4, 1) → A′′(–4, –1)

B(–1, 3) → B′′(–1, –3)

biçimindedir.

Yani herhangi bir C(x, y) noktasının x eksenine göre simetriği C′(x, –y), y eksenine göre simetriği C′′(–x, y) dir.

Keşfedelim:

Araç ve gereçler: dinamik matematik / geometri yazılımı vb. grafik çizimi yapabilen bir yazılım

1. Bir yazılım kullanarak f: ℝ → ℝ olmak üzere y = f(x) = x^2 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2. Aynı analitik düzlemde farklı renklerle y = f(x) – 3, y = f(x) – 1, y = f(x) + 2 ve y = f(x) + 4 fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

3. 1. adımda fonksiyonu y = f(x) = x^3 olarak alıp benzer şekilde bu fonksiyonun grafiğini ve 2. adımdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

▶ Buna göre y = f(x) fonksiyonunun grafiği verildiğinde y = f(x) + b foksiyonunun grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiğini açıklayınız.

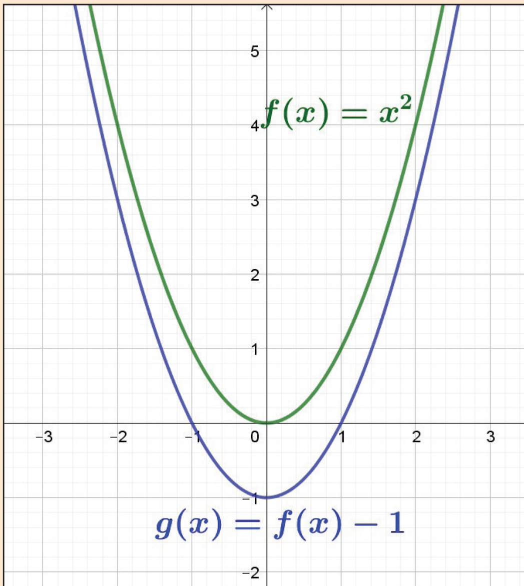
4. Farklı bir analitik düzlemde y = f(x) = x^2 fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu grafik yardımıyla y = f(x + 3), y = f(x + 1), y = f(x – 2) ve y = f(x – 4) fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

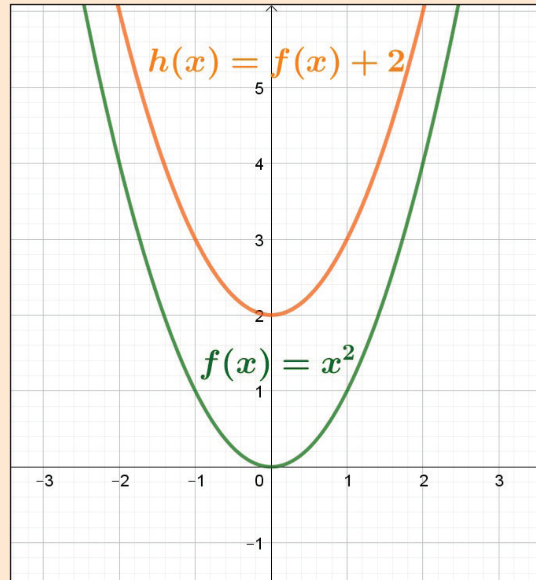
5. Benzer şekilde y = f(x) = x^3 fonksiyonu için 4. adımdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

▶ Buna göre y = f(x) fonksiyonu verildiğinde y = f(x + a) fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiğini açıklayınız.

Öğrenelim:

f: ℝ → ℝ tanımlı bir y = f(x) fonksiyonu verildiğinde y = f(x) + b (b ∈ ℝ) fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizileceğini inceleyelim. Örneğin y = f(x) = x^2 fonksiyonunun grafiği verildiğinde g(x) = f(x) – 1 ve h(x) = f(x) + 2 fonksiyonlarının grafiğini GeoGebra yazılımında çizelim. Bunun için yazılımda "Giriş" satırına önce Giriş: f(x)=x^2 ve Giriş: g(x)=f(x)-1 yazılarak aşağıdaki soldaki grafik sonra Giriş: f(x)=x^2 ve Giriş: h(x)=f(x)+2 yazılarak sağdaki grafik elde edilir.





Grafiklerden de görüldüğü gibi $y = f(x) = x^2$ foksiyonunun grafiği çizildiğinde $g(x) = f(x) - 1 = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = x^2$ ün y ekseni boyunca 1 br aşağıya ötelenmişidir.

$h(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği ise $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca 2 br yukarıya ötelenmişidir.

Eğriler üzerinde ele aldığımız noktalar arasındaki ilişkiye bakalım.

$y = f(x) = x^2$	$g(x) = f(x) - 1 = x^2 - 1$
$(-1, 1)$	$(-1, 1 - 1) = (-1, 0)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$
$(0, 0)$	$(0, 0 - 1) = (0, -1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$
$(1, 1)$	$(1, 1 - 1) = (1, 0)$

y ekseni boyunca
1 br aşağıya öteleme

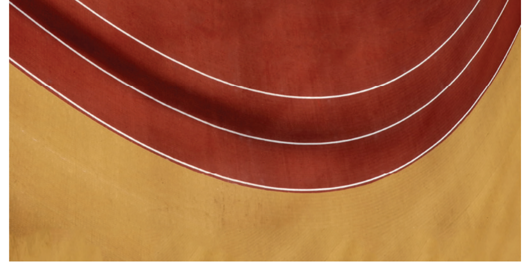
$y = f(x) = x^2$	$y = f(x) + 2 = x^2 + 2$
$(-1, 1)$	$(-1, 1 + 2) = (-1, 3)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + 2\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
$(0, 0)$	$(0, 0 + 2) = (0, 2)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + 2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
$(1, 1)$	$(1, 1 + 2) = (1, 3)$

y ekseni boyunca
2 br yukarıya öteleme

O hâlde genel olarak herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonuna ait grafik verildiğinde $y = f(x) + b$ fonksiyonunun grafiği $b > 0$ ise $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca b birim kadar yukarıya, $b < 0$ ise b birim kadar aşağıya ötelenmiş biçimidir.

Uygulayalım:

Yandaki fotoğrafta ortadaki eğri, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Eğriler arası mesafe 1,5 m ise en üst ve en alt eğrilerin fonksiyonlarını bulalım.



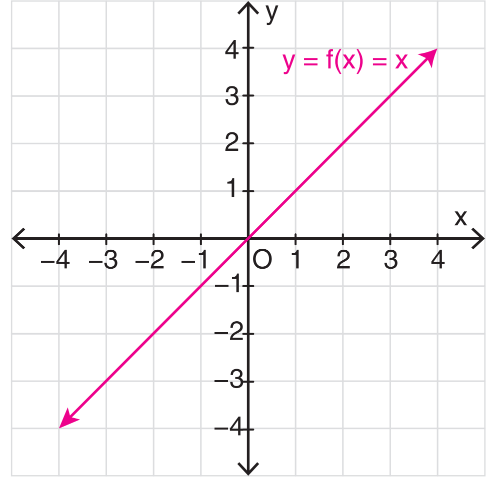
Çözelim:

Fotoğraftaki eğriler, yatayda ötelenmiş eğrilerdir. Ortadaki eğriye karşılık gelen fonksiyonun kuralı $y = f(x) = x^2$ ve eğriler aralarındaki mesafe 1,5 m olduğuna göre en üstteki eğri, $y = f(x) + 1{,}5 = x^2 + \frac{3}{2}$ ve en alttaki eğri ise $y = f(x) - 1{,}5 = x^2 - \frac{3}{2}$ denklemiyle ifade edilir.

Uygulayalım:

Yanda y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Verilenlere göre y = f(x) – 2 ve y = f(x) + 3 fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği üzerinde

(–2, –2), (0, 0) ve (2, 2) noktalarını seçelim.

Bu noktalar, y = f(x) – 2 fonksiyonu ile

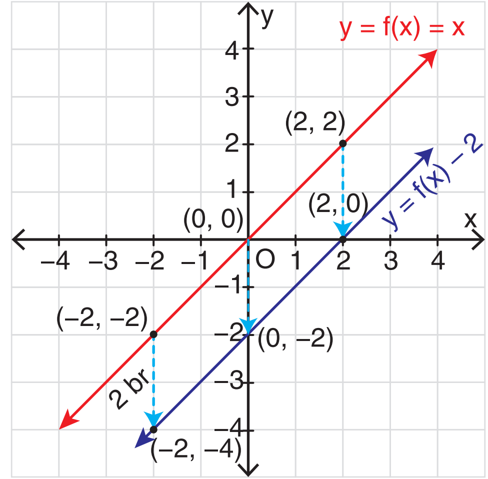
(–2, –2) → (–2, –2 – 2) = (–2, –4)

(0, 0) → (0, 0 – 2) = (0, – 2)

(2, 2) → (2, 2 – 2) = (2, 0) noktalarına dönüşür.

Yani istenen fonksiyonun ordinatları, verilen fonksiyonun ordinatlarından 2 küçüktür.

O hâlde y = f(x) – 2 fonksiyonunun grafiği, verilen y = f(x) = x fonksiyonunun grafiğinin 2 br aşağısında yer alır. Bu grafiğin çizimi yanda görülmektedir.



Benzer şekilde y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği üzerinde (–2, –2), (0, 0) ve (2, 2) noktalarını seçelim.

Bu noktalar, y = f(x) + 3 fonksiyonu ile

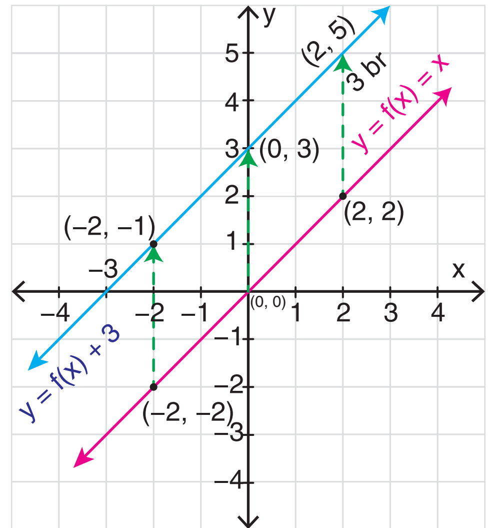
(–2, –2) → (–2, –2 + 3) = (–2, 1)

(0, 0) → (0, 0 + 3) = (0, 3)

(2, 2) → (2, 2 + 3) = (2, 5) noktalarına dönüşür.

Yani istenen fonksiyonun ordinatları, verilen fonksiyonun ordinatlarından 3 büyüktür.

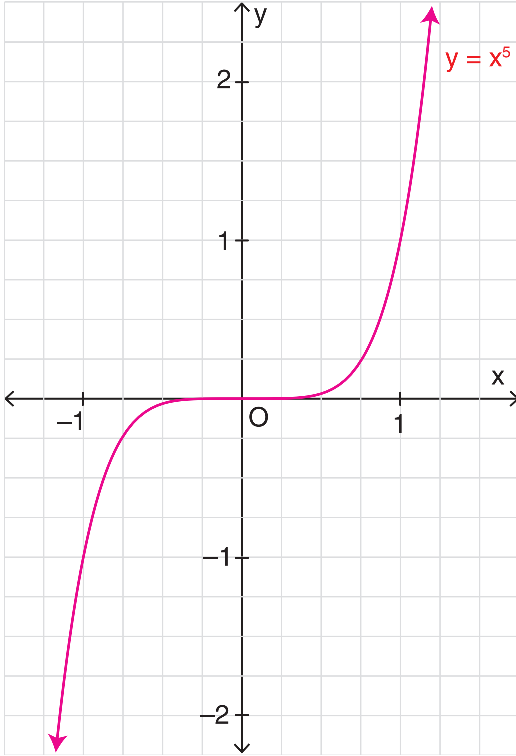
O hâlde y = f(x) + 3 fonksiyonunun grafiği, verilen y = f(x) = x fonksiyonunun grafiğinin 3 br yukarısındadır. Bu grafiğin çizimi yanda görülmektedir.



Uygulayalım:

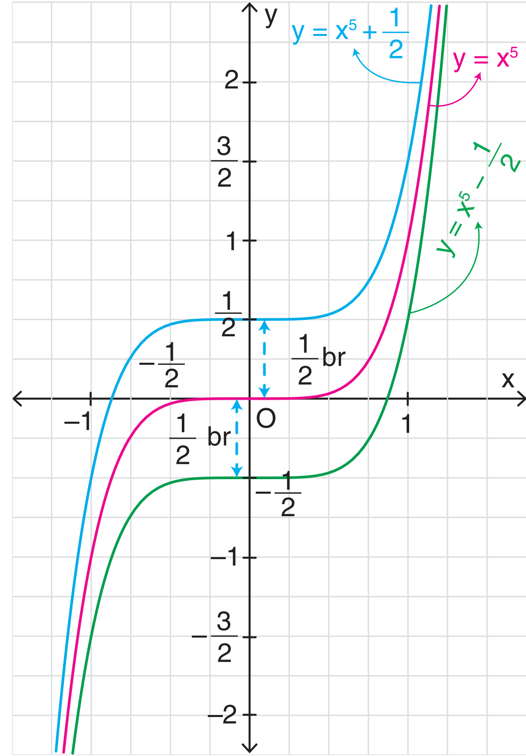
Aşağıda $y = f(x) = x^5$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$y = f(x) - \frac{1}{2}$ ve $y = f(x) + \frac{1}{2}$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

$y = x^5 - \frac{1}{2}$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^5$ fonksiyonunun grafiğinin $\frac{1}{2}$ br aşağıya ötelenmiş şeklidir. $y = x^5 + \frac{1}{2}$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^5$ fonksiyonunun grafiğinin $\frac{1}{2}$ br yukarıya ötelenmiş şeklidir. Aşağıda bu iki grafik çizilmiştir. İnceleyiniz.

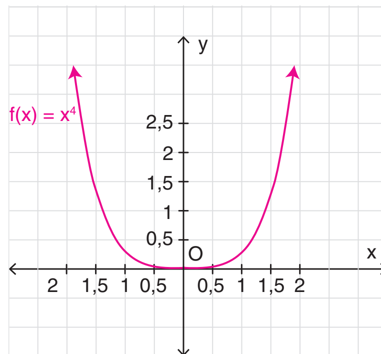


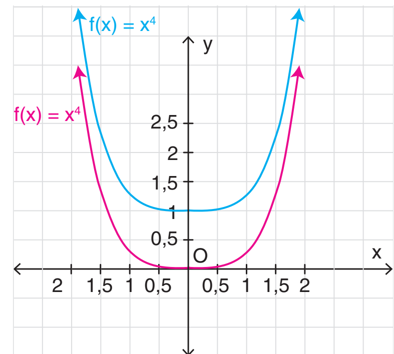
Uygulayalım:

Aşağıdaki grafik $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için için $f(x) = x^4$ fonksiyonunun grafiğidir. Buna göre $y = f(x) + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

$y = x^4 + 1$ fonksiyonunun grafiği $y = x^4$ fonksiyonunun grafiğinin 1 br yukarıya doğru ötelenmiş şeklidir. Yanda bu grafik çizilmiştir.

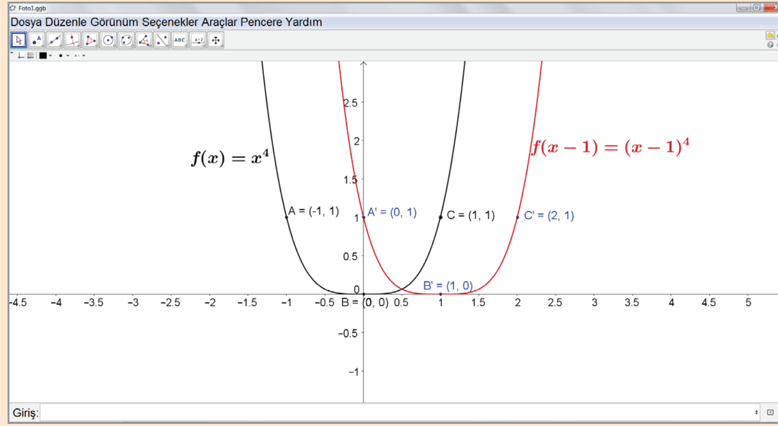




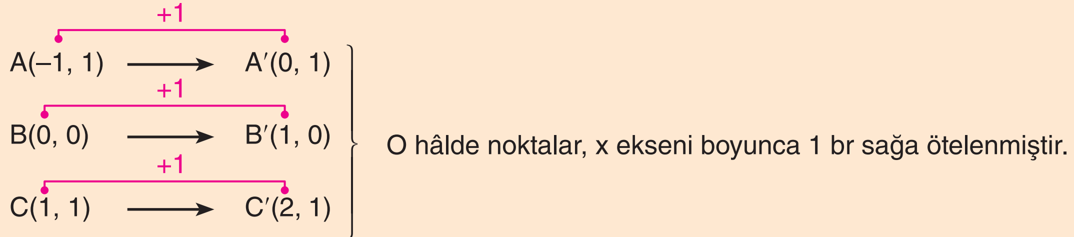
Öğrenelim:

y = f(x) fonksiyonu verildiğinde y = f(x – a) (a $\in \mathbb{R}$) fonksiyonunun grafiğinin çizim aşamalarını inceleyelim. Örneğin y = f(x) = x^4 fonksiyonunun grafiği verildiğinde y = f(x – 1) ve y = f(x + 2) fonksiyonlarının grafiğini çizelim. Bu çizimleri dinamik bir matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımında çizelim. Siz de bu çizimleri yapabilirsiniz.

Yazılımın en altındaki “Giriş” satırına `Giriş: f(x)=x^4` biçiminde f(x) i yazıp “Enter” a basınız. Yazılımda f(x) = x^4 fonksiyonunun grafiği çizilir. Benzer şekilde “Giriş” satırına `Giriş: f(x-1)` biçiminde yazıp “Enter” a basınız. f(x – 1) = $(x – 1)^4$ ün grafiği yazılımda çizilmiş olur.

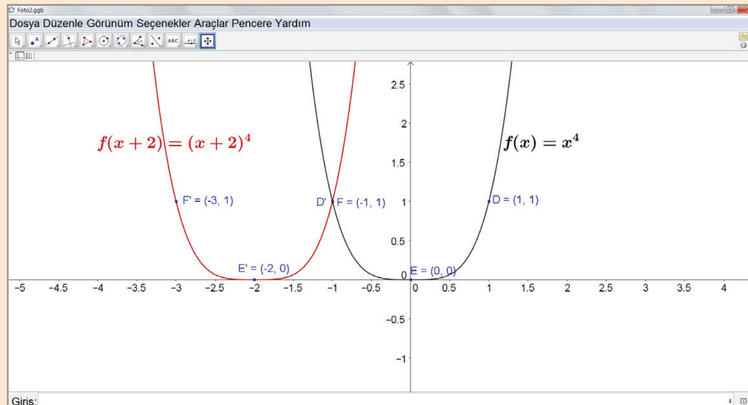


y = f(x) = x^4 fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalarla y = f(x – 1) fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



y = f(x – 1) fonksiyonunun grafiği, y = f(x) = x^4 fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 1 br sağa ötelenmiş biçimidir.

Şimdi de y = f(x) = x^4 fonksiyonu ile y = f(x + 2) = $(x + 2)^4$ fonksiyonunun grafiğini yukarıda anlatıldığı gibi dinamik bir matematik yazılımında çizelim.



$y = f(x) = x^4$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalarla $y = f(x + 2) = (x + 2)^4$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$D(1, 1) \xrightarrow{-2} D'(-1, 1)$

$E(0, 0) \xrightarrow{-2} E'(-2, 0)$

$F(-1, 1) \xrightarrow{-2} F'(-3, 1)$

O hâlde noktalar, x ekseni boyunca 2 br sola ötelenmiştir.

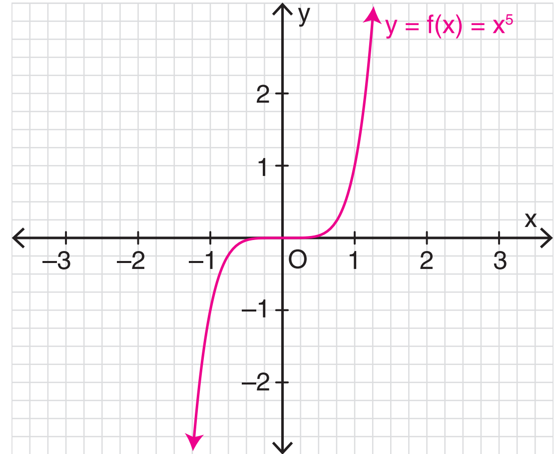
$y = f(x + 2) = (x + 2)^4$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = x^4$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 2 br sola ötelenmiş biçimidir.

Genel olarak $y = f(x)$fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = f(x + a)$ fonsiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca a br kadar (sağa ya da sola) ötelenmiş biçimidir.

Bu durumda (b, c) verilen fonksiyonunun üzerinde bir nokta ise $y = f(x + a)$ fonksiyonu, bu noktayı (b – a, c) ye dönüştürür. $(b, c) \rightarrow (b - a, c)$ olur.

Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = x^5$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f(x - 3)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

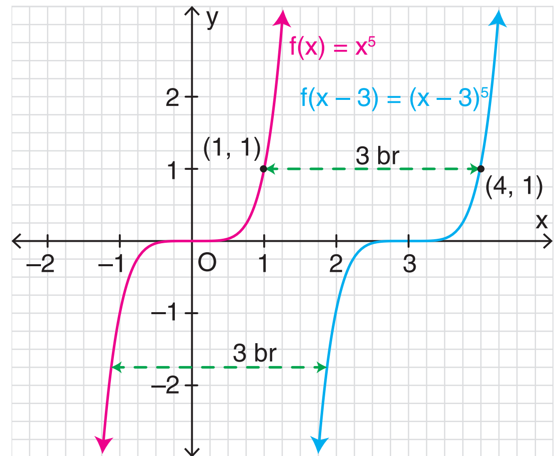


Çözelim:

$y = f(x - 3) = (x - 3)^5$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = x^5$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 3 br sağa ötelenmişidir.

$y = f(x) = x^5$ fonksiyonu üzerindeki (1, 1) noktası, $y = f(x - 3)$ fonksiyonu ile $(1 - (-3), 1) = (4, 1)$ noktasına dönüşür.

$y = f(x) = x^5$ fonksiyonunun üzerindeki her noktayı bu şekilde 3 br sağa ötelersek $y = f(x - 3)$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi elde edilir.

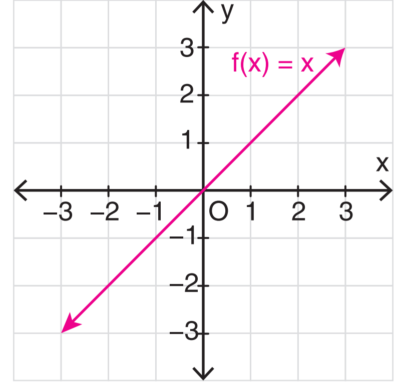


Uygulayalım:

Yanda y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre y = f(x + 1) ve y = f(x – 2) fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

Çözelim:

y = f(x) = x fonksiyonu üzerinde (–2, –2), (0, 0) ve (2, 2) noktalarını alalım.



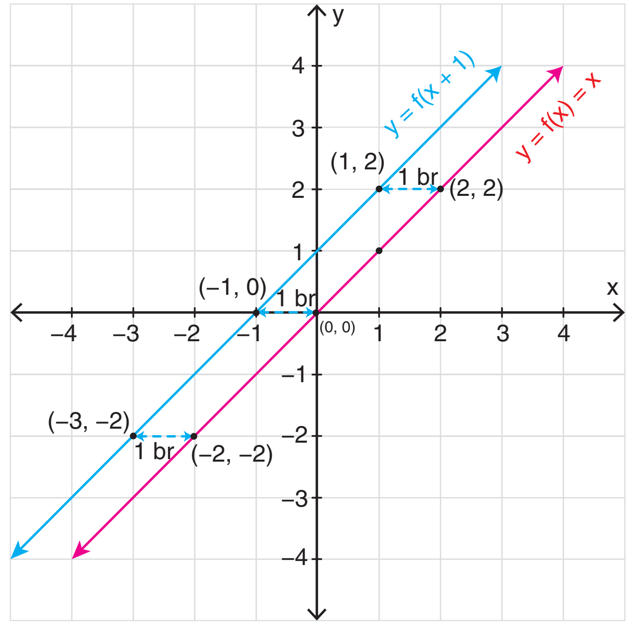
y = f(x + 1) fonksiyonu; bu noktaları

(–2, –2) → (–2 –1, –2) = (–3, –2),

(0, 0) → (0 – 1, 0) = (–1, 0),

(2, 2) → (2 – 1, 2) = (1, 2) noktalarına dönüştürür.

Yani verilen y = f(x) = x fonksiyonu üzerindeki her nokta x ekseni boyunca 1 br sola ötelenerek istenen y = f(x + 1) fonksiyonunun grafiği yandaki gibi çizilir.



Benzer biçimde y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği üzerinde (–2, –2), (0, 0) ve (2, 2) noktalarını alalım.

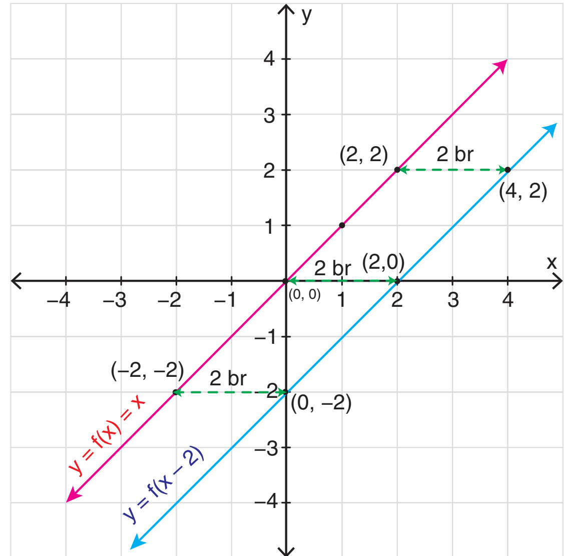
y = f(x – 2) fonksiyonu; bu noktaları

(–2, –2) → (–2 – (–2), –2) = (0, –2)

(0, 0) → (0 – (–2), 0) = (2, 0)

(2, 2) → (2 – (–2), 2) = (4, 2) noktalarına dönüştürür.

Yani verilen y = f(x) = x fonksiyonu üzerindeki her nokta x ekseni boyunca 2 br sağa ötelenerek istenen y = f(x – 2) fonksiyonunun grafiği yandaki gibi çizilir.

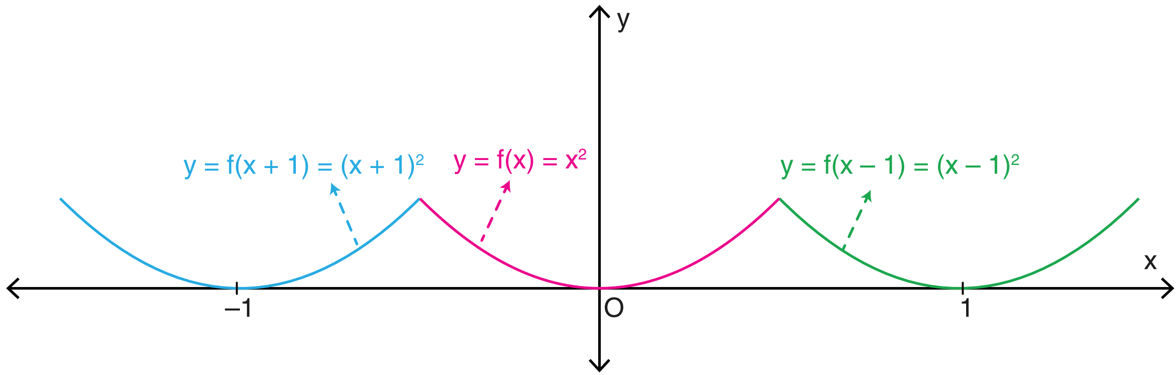


Uygulayalım:

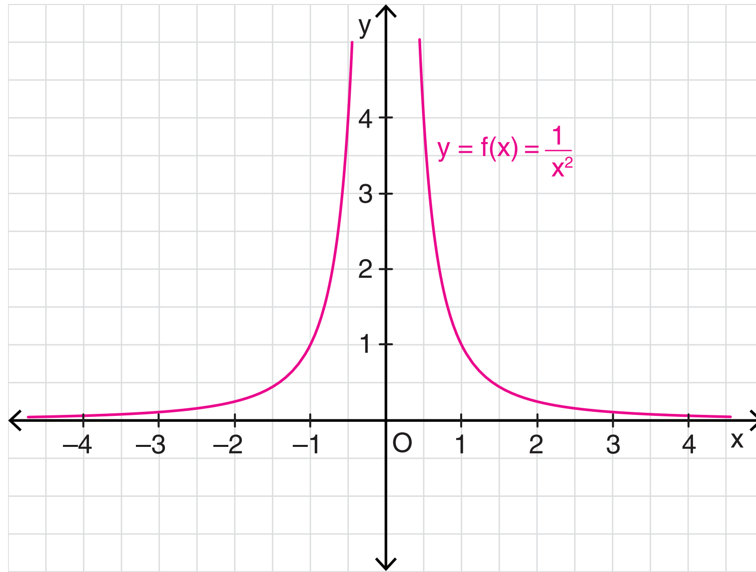
Yandaki fotoğrafta ortadaki perde diliminin $y = f(x) = x^2$ fonksiyonuna karşılık geldiğini düşünelim. Bunun sağ ve solundaki perde dilimleri 1 m aralıkla yerleştirildiğine göre bunlara ait fonksiyonların kurallarını bulalım.

Çözelim:

Perdenin ortasındaki dilim $y = f(x) = x^2$ ve diğer dilimler 1 m aralıkla yerleştirilmişse ortadaki perdenin solundaki dilim, $y = f(x + 1) = (x + 1)^2$ fonksiyonuna; sağındaki dilimde de $y = f(x - 1) = (x - 1)^2$ fonksiyonuna karşılık gelir. Aşağıda bu durumun analitik düzlemdeki hâli görülmektedir.



Uygulayalım:



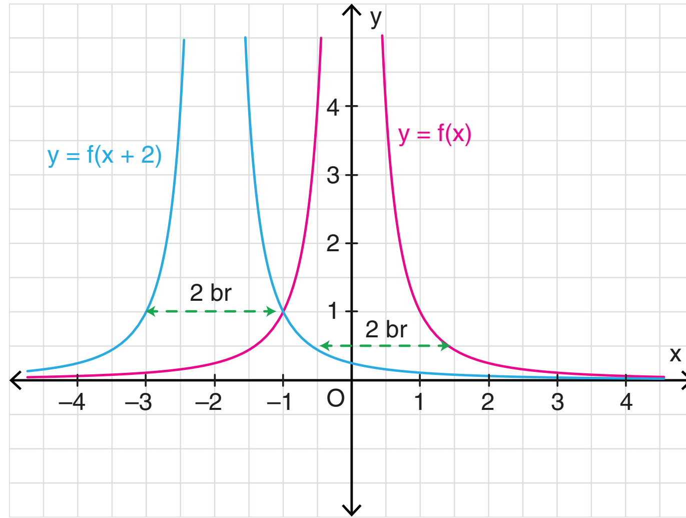
Yukarıda $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f(x + 2)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözelim:

$y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu üzerinde (1, 1) noktasını alalım.

Bu nokta, y = f(x + 2) fonksiyonu ile (1 – 2, 1) = (–1, 1) noktasına dönüşür.

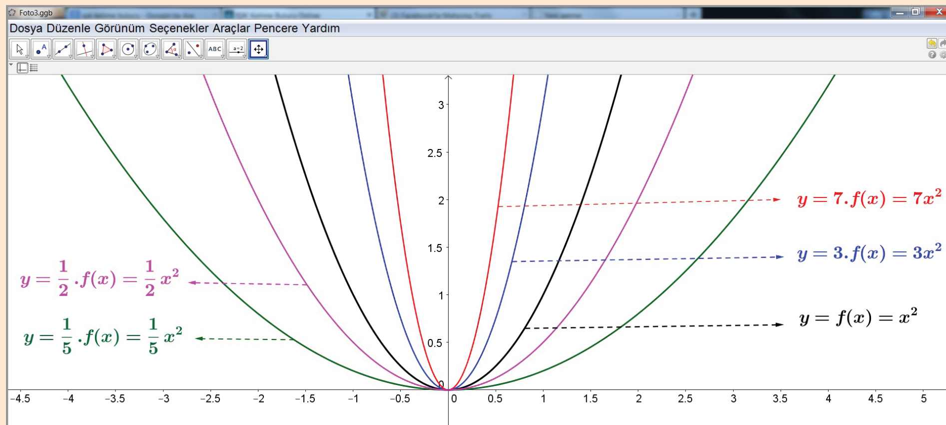
Aşağıdaki grafikte de görüldüğü gibi y = f(x + 2) fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca 2 br sola ötelenmiş biçimidir. Yani $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ üzerinde alınan her (x, y) noktası, y = f(x + 2) fonksiyonu ile (x – 2, y) noktasına dönüşür.



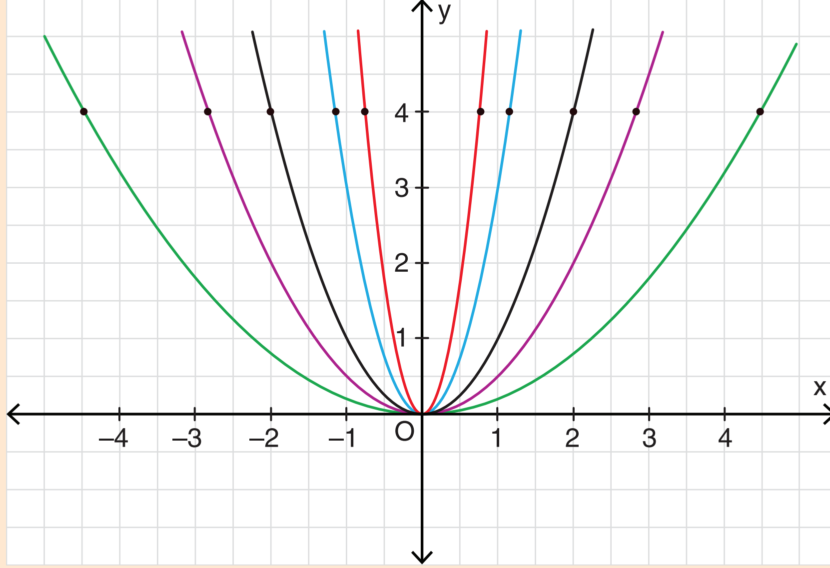
Öğrenelim:

Herhangi bir f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) biçiminde bir fonksiyon verildiğinde y = k.f(x) ($k \neq 0$) fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Bu çizimleri dinamik bir matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımında yapalım.

Örneğin $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun grafiği ile $y = \frac{1}{5} \cdot f(x)$, $y = \frac{1}{2} \cdot f(x)$, y = 3.f(x) ve y = 7.f(x) fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki gibidir. Yazılımda en altta yer alan “Giriş” satırına `Giriş: f(x) = x^2` yazıp “Enter” a basınca $f(x) = x^2$ çizilir. Daha sonra yine “Giriş” satırına ayrı ayrı `Giriş: 1/5 f(x)` , `Giriş: 1/2 f(x)` , `Giriş: 3 f(x)` ve `Giriş: 7 f(x)` yazıp “Enter” a basıldığında tüm grafikler çizilmiş olur.



Fonksiyonların grafiklerinde görüldüğü gibi bir $y = f(x) = x^2$ fonksiyonu verildiğinde $y = k.f(x)$ fonksiyonlarının çiziminde k pozitif gerçek sayısı büyüdükçe fonksiyon grafiğinde kollar y eksenine yaklaşmaktadır. Bunu her bir eğride örneğin y = 4 değerine karşılık gelen x bileşenlerini bularak görelim.



Aşağıdaki tabloda fonksiyonların y = 4 değerine karşılık gelen x değerleri yer almaktadır.

Fonksiyon	y	x_1	x_2
$y = \frac{1}{5}f(x) = \frac{1}{5}x^2$	4	–4,47	4,47
$y = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}x^2$	4	–2,83	2,83
$y = f(x) = x^2$	4	–2	2
$y = 3f(x) = 3x^2$	4	–1,73	1,73
$y = 7f(x) = 7x^2$	4	–0,76	0,76

Tablodan görüldüğü gibi $y = f(x) = k.x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ için $k \in \mathbb{R}^+$ değeri arttıkça fonksiyon grafiklerinde kollar, y eksenine doğru yaklaşmaktadır. Bunu farklı bir şekilde açıklayalım. $y = f(x) = x^n$ üzerinde bir nokta (a, b) olsun. Bu nokta, $y = k.f(x)$ fonksiyonu ile (a, k.b) noktasına dönüşür.

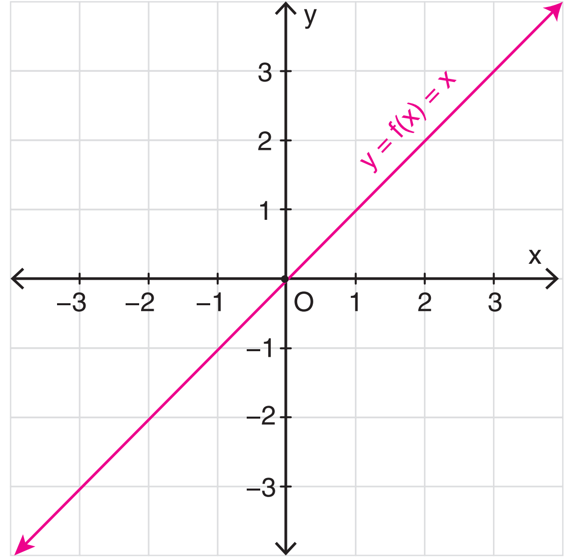
Yani $(a, b) \rightarrow (a, k.b)$ olur.

Genel olarak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de tanımlı $y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = k.f(x)$ için bu fonksiyonların grafiğinde k büyüdükçe kollar, y eksenine yaklaşmaktadır.

Uygulayalım:

Yanda y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$y = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ ve $y = 2 . f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

y = f(x) = x fonksiyonu üzerinde (–4, –4), (–2, –2), (0, 0), (2, 2) ve (4, 4) noktalarını alalım. Bu noktalar, $y = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ fonksiyonu ile

$(-4, -4) \rightarrow \left(-4, \frac{1}{2} \cdot (-4)\right) = (-4, -2)$

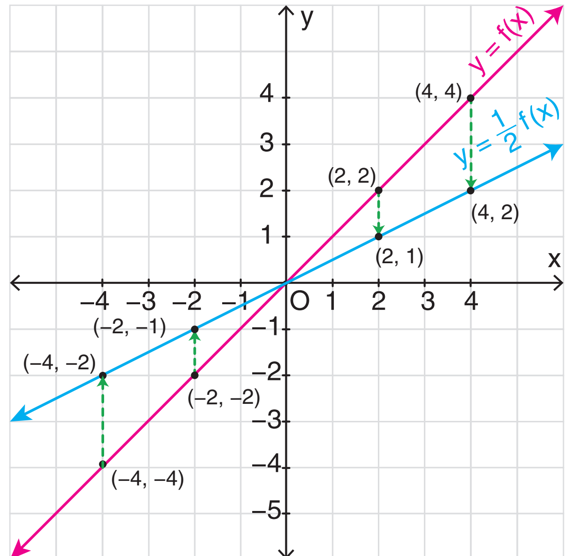
$(-2, -2) \rightarrow \left(-2, \frac{1}{2} \cdot (-2)\right) = (-2, -1)$

$(0, 0) \rightarrow \left(0, \frac{1}{2} \cdot 0\right) = (0, 0)$

$(2, 2) \rightarrow \left(2, \frac{1}{2} \cdot 2\right) = (2, 1)$

$(4, 4) \rightarrow \left(4, 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = (4, 2)$ noktalarına dönüşür.

Yani istenen grafik dikey olarak daralmaktadır. Bu da grafiğin y ekseninden uzaklaştığını gösterir. y = f(x) = x fonksiyonunun üzerindeki her noktanın ordinatının yarısı alınarak $y = \frac{1}{2} f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilmelidir. İstenen grafik yandaki gibidir.



Şimdi de y = 2.f(x) fonksiyonunun grafiğini çizelim. Bunun için y = f(x) = x fonksiyonunun grafiği üzerinde (–2, –2), (–1, –1), (0, 0), (1, 1) ve (2, 2) noktalarını alalım. Bu noktalar, y = 2.f(x) fonksiyonu ile

(–2, –2) → (–2, 2.(–2)) = (–2, –4)

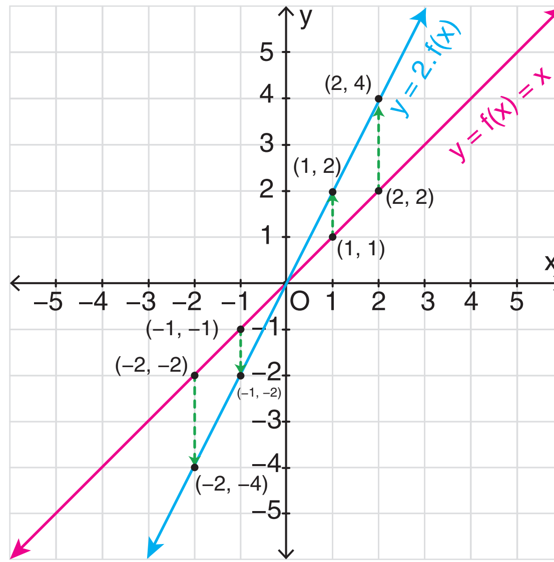
(–1, –1) → (–1, 2.(–1)) = (–1, –2)

(0, 0) → (0, 2.0) = (0, 0)

(1, 1) → (1, 2.1) = (1, 2)

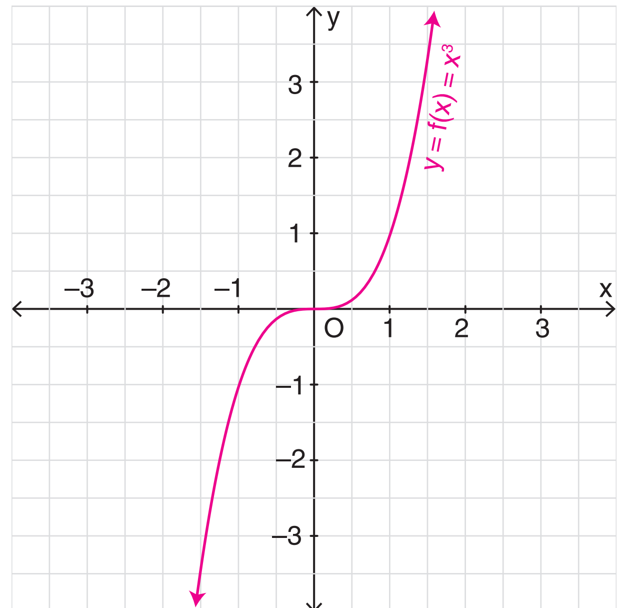
(2, 2) → (2, 2.2) = (2, 4) noktalarına dönüşür.

y = f(x) = x fonksiyonunun üzerindeki her noktanın ordinatının iki katı alınarak y = 2.f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmelidir. İstenen grafik aşağıdaki gibidir. Çizilen grafiğin eskiye oranla dikey olarak y eksenine yakınlaştığı görülmektedir.



Uygulayalım:

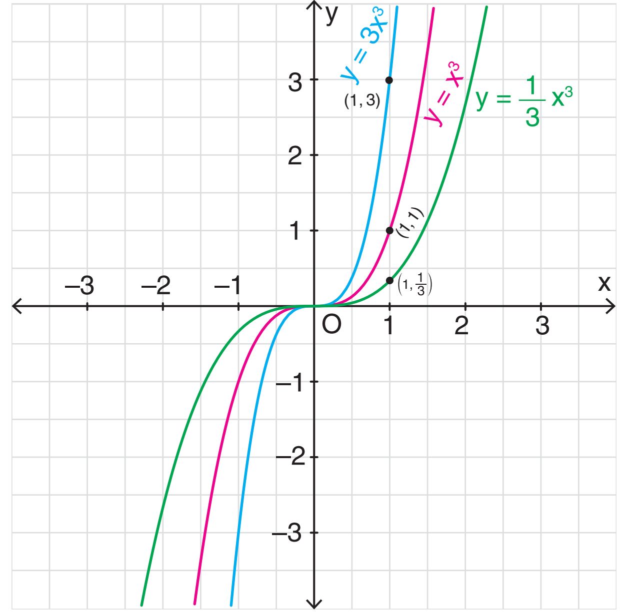
Yandaki grafik, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $y = \frac{1}{3}f(x)$ ve $y = 3.f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

$y = f(x) = x^3$ fonksiyonu üzerinde (1, 1) noktasını alalım. Bu nokta; $y = \frac{1}{3}f(x)$ ile $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ noktasına, $y = 3.f(x)$ ile (1, 3) noktasına dönüşür. Yani grafiklerde dikey daralma ve genişleme olur.

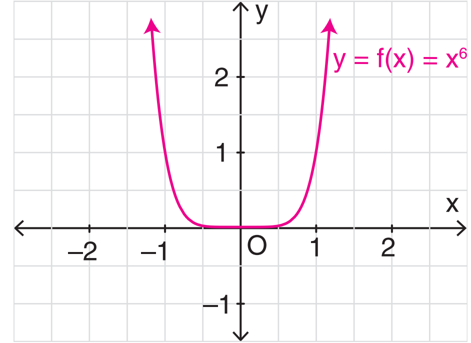
$y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = \frac{1}{3}f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde $0 < k = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan kollar y ekseninden uzaklaşır. Yani dikey genişleme vardır. $y = 3.f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde $k = 3 > 1$ olduğundan kollar y eksenine yaklaşır. Yani dikey daralma vardır.



Grafikte görüldüğü gibi k değeri büyüdükçe kollar y eksenine yaklaşmaktadır. y eksenine en uzak grafik, $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3$ ve en yakın grafik, $y = f(x) = 3x^3$ olur.

Uygulayalım:

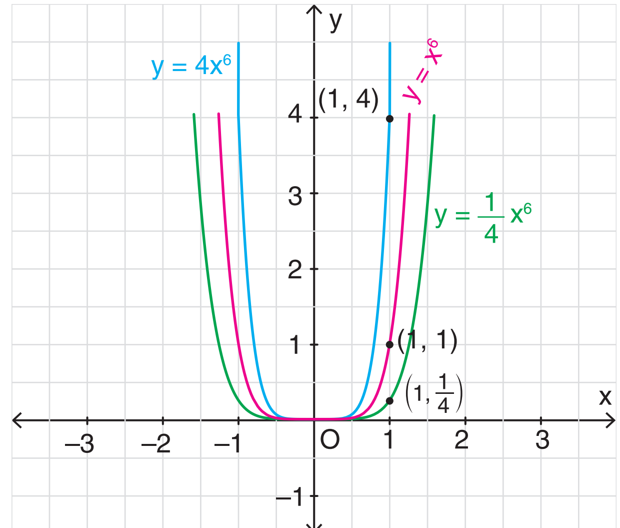
Yanda $y = f(x) = x^6$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = 4.f(x)$ ve $y = \frac{1}{4}\cdot f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

$y = f(x) = x^6$ fonksiyonunun grafiği üzerinde (1,1) noktasını alalım. Bu nokta; $y = \frac{1}{4}f(x)$ fonksiyonu ile $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ noktasına, $y = 4.f(x)$ fonksiyonu ile (1, 4) noktasına dönüşür.

$y = f(x) = x^6$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = \frac{1}{4}f(x) = \frac{1}{4}x^6$ fonksiyonunun grafiğinde $0 < k < 1$ olduğundan kollar y ekseninden uzaklaşır. $y = 4.f(x) = 4.x^6$ fonksiyonunun grafiğinde $k > 1$ olduğundan kollar y eksenine yaklaşır. Buna göre istenen fonksiyon grafikleri yandaki gibi olur.



Düşünelim:

$y = f(x) = x^4$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $y = 2.f(x + 1) - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

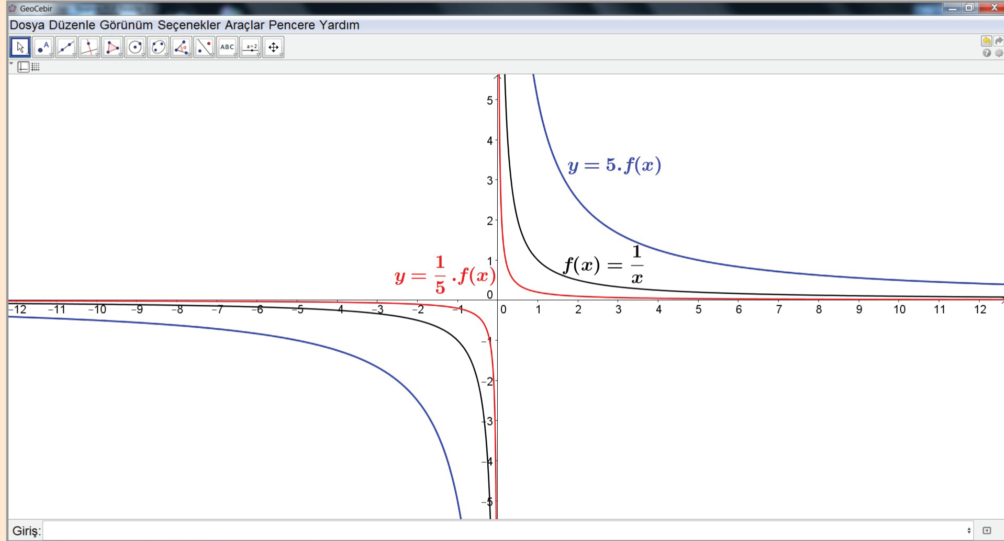
Öğrenelim:

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^-)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = k.f(x)$ $(k \in \mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun grafiğinin çiziminin nasıl yapılması gerektiğini dinamik bir matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımını kullanarak açıklayalım.

$y = f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için $y = \frac{1}{5} \cdot f(x) = \frac{1}{5x}$ ve $y = 5.f(x) = \frac{5}{x}$ olur.

Yazılımda en alttaki "Giriş" satırına ayrı ayrı Giriş: f(x)=1/x , Giriş: 1/5 f(x) ve Giriş: 5 f(x) yazıp her birinden sonra "Enter" tuşuna bastığımızda grafikleri çizmiş oluruz.

$y = f(x)$, $y = \frac{1}{5} \cdot f(x)$ ve $y = 5.f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.

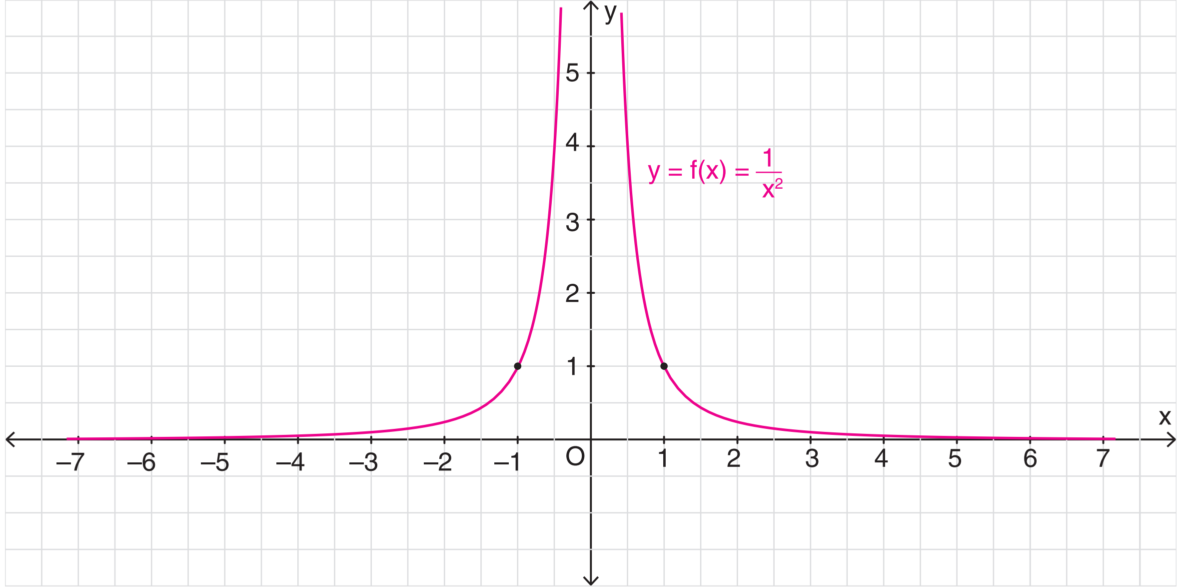


Fonksiyon grafiklerinde görüldüğü gibi $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = \frac{1}{5}f(x)$ fonksiyonunun grafiği x ve y eksenlerine yakınlaşmakta, $y = 5.f(x)$ fonksiyonunun grafiği ise x ve y eksenlerinden uzaklaşmaktadır.

Çünkü $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu üzerinde (1, 1) noktasını aldığımızda $y = \frac{1}{5}f(x)$ fonksiyonu bu noktayı $\left(1, \frac{1}{5}\right)$ noktasına, $y = 5.f(x)$ fonksiyonu ise aynı noktayı (1, 5) noktasına dönüştürür.

Genel olarak $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^-)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = k.f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilirken $k > 1$ ise grafik x ve y eksenlerinden uzaklaşmakta, $0 < k < 1$ ise grafik x ve y eksenlerine yakınlaşmaktadır.

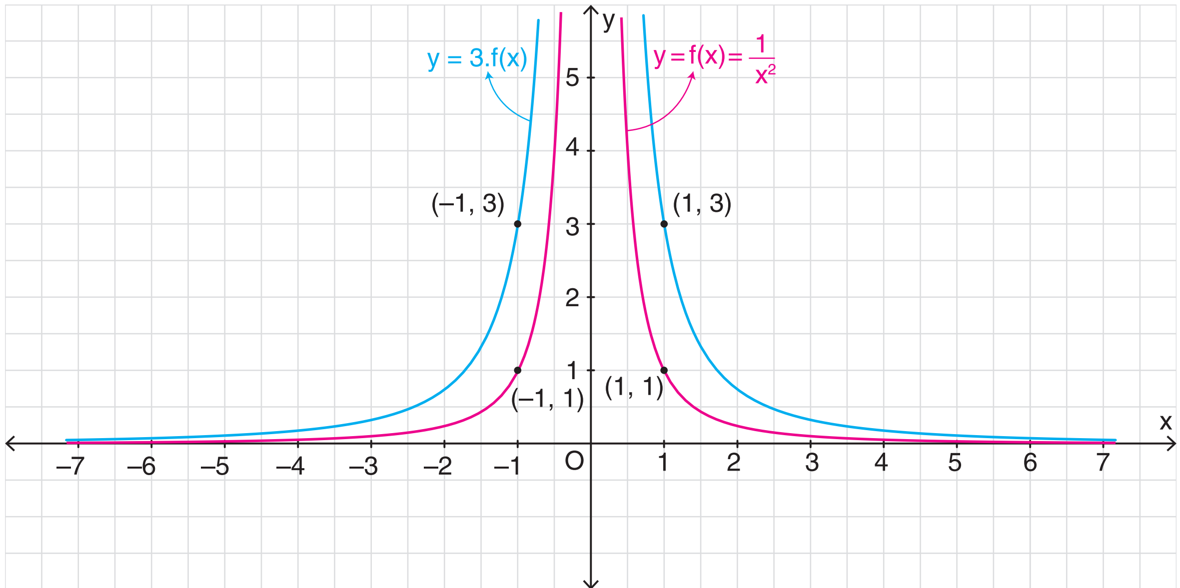
Uygulayalım:



Yukarıda $y = f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = 3.f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

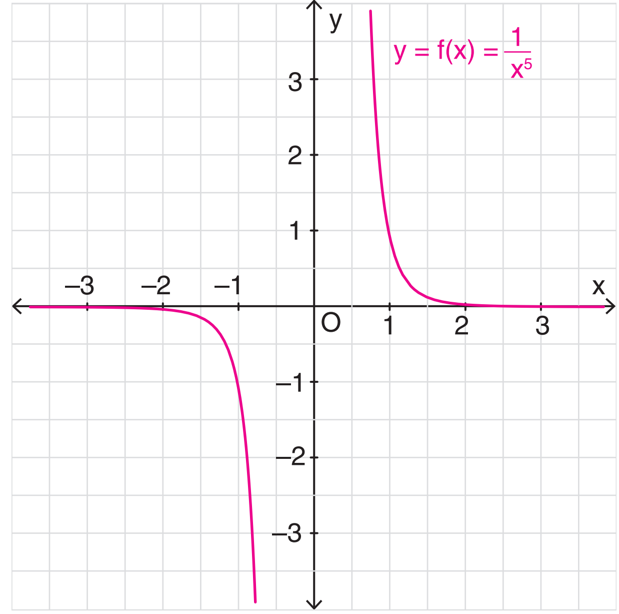
Çözelim:

$y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu üzerinde (1, 1) noktasını seçelim. Bu nokta, $y = 3.f(x)$ fonksiyonu ile (1, 3) noktasına dönüşür. $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu üzerinde olan (–1, 1) noktası da (–1, 3) noktasına dönüşür. Buna göre istenen $y = 3.f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğine göre x ve y eksenlerinden daha uzaktır.



Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

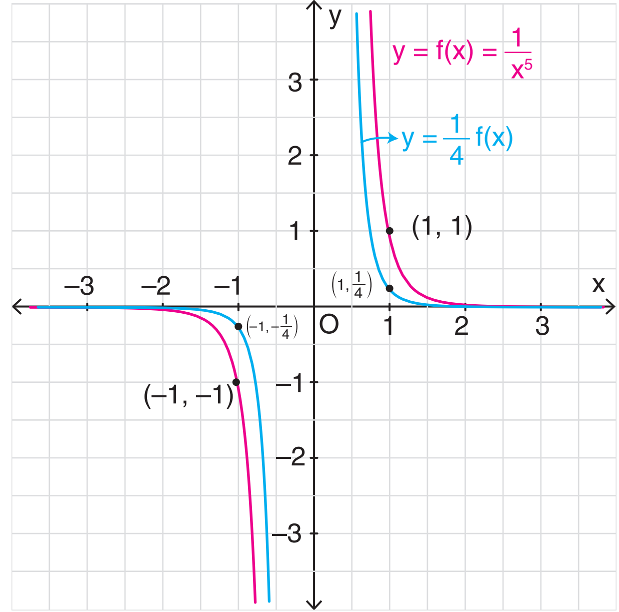


Çözelim:

$y = f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonu üzerindeki (1, 1) noktası; $y = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ fonksiyonu ile $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ noktasına, (–1, –1) noktası da $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ noktasına dönüşür.

$y = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonunun grafiğine göre x ve y eksenlerine daha yakındır.

Yanda her iki grafik de görülmektedir.



Dikkat Edelim!

f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ ye tanımlanan $y = f(x) = x^n$ fonksiyonunda $n \in \mathbb{Z}^+$ verildiğinde $y = k.f(x)$ $(k > 0)$ fonksiyonunun çiziminde k büyüdükçe grafiğin kolları, x ve y eksenine yaklaşırken $n \in \mathbb{Z}^-$ verildiğinde $y = k.f(x)$ fonksiyonunun çiziminde k büyüdükçe grafiğin kolları, x ve y ekseninden uzaklaşır.

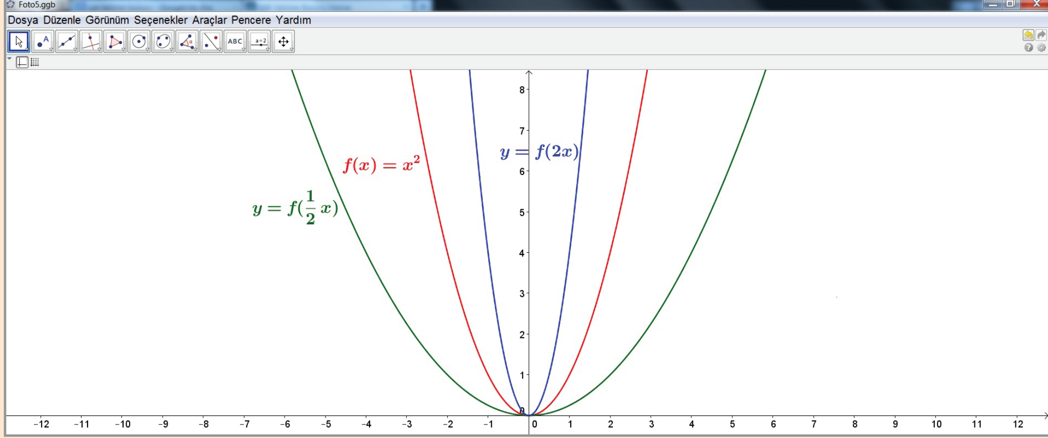
Düşünelim:

$y = f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = k.f(x) + b$ ve $y = k.f(x - a)$ fonksiyonlarının nasıl çizilmesi gerektiğini açıklayınız $(a > 0, b > 0)$.

Öğrenelim:

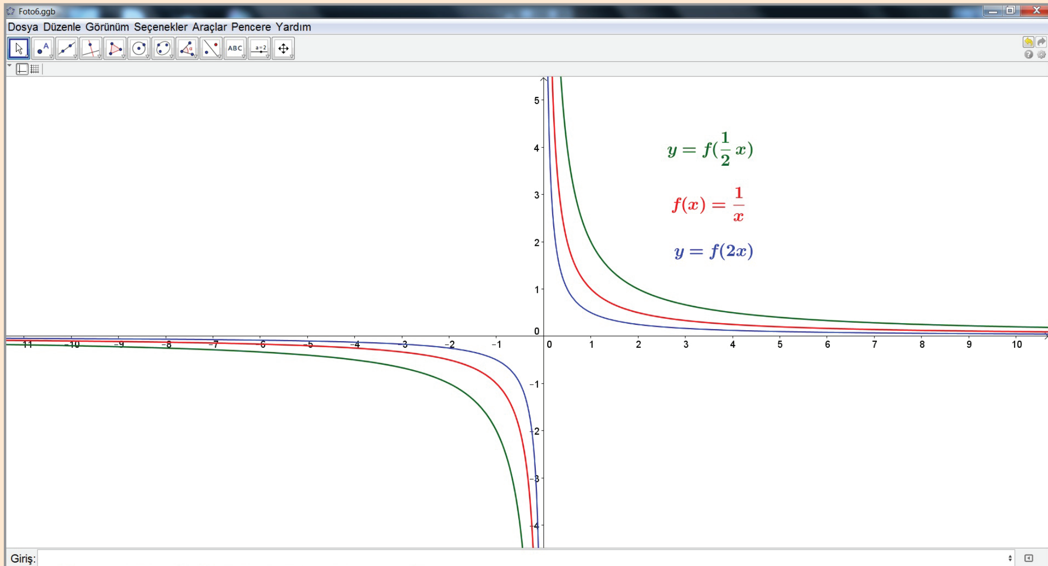
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $y = f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiğini inceleyelim.

Örneğin $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilsin. Buna göre $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{x^2}{4}$ ile $y = f(2x) = 4x^2$ fonksiyonlarının grafiklerinin çizimi, dinamik bir matematik yazılımında aşağıdaki gibidir.



Grafiklerde görüldüğü gibi kolları y eksenine en uzak olan yani açıklığı en fazla olan, $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ fonksiyonunun grafiği; kolları y eksenine en yakın olan yani açıklığı en az olan, $y = f(2x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

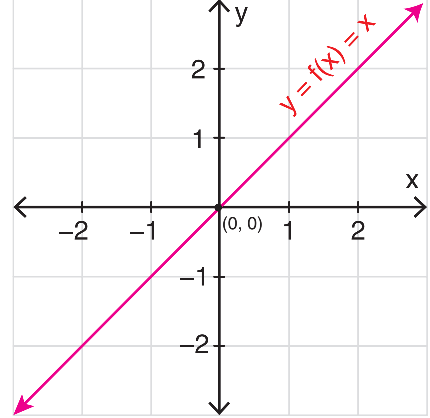
Şimdi de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinden faydalanarak $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2}{x}$ ve $y = f(2x) = \frac{1}{2x}$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Grafikler aşağıdaki gibidir.



Grafiklerde de görüldüğü gibi $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğine göre x ve y eksenlerine daha uzak; $y = f(2x)$ fonksiyonunun grafiği ise $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre x ve y eksenlerine daha yakındır.

Uygulayalım:

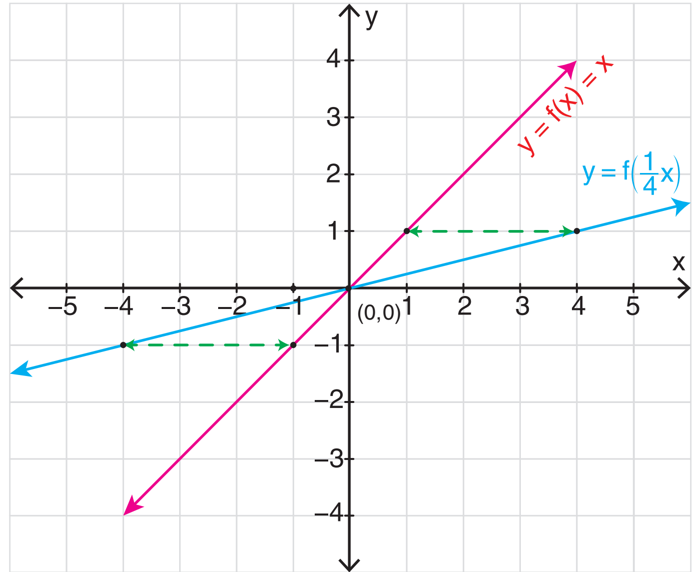
Yandaki grafik, $y = f(x) = x$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ve $y = f(4x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözelim:

$y = f(x) = x$ ise $y = f\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{x}{4}$ olur.

$y = f(x)$ ile $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir. $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$ in grafiği, $y = f(x)$ in grafiğine göre yatayda genişleyip x eksenine yakınlaşmıştır.

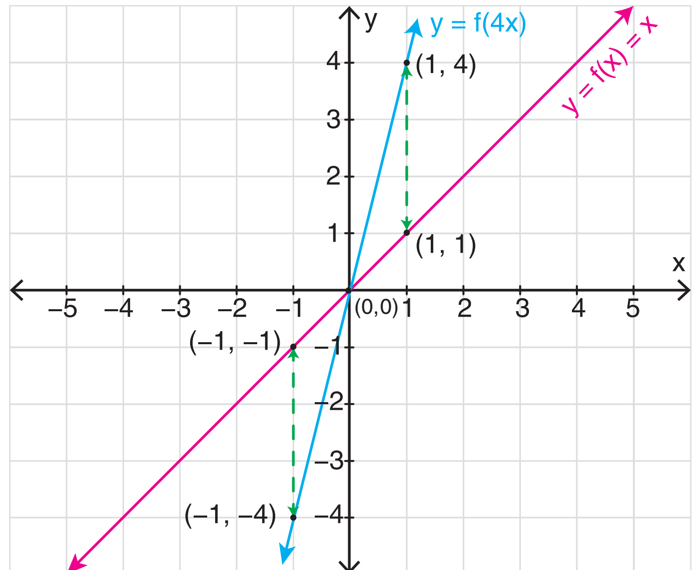


$y = f(x) = x$ için

$y = f(4x) = 4x$ olur.

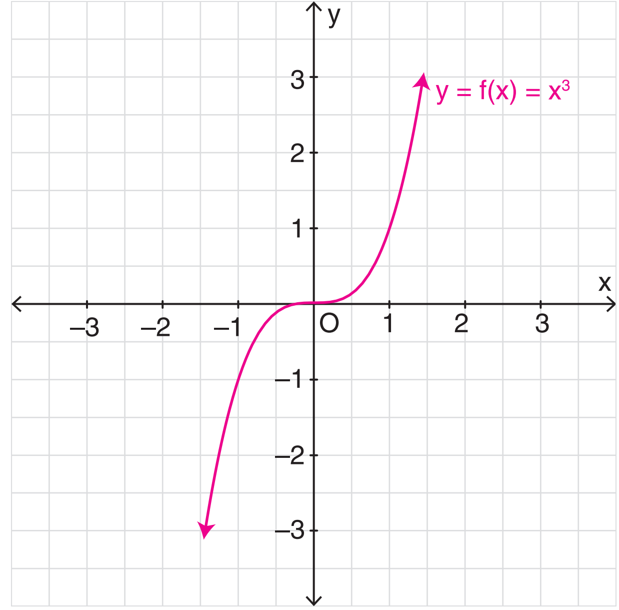
$y = f(x)$ ile $y = f(4x)$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir.

$y = f(4x)$ in grafiği, $y = f(x)$ in grafiğine göre yatayda daralıp y eksenine yakınlaşmıştır.



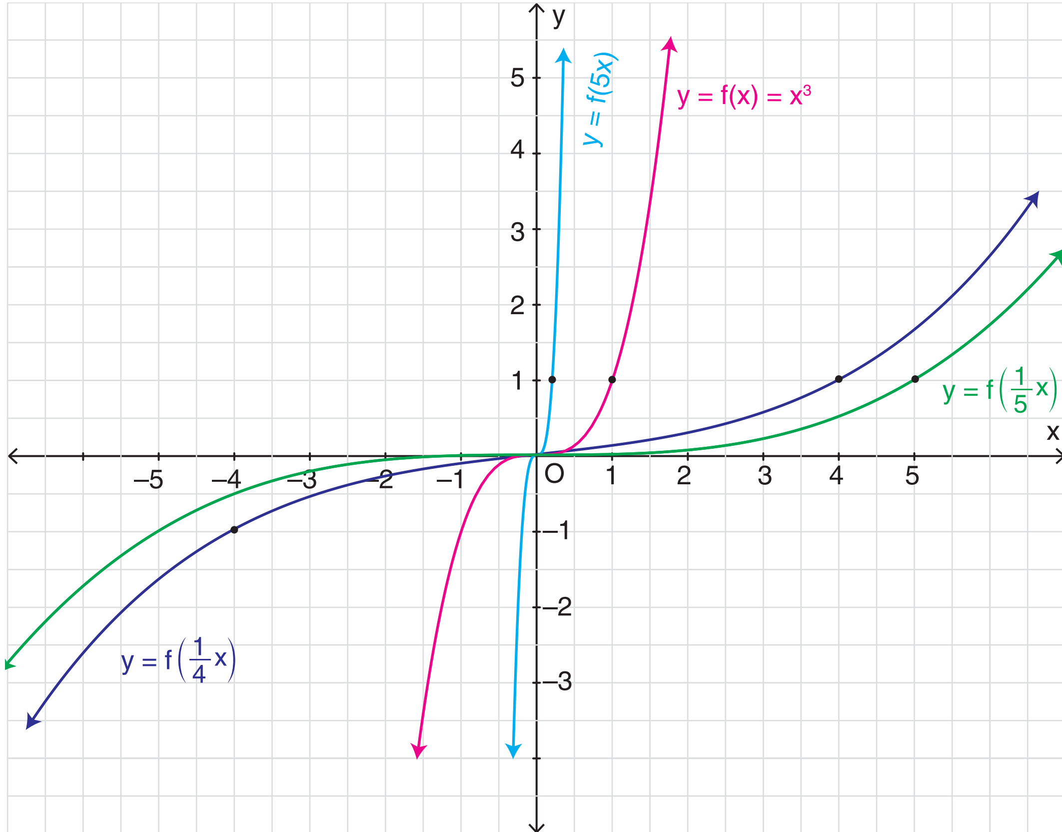
Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$, $y = f\left(\frac{1}{5}x\right)$ ve $y = f(5x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



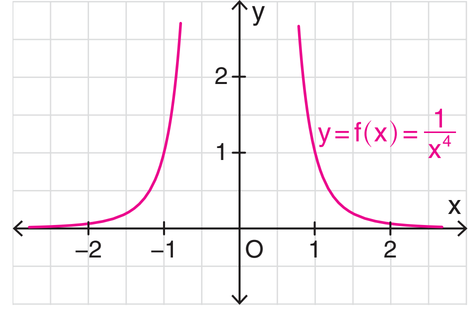
Çözelim:

$y = f(x) = x^3$ için; $y = f\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{x^3}{64}$, $y = f\left(\frac{1}{5}x\right) = \frac{x^3}{125}$ ve $y = f(5x) = 125x^3$ olur. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir.



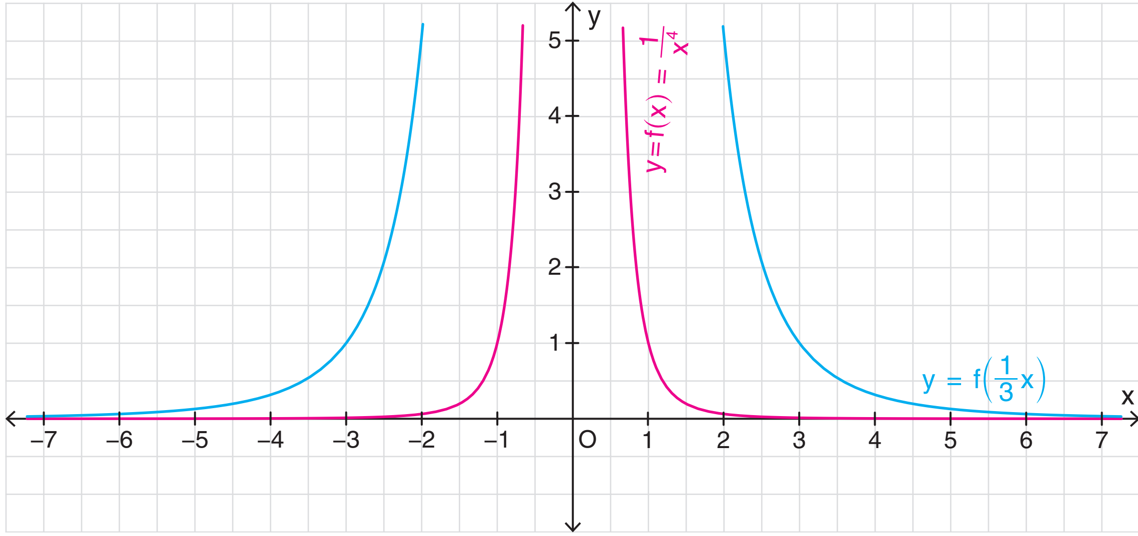
Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = \frac{1}{x^4}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



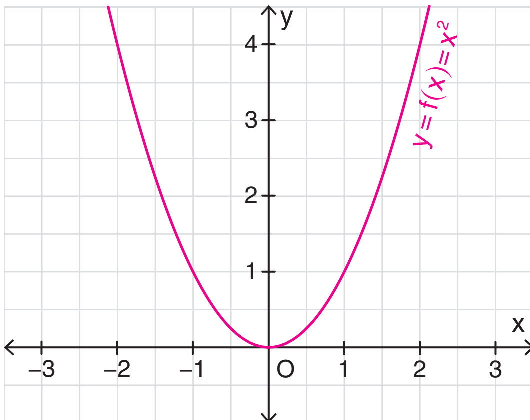
Çözelim:

$y = f\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^4} = \frac{81}{x^4}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. Grafik incelendiğinde kolların y ekseninden uzaklaştığı görülür.



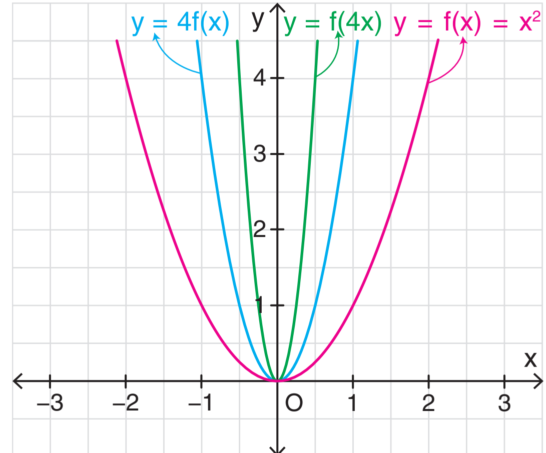
Uygulayalım:

Aşağıdaki grafik $y = f(x) = x^2$ fonksiyonuna ait olduğuna göre $y = 4.f(x)$ ile $y = f(4x)$ fonksiyonlarının grafiğini çizelim.



Çözelim:

$y = f(x) = x^2$ için $y = 4f(x) = 4x^2$ ve $y = f(4x) = 16x^2$ olur. Fonksiyonların tümünün grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Keşfedelim:

Aşağıda bazı fonksiyonlar verilmiştir. Grafikleri inceleyip soruları yanıtlayınız.

$f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$ $\quad$ $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 2x$

$h(x) = 2x^3 + 2x^2$ $\quad$ $k(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

$m(x) = 8$ $\quad$ $n(x) = 7x^5 - 4x^3$

$t(x) = 2x^5 - 3x$ $\quad$ $p(x) = 6x^2 + 3$

$b(x) = x^2 - 4x$ $\quad$ $c(x) = x^3 - x + 1$

$d(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ $\quad$ $r(x) = 2x^3 - 5x$

1. Her bir fonksiyon için $-f(x)$, $-f(-x)$, $g(-x)$, $-g(-x)$, ... fonksiyonlarını oluşturunuz.
2. Her bir fonksiyon için $f(x)$, $f(-x)$ ve $-f(-x)$ kurallarını karşılaştırınız.

▶ Buna göre verilen fonksiyonları gruplandırmak istersek neye göre gruplandırabiliriz? Tartışınız.

Öğrenelim:

Günlük yaşantıda bazı nesneleri gruplandırırız. Örneğin hayvanları karada, denizde, hem karada hem denizde yaşayanlar olarak gruplandırırız. Kitapları roman, ders kitabı, test kitabı gibi ayırırız. Bu, bize o grubu daha iyi tanıma olanağı verir. Matematikte de bazı gruplandırmalar yaparız. Örneğin tam sayıları tek ve çift diye ayırırız. Çokgenleri üçgen, dörtgen ve beşgen gibi gruplandırırız. Her grubun kendi içinde ortak özelliklerine göre ayrılması, bize gruptaki üyeleri daha iyi tanıma ve gruplar arası farklılıkların neler olduğunu belirleme olanağı sağlar. Fonksiyonları da bazı özelliklerine göre gruplandırabiliriz.

Örneğin $f(x) = x^3 - 5x$ fonksiyonunu ele alalım. $f(-x)$ i bulalım.

$$f(x) = x^3 - 5x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 5.(-x)$$

$$f(-x) = -x^3 + 5x$$

$$-f(x) = -x^3 + 5x$$

$f(-x) = -f(x)$ bulunur.

Şimdi de $g(x) = x^6 + 3x^4 - 1$ fonksiyonunu alıp $g(-x)$ i bulalım.

$$g(x) = x^6 + 3x^4 - 1 \Rightarrow g(-x) = (-x)^6 + 3.(-x)^4 - 1$$

$g(-x) = x^6 + 3x^4 - 1$ ise $g(-x) = g(x)$ bulunur.

Son olarak $h(x) = 2x^3 + x^2 - x$ fonksiyonunu alıp $h(-x)$ i bulalım.

$$h(x) = 2x^3 + x^2 - x \Rightarrow h(-x) = 2.(-x)^3 + (-x)^2 - (-x)$$

$h(-x) = -2x^3 + x^2 + x$ olur.

Buradan $h(-x) \neq h(x)$ ve $h(-x) \neq -h(x)$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $f(x)$, $f(-x)$ ve $-f(x)$ fonksiyonları arasındaki ilişkiye göre fonksiyonları gruplandırabiliriz. Matematiksel olarak $a, b \in \mathbb{R}$ için

$f : [-a, a] \rightarrow [-b, b]$, $x \rightarrow f(x)$ fonksiyonu için

$f(-x) = -f(x)$ ise $f(x)$ **tek fonksiyon,**

$f(-x) = f(x)$ ise $f(x)$ **çift fonksiyon** olarak adlandırılır.

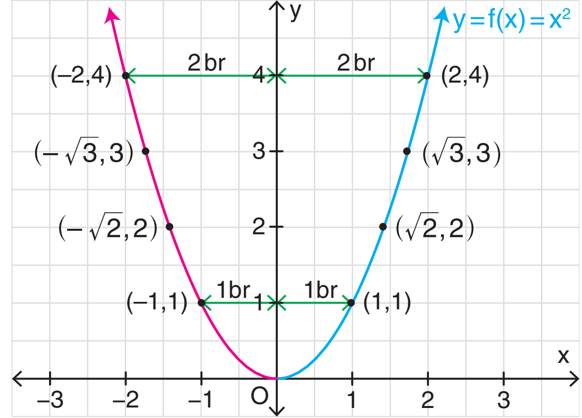
Verilen fonksiyon kapalı bir aralıkta tanımlı ise f nin tek veya çift fonksiyon olabilmesi için bu aralığın uç noktaları, mutlak değerce eşit olmalıdır.

Uygulayalım:

Tek ve çift fonksiyonların grafikleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Bulalım.

Çözelim:

$y = f(x) = x^2$ fonksiyonu için $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ olup $f(-x) = f(x) = x^2$ olduğundan bu fonksiyon, çift bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun yanda çizilen grafiğini inceleyelim.



$(-1,1) \rightarrow (1,1)$

$(-\sqrt{2},2) \rightarrow (\sqrt{2},2)$

$(-\sqrt{3},3) \rightarrow (\sqrt{3},3)$

$(-2,4) \rightarrow (2,4)$

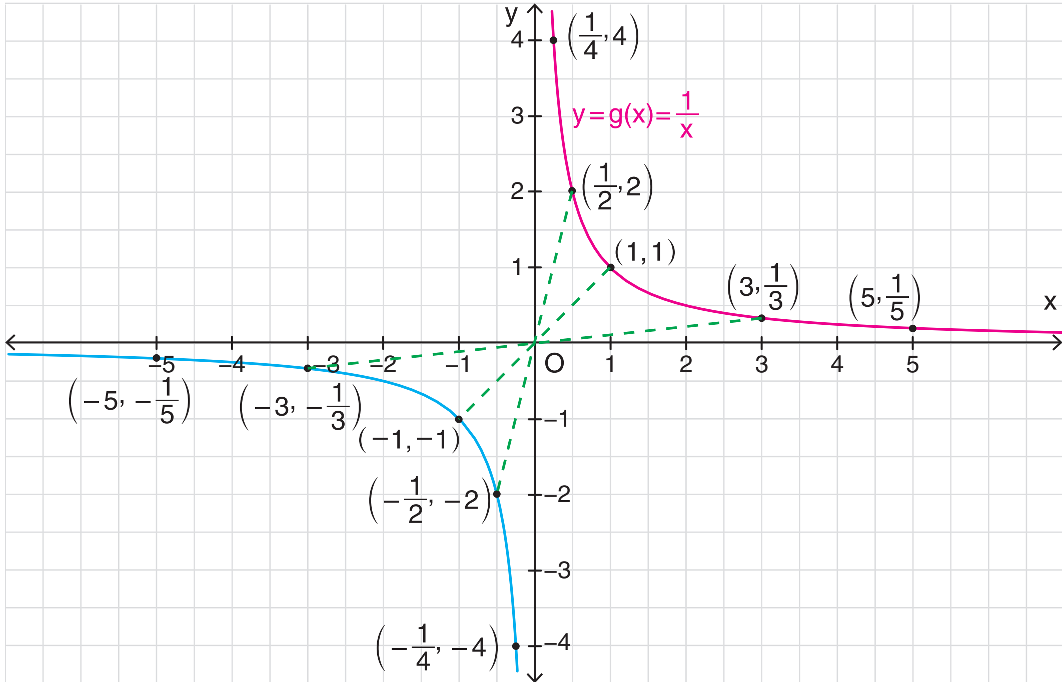
Fonksiyon üzerinde seçtiğimiz noktalar, karşılıklı olarak y eksenine göre simetriktir.

$g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için $g(-x) = -\frac{1}{x}$ olup $g(-x) = -g(x)$ olduğundan $g(x) = \frac{1}{x}$, tek fonksiyondur. Bu fonksiyonun aşağıda çizilen grafiğini inceleyelim.

$(1,1) \rightarrow (-1,-1), \left(\frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -2\right), \left(\frac{1}{4}, 4\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{4}, -4\right),$

$\left(3, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(-3, -\frac{1}{3}\right), \left(5, \frac{1}{5}\right) \rightarrow \left(-5, -\frac{1}{5}\right)$

Fonksiyon üzerinde seçtiğimiz noktalar, karşılıklı olarak orijine göre simetriktir.



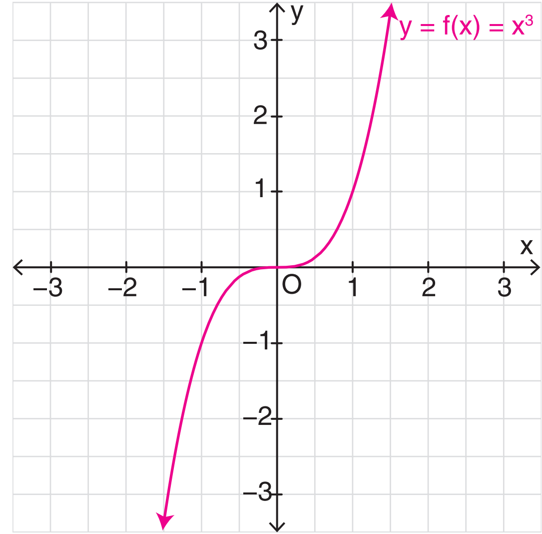
Dikkat Edelim!

1. Çift fonksiyonların grafikleri, y eksenine göre simetriktir. Bir başka deyişle grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyonlar çift fonksiyondur.

2. Tek fonksiyonların grafikleri, orijine göre simetriktir. Bir başka deyişle grafikleri orijine göre simetrik olan fonksiyonlar tek fonksiyondur.

Uygulayalım:

Yandaki grafik, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonuna aittir. Grafikten yararlanarak fonksiyonun tek mi çift mi olduğuna karar verelim.



Çözelim:

Fonksiyonun 1. bölgesinde yer alan grafiğinin üzerinde bazı noktaları $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), (1, 1)$ ve $\left(\frac{5}{4}, \frac{125}{64}\right)$ olarak seçelim. Bu noktaların orijine göre simetriği olan noktaları bulalım.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \to \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

$(1, 1) \to (-1, -1)$

$\left(\frac{5}{4}, \frac{125}{64}\right) \to \left(-\frac{5}{4}, -\frac{125}{64}\right)$

Seçtiğimiz noktaların orijine göre simetriği olan noktaların verilen fonksiyonu sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$, $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 = -1$, $x = -\frac{5}{4} \Rightarrow y = \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{125}{64}$

Bulduğumuz tüm noktalar, fonksiyonu sağlamaktadır. $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ olacağından verilen grafik orijine göre simetriktir. Yani $y = f(x) = x^3$, tek fonksiyondur.

Uygulayalım:

Aşağıdaki fonksiyonların tek ya da çift fonksiyon olup olmadığına karar verelim.

a. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$ **b.** $g(x) = -x^5 + 3x^3 + x$ **c.** $h(x) = x^8 - 3x^4 - x^2$

Çözelim:

a. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x \Rightarrow f(-x) = 2.(-x)^4 - 3(-x)^3 + (-x) \Rightarrow f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - x$ olur.

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x \Rightarrow -f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x$ olur.

Buradan $f(-x) \neq -f(x)$ ve $f(-x) \neq f(x)$ olduğundan f(x), ne tek ne de çift fonksiyondur.

b. $g(x) = -x^5 + 3x^3 + x \Rightarrow g(-x) = -(-x)^5 + 3(-x)^3 + (-x)$

$g(-x) = x^5 - 3x^3 - x$

$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x \Rightarrow -g(x) = x^5 - 3x^3 - x$

$g(-x) = -g(x)$ olur.

Görüldüğü gibi $g(-x) = -g(x)$ tir. O hâlde g(x) fonksiyonu tek fonksiyondur.

c. $h(x) = x^8 - 3x^4 - x^2 \Rightarrow h(-x) = (-x)^8 - 3(-x)^4 - (-x)^2$

$h(-x) = x^8 - 3x^4 - x^2$ olur.

Buradan $h(-x) = h(x)$ bulunur. O hâlde h(x), çift fonksiyondur.

Dikkat Edelim!

Bir fonksiyon, tek ya da çift olmak zorunda değildir.

Öğrenelim:

y = f(x) fonksiyonunun grafiği verildiğinde y = –f(x) fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiğini inceleyelim. Örneğin $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunu seçelim. Bu fonksiyonun grafiği verildiğinde $y = -f(x) = -\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği nasıl çizilir? Bulalım.

Öncelikle $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bazı noktalar alıp bu noktaların y = –f(x) fonksiyonu ile nasıl bir ilişkisinin olduğuna karar verelim.

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 1 \quad , \quad y = -f(1) = -1 \qquad (-1, 1) \rightarrow (-1, -1)$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \quad , \quad y = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \qquad \left(-\frac{1}{2}, 4\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$

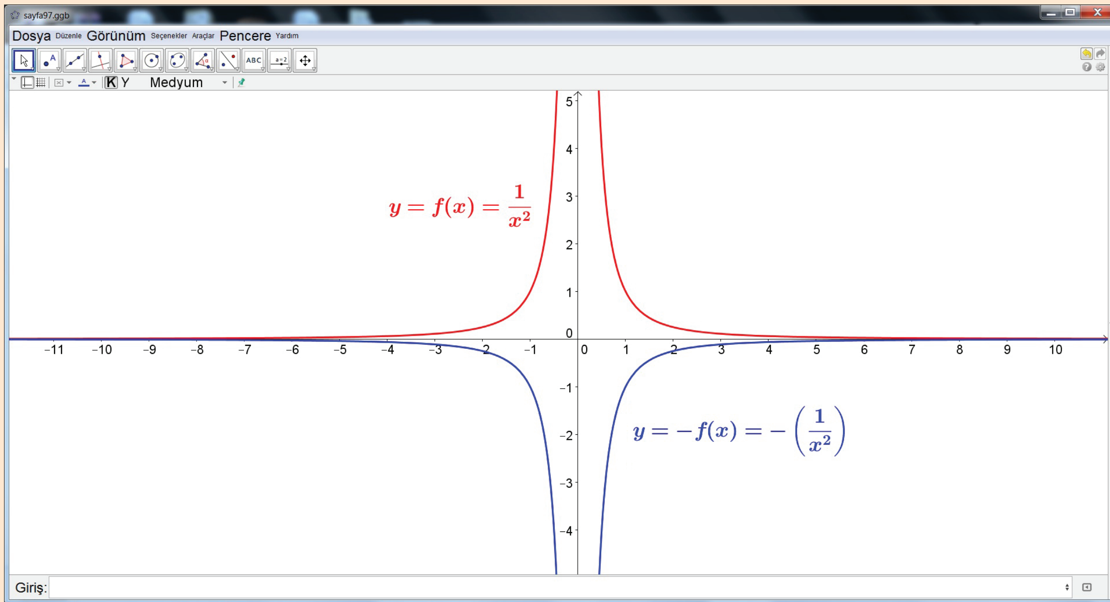
$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \quad , \quad y = -f(0) = 0 \qquad (0, 0) \rightarrow (0, 0)$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \quad , \quad y = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \qquad \left(\frac{1}{2}, 4\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1 \quad , \quad y = -f(1) = -1 \qquad (1, 1) \rightarrow (1, -1)$ noktalarına dönüşür.

Yani elde edilen noktalar, seçtiğimiz noktaların x eksenine göre simetriği olan noktalardır. Tüm noktalar için bu sonucu elde edeceğimizden $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu verildiğinde y = –f(x) fonksiyonun grafiğini çizmek için y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğini almamız yeterlidir.

Aşağıda $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ ve $y = -f(x) = -\frac{1}{x^2}$ fonksiyonlarının grafikleri, GeoGebra yazılımında çizilmiştir. Siz de önceki fonksiyon grafiklerinin çizimlerinde olduğu gibi yazılımda "Giriş" satırına ayrı ayrı `Giriş: f(x)=1/x^2` ve `Giriş: -f(x)` girerek her birinden sonra "Enter" tuşuna basarak grafikleri çizdirebilirsiniz.



Genel olarak y = f(x) fonksiyonunun grafiği biliniyorken y = –f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmek istenirse y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğini almak gerekir.

Öğrenelim:

y = f(x) fonksiyonunun grafiği verildiğinde y = f(–x) fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilmesi gerektiğini açıklayalım. Örnek olarak $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunu seçelim. Bu fonksiyonun grafiği verildiğinde y = f(–x) fonksiyonunun grafiğinin çizimini inceleyelim.

Öncelikle bu fonksiyonun grafiği üzerinde bazı noktalar alıp bu noktaların y = f(–x) fonksiyonu ile nasıl bir ilişkisi olduğuna karar verelim.

$y = 8 \Rightarrow f(x) = x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad f(-x) = -x^3 = 8 \Rightarrow x = -2$

$y = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad , \quad f(-x) = -x^3 = 1 \Rightarrow x = -1$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad f(-x) = -x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = -1 \Rightarrow f(x) = x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \quad , \quad f(-x) = -x^3 = -1 \Rightarrow x = 1$

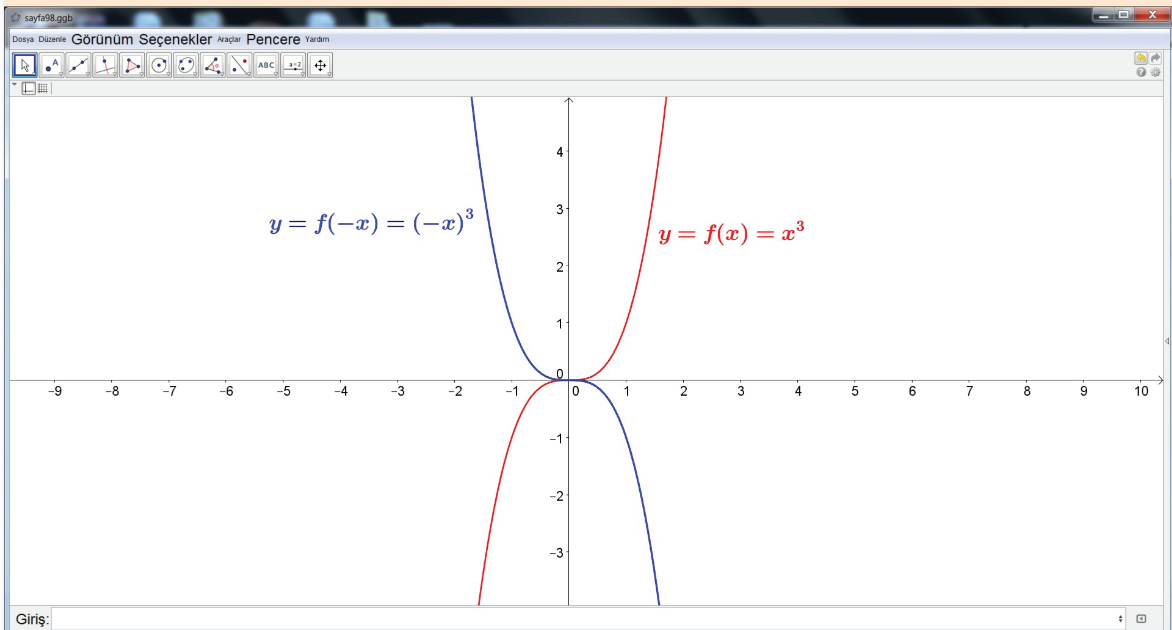
$y = -8 \Rightarrow f(x) = x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \quad , \quad f(-x) = -x^3 = -8 \Rightarrow x = 2$ olur.

O hâlde

(2,8) → (–2,8), (1,1) → (–1,1), (0,0) → (0,0), (–1,–1) → (1,–1) → (–2,–8) ve (2,–8) noktalarına dönüşür.

Yani elde edilen noktalar, seçtiğimiz noktaların y eksenine göre simetriği olan noktalardır. $y = f(x) = x^3$ üzerindeki her (a,b) noktası, y = f(–x) fonksiyonunun grafiğinde (–a,b) noktasına dönüşür. Bu durumda $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği, y = f(–x) fonksiyonunun grafiğidir.

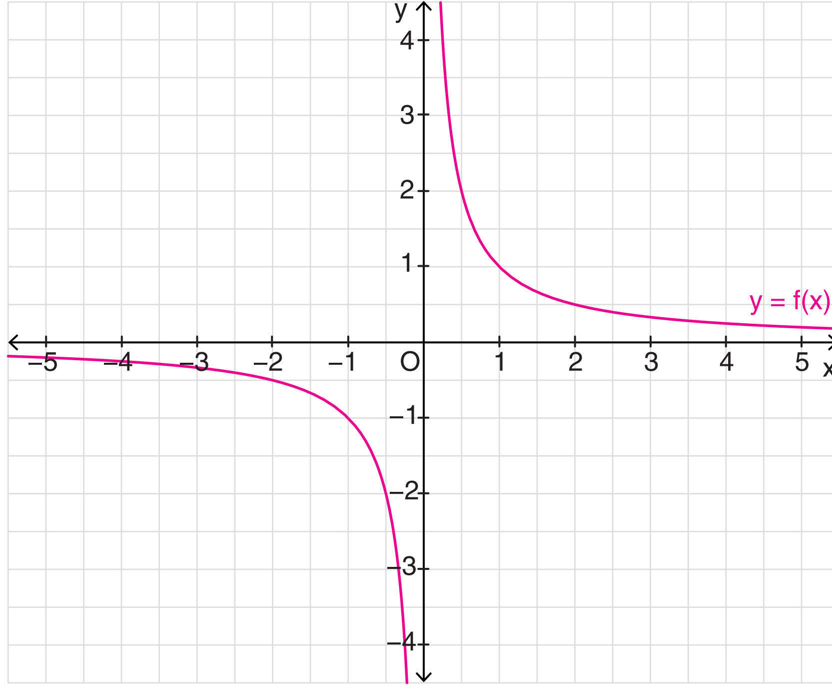
Aşağıda $y = f(x) = x^3$ ve $y = f(-x) = -x^3$ fonksiyonlarının grafikleri dinamik bir matematik yazılımı olan GeoGebra yazılımında çizilmiştir. İnceleyiniz. Siz de önceki grafik çizimleri gibi fonksiyon grafiklerini GeoGebra yazılımında çizdirebilirsiniz.



Genel olarak y = f(–x) fonksiyonunun grafiğini çizerken verilen y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğini almamız yeterlidir.

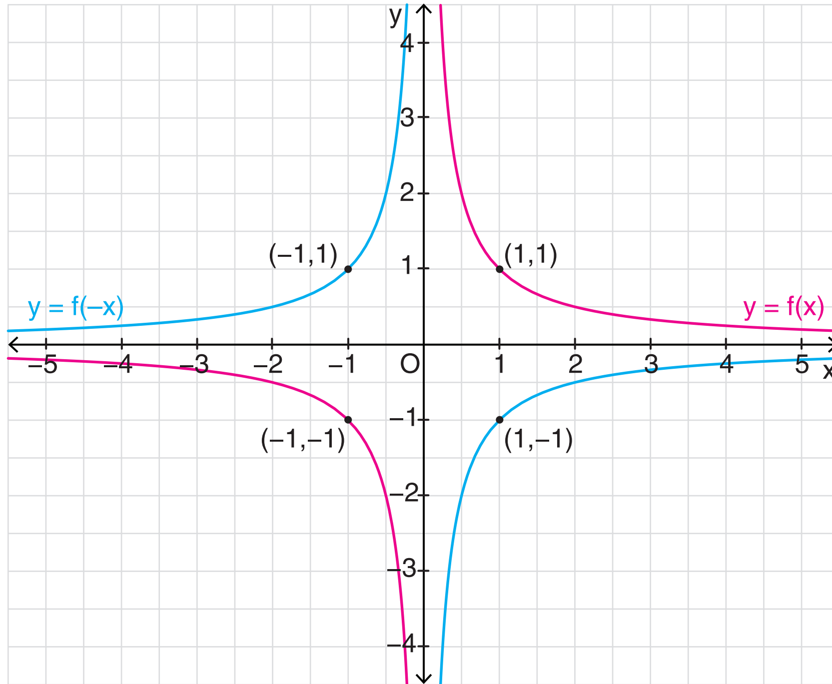
Uygulayalım:

Aşağıdaki grafik, $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Çözelim:

$y = f(-x) = -\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği, verilen $y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğidir. İstenen grafik, aşağıdaki gibidir.



Dikkat Edelim!

1. Grafiği verilen bir fonksiyon çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$ olduğundan $y = f(x)$ ile $y = f(-x)$ fonksiyonlarının grafikleri aynıdır.

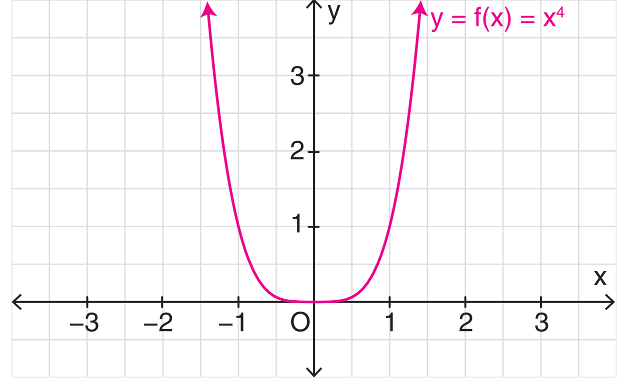
2. Grafiği verilen bir fonksiyon tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ olduğundan $y = f(-x)$ ile $y = -f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aynıdır.

Uygulayalım:

Yanda $y = f(x) = x^4$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

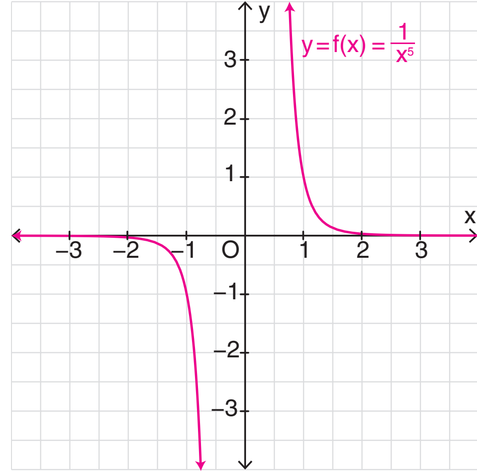
Çözelim:

$y = f(x) = x^4$ fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ olduğundan $y = f(x)$ çift bir fonksiyondur. İstenen $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği de yanda verilen $y = f(x) = x^4$ fonksiyonunun grafiği ile aynıdır.



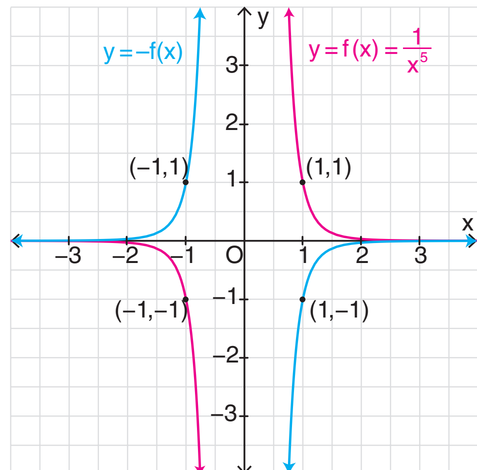
Uygulayalım:

Yandaki grafik $y = f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonuna ait olduğuna göre $y = -f(x)$ ve $y = f(-x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



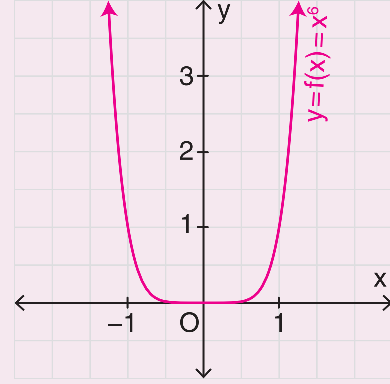
Çözelim:

Grafiği verilen $y = f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonu için $f(-x) = -f(x) = -\frac{1}{x^5}$ olduğundan fonksiyon, tek bir fonksiyondur. O hâlde istenen $y = -f(x)$ ve $y = f(-x)$ fonksiyonlarının grafikleri aynıdır. Bunun için herhangi birinin grafiğini çizmemiz yeterlidir. $y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = \frac{1}{x^5}$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği olduğundan yandaki gibi çizilir.



Pekiştirelim:

1. $y = f(x) = x^6$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Bu grafiği kullanarak aşağıdaki fonksiyonların kurallarını oluşturup grafiklerini çiziniz.



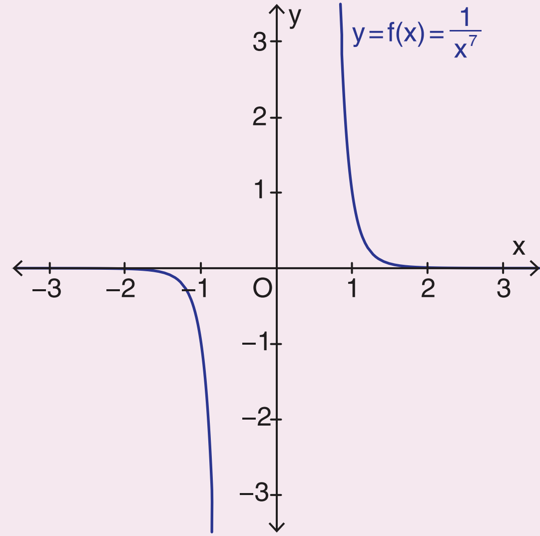
a. $y = f(x) + 3$ **b.** $y = f(x) - 2$

c. $y = f(x - 3)$ **ç.** $y = f(x + 2)$

d. $y = 2 . f(x)$ **e.** $y = f(3x)$

f. $y = -f(x)$ **g.** $y = -f(-x)$

2. $y = f(x) = \frac{1}{x^7}$ fonksiyonunun grafiği yanda çizilmiştir. Buna göre aşağıdaki fonksiyonların kurallarını oluşturarak grafiklerini çiziniz.



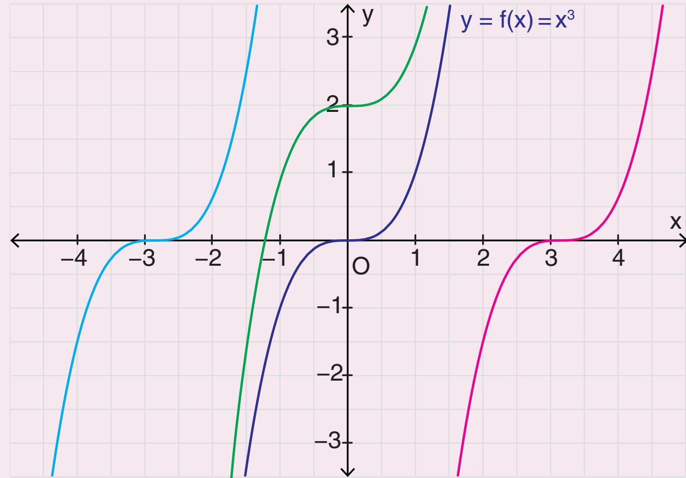
a. $y = f(x) - 1$ **b.** $y = f(x) + 2$

c. $y = f(x + 1)$ **ç.** $y = f(x - 3)$

d. $y = \frac{1}{2} f(x)$ **e.** $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

f. $y = -f(2x)$ **g.** $y = 3f(-x)$

3. Yanda $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre diğer grafiklere ait fonksiyonların denklemlerini yazınız.



4. Aşağıda verilen fonksiyonların çift, tek ya da ne tek ne çift olduğuna karar veriniz.

a. $f_1(x) = 5$ **b.** $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$ **c.** $f_3(x) = 3x - 4$ **ç.** $f_4(x) = x^8 - x^6$

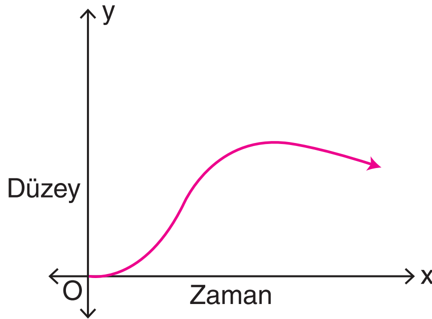
d. $f_5(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$ **e.** $f_6(x) = 4x^4 + x^2 + 3$ **f.** $f_7(x) = -x^7 + 2x^3 + 5x$ **g.** $f_8(x) = x^3 + x^2$

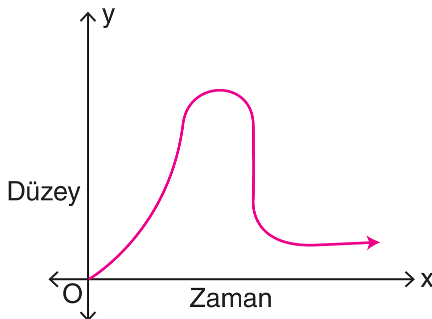
3. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1. Yale Üniversitesinden araştırmacılar, hırs ve sorumluluğun zamanın bir fonksiyonu olduğunu ileri sürmüşlerdir.

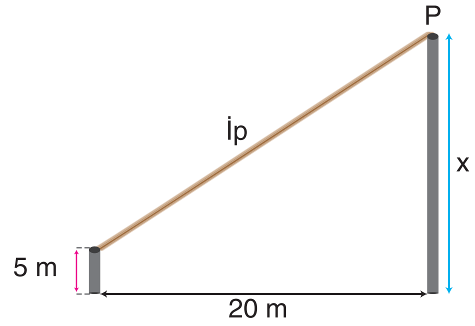
a. Aşağıda verilen grafikleri incelediğinizde hangi grafiğin hırsa, hangi grafiğin sorumluluğa ait olduğunu düşünürsünüz? Neden böyle düşündüğünüzü açıklayınız. Grafiklerin maksimum ve minumum noktaları, sizce neye karşılık gelmektedir? Grafiğin artan ve azalan olduğu durumlar hakkında hırs ve sorumlulukla ilgili yorum yapınız.

b. Siz de sevgi, üzüntü, öfke vb. duygularınız için grafikler çiziniz. Yatay eksen zaman, düşey eksen düzey olsun. Negatif sayıları da kullanabilirsiniz (Blitzer, 2003: 356).





2.

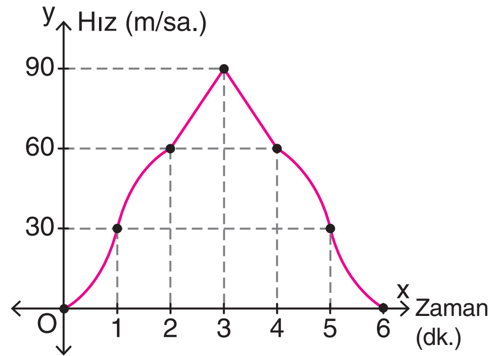


Yukarıdaki şekilde bir ip cambazının gösterisini yapacağı düzenek yer almaktadır. İki boru arası 20 m dir. Ancak ipin uzun boruya bağlanacağı P noktası henüz belirlenmemiştir.

a. İpin uzunluğunu P noktasının yerden uzaklığının bir fonksiyonu olarak yazınız.

b. Cambazın yürüyeceği toplam ip uzunluğu 25 m ise bağlantı noktası olan P nin yerden yüksekliğini (x) bulunuz (Swokowski, 1990: 75).

3.



Yukarıdaki grafik bir aracın zamana bağlı hızını göstermektedir.

a. Aracın hızının arttığı zaman aralığını belirleyiniz.

b. Aracın hızının azaldığı zaman aralığını belirleyiniz.

c. Aracın en hızlı olduğu zamanı belirleyiniz.

ç. Aracın 4 ile 5. dakikalar arası ortalama değişim hızını bulunuz.

4. Aşağıdaki tablo bir deneydeki bakteri sayısının zamana göre değişimini göstermektedir.

Zaman (dk.)	Bakteri sayısı
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15

Verilenlere göre

a. Bakteri sayısını zamana bağlı veren fonksiyonu yazınız.

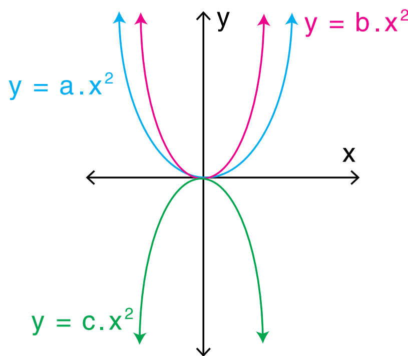
b. Bakteri sayısının 41 olduğu zamanı, yazdığınız fonksiyonun ters fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

c. [2,6] dakikalar arasındaki bakteri sayısındaki ortalama değişim hızını bulunuz

5. $f(x) = x^2 + (a - 1).x + b + 1$ ile $g(x) = (a - 3).x^2 - x + 4$ parabollerinin tepe noktaları aynı ise a kaçtır?

6. $f(x) = (x - 3.a)^2 + a + 1$ parabolünün tepe noktası x ekseninin altında olduğuna göre a nın en büyük tam sayı değeri kaçtır?

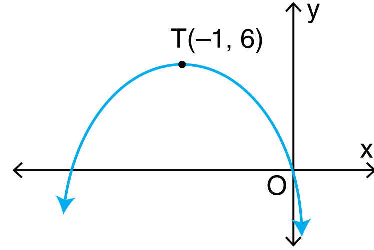
7.



Analitik düzlemde verilen parabollere göre a, b ve c arasındaki sıralamayı bulunuz.

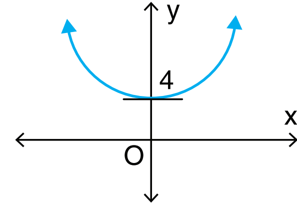
8. $f(x) = x^2 - 6x + m - 2$ fonksiyonu yatay ekseni kesmediğine göre bu fonksiyonun alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

9.



Analitik düzlemde tepe noktası T(– 1, 6) olup orijinden geçen parabolün denklemini bulunuz.

10.

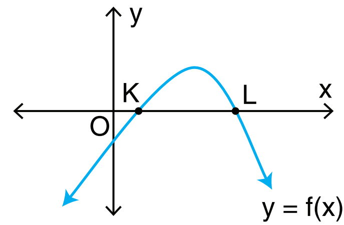


Analitik düzlemde

$f(x) = m.x^2 + (m^2 - 4).x + m - n$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

T(0, 4) parabolün tepe noktası olduğuna göre f(2) nin değeri kaçtır?

11.

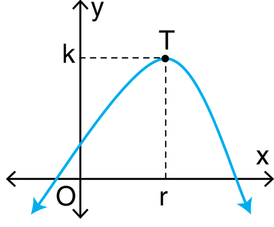


Analitik düzlemde denklemi

$y = -x^2 + 8x - 2m - 4$ olan fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$|OL| = 3.|OK|$ olduğuna göre m kaçtır?

12.



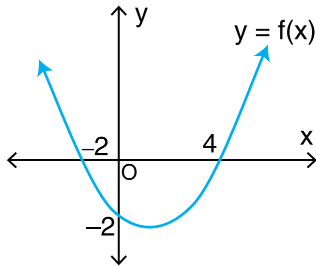
Analitik düzlemde grafik $y = a.x^2 + b.x + c$ fonksiyonunun grafiği olduğuna göre a, b ve c katsayılarının işaretlerini bulunuz.

13. $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$ fonksiyonunun minumum değeri kaçtır?

14. $A = 2m^2 - 4m + 6$ ve $B = -m^2 + 2m - 1$ ise A nın minumum değeri, B nin maksimum değerinden kaç fazladır?

15. Gerçek sayılarda tanımlı $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$ fonksiyonunun simetri eksenini bularak grafiğini çiziniz.

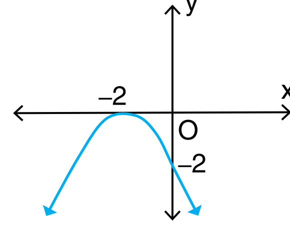
16.



Analitik düzlemde f fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. f(5) değeri kaçtır?

17. $y = f(x) = (x + 3)^2$ ve $y = g(x) = y = x^2 - 9$ parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?

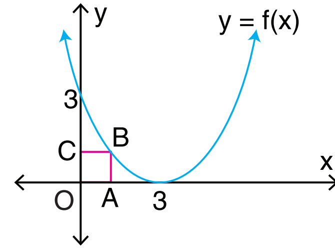
18.



Analitik düzlemde tepe noktası (– 2, 0) olup (0, – 2) noktasından geçen parabolün grafiği verilmiştir.

Buna göre parabolün denklemini bulunuz.

19.



Analitik düzlemde x eksenine (3,0) noktasında teğet olup y eksenini (0,3) noktasında kesen y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. OABC kare ve B parabol üzerinde olduğuna göre A(OABC) kaç br^2 dir?

20. Gerçek sayılarda tanımlı $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini elde ediniz.

a. $f(x + 3)$ **b.** $f(x) - 3$ **c.** $f(x + 1)$

ç. $f(x) - 3$ **d.** $2.f(x)$ **e.** $-\frac{1}{3} \cdot f(x)$

f. $f(-x)$ **g.** $-f(x)$ **h.** $-f(-x)$

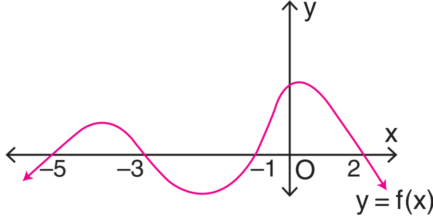
21. $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ tanımlanan $y = h(x) = \frac{1}{x^3}$ fonksiyonunun grafiğini bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak çiziniz. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Çiziminizi bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak kontrol ediniz.

a. $h(x-1)-1$ **b.** $h(x+1)-1$ **c.** $\frac{1}{2} \cdot h(-x)$

ç. $-2.h(x)$ **d.** $-h(-x-1)$ **e.** $h(-2x)$

3. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

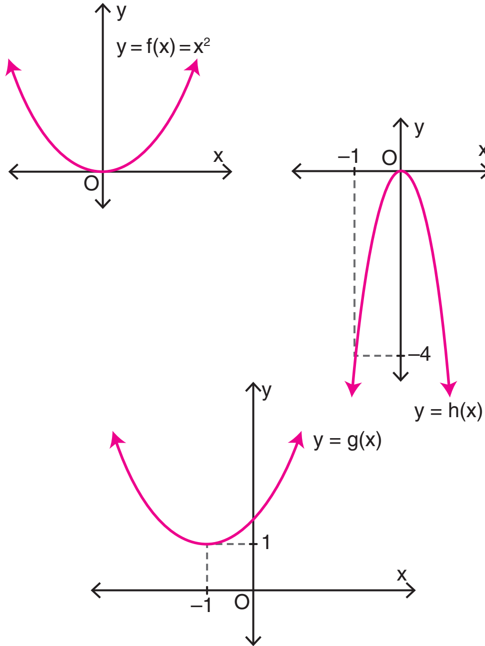
1.



Analitik düzlemde x eksenini yalnız 4 noktada kesen y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f(x) > 0 eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) – 13 B) – 10 C) – 3 D) – 2 E) 2

2.



Analitik düzlemde verilen $y = f(x) = x^2$ grafiğine göre g(x) ve h(x) in eşitleri aşağıdakilerden hangisidir?

	g(x)	h(x)
A)	f(x + 1) + 1	–f(2x)
B)	f(x – 1) + 1	f(–2x)
C)	f(x + 1) – 1	–2.f(x)
D)	f(x + 1) + 1	f(–2x)
E)	f(x) – 1	–2.f(x)

3. $y = f(x) = x^2 - ax - 2x + 4a + 1$

fonksiyonunun grafiği x eksenine pozitif tarafta teğet olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 0 B) 4 C) 9 D) 12 E) 15

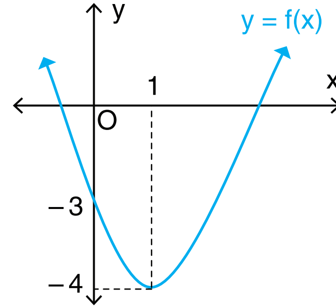
4. $f(x) = x^2 + (a - 6).x + 4b + 1$

$g(x) = -x^2 + (a - 2).x - 3b$

parabolleri x eksenini aynı noktalarda kestiğine göre a + b nin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.



Analitik düzlemde grafiği verilen y = f(x) parabolünün tepe noktasının (1, –4) ve y eksenini (0, –3) kestiği bilinmektedir.

Buna göre parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = (x - 1)^2 - 4$ B) $y = 3.(x - 1)^2 - 4$

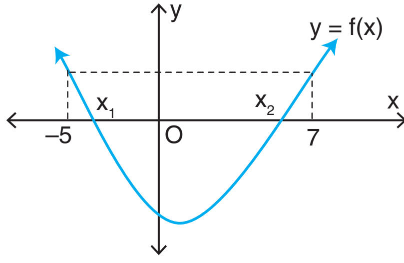
C) $y = 3x^2 + x - 3$ D) $y = 3x^2 + x + 3$

E) $y = x^2 - 4x - 3$

6. a pozitif bir gerçel sayı olmak üzere bir kenarı 2a br ve bu kenara ait yüksekliği (4 – a) br olan bir üçgenin alanı **en çok** kaç br^2 dir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

7.

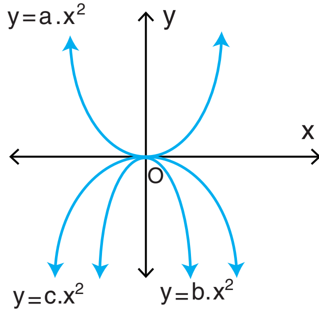


Analitik düzlemde grafiği verilen y = f(x) parabolü, x eksenini $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarında kesmektedir.

Buna göre $x_1 + x_2$ kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

8.



Analitik düzlemde verilen parabollere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) c < a < b B) b < c < a C) a < b < c

D) b < a < c E) c < b < a

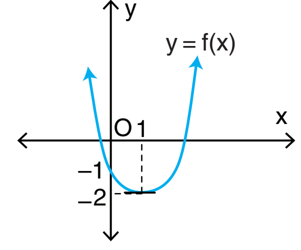
9. $y = f(x) = (5 - m).x^2 + 2.(m - 5).x + 2$ eğrisinin tepe noktasının apsisi ordinatına eşit olduğuna göre m kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) – 2 E) – 6

10. 2x + 3 = 0 doğrusu $y = f(x) = -3x^2 + ax - 5$ parabolünün simetri ekseni olduğuna göre y = f(x) fonksiyonunun **en büyük** değeri kaçtır?

A) $\frac{27}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

11. Analitik düzlemde grafiği verilen y = f(x) parabolünün tepe noktası, (1, –2) olup y eksenini (0, –1) noktasında kesmektedir.



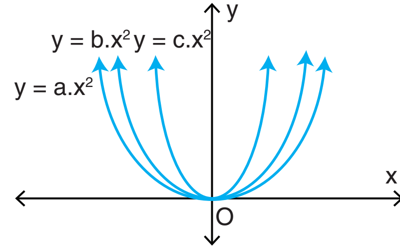
Buna göre parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x^2 + 4x - 1$ B) $y = x^2 - 2x - 2$

C) $y = 2x^2 + 2x - 5$ D) $y = (x - 1)^2 - 1$

E) $y = x^2 - 2x - 1$

12.

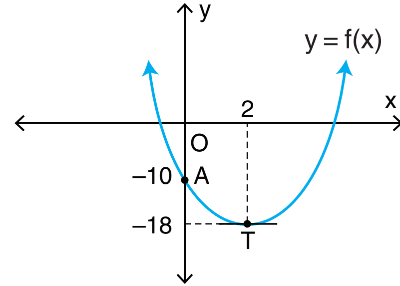


Analitik düzlemde verilen parabollere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) c < a < b B b < c < a C) a < b < c

D) b < a < c E) c < b < a

13.



Tepe noktası T(2, –18) olup y eksenini A(0, –10) noktasında kesen parabolün denklemi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$

B) $f(x) = x^2 - 4x - 10$

C) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

D) $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$

E) $f(x) = 3x^2 - 10x - 10$

4. Alt Öğrenme Alanı: DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

- İki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini belirlemeniz,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulmanız amaçlanmaktadır.

"Matematik bilimlerin sultanıdır."

Carl Friedrich Gauss (Karl Frederik Gaus)

4. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1. Aşağıdaki birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözünüz.

a. $2(x - 1) + 4 = 3 - (2 - 3x)$

b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

c. $3(4x - 2) - 5x = 2(x - 3) - 5$

2. Aşağıdaki birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesini bulunuz.

a. $2x \leqslant 8$

b. $3x - 1 > 11$

c. $3(x - 1) + x - 2 < 7 - 5(2x - 3)$

3. x ve y gerçek sayıları için $-2 \leqslant x < 6$ ve $2x - 5y = 3$ ise y nin alabileceği değerlerin hangi aralıkta değişeceğini bulunuz.

4. Aşağıdaki birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $x + y = 31$
$2x - y = 17$

b. $2x + y = 32$
$-3x + 2y = -6$

5. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin gerçek sayılar kümesinde köklerinin varlığını belirleyip varsa köklerini bulunuz.

a. $-4x^2 - 7x + 2 = 0$

b. $3x^2 - 4x + 5 = 0$

c. $2x^2 - 6x - 1 = 0$

4.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

Dostuluğun verdiği sıcaklık ve güven ölçülemez. Bu bağlamda dostuluklarını yıllardır sürdüren iki arkadaş, yeni bir iş yeri açmak istiyor. Yeni kurulan bir iş yerine iki çeşit ve toplam 48 tane masa satın alınacaktır. Birinci çeşit masanın tanesi 220 TL, diğerinin tanesi ise 250 TL dir. Tüm masalar için 11400 TL ödendiğine göre iki farklı masadan kaçar tane alınmıştır?

Probleminin çözümünde

- Bir bilinmeyen kullanarak sonucu bulunuz.
- İki bilinmeyen kullanarak sonucu bulunuz.

Buna göre bir problemin çözümünde bilinmeyen sayısını arttırmak çözümü zorlaştırır mı, kolaylaştırır mı?

Yukarıdaki sorunun yanıtını nedenleri ile açıklayınız.

4.1.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümeleri

Hatırlayalım:

x ve y iki değişken olmak üzere $ax + by + c = 0$ şeklindeki denklemlere **doğrusal (lineer) denklem** adı verilir. Bu tür denklemlerin grafiği, analitik düzlemde bir doğruya karşılık gelir.

Bilinmeyenlerinin derecesi bir ve bilinmeyenlerinin sayısı iki olan denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** adı verilir. Bu denklem sisteminin ikisini de sağlayan ikili, denklem sisteminin çözümüdür. Örneğin;

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 6 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemidir.

Denklem sisteminin çözümü için yok etme metodunu kullanalım.

Bunun için verilen denklemlerde herhangi bir değişken, cebirsel işlemler yapılıp, yok edilerek bir bilinmeyenli denklem hâline dönüştürülür. Burada ilk denklemi –1 ile çarpıp, ikinci denklemle toplarsak y bilinmeyenini ortadan kaldırıp x e bağlı bir bilinmeyenli denklem elde ederiz. Elde edilen denklemden x i buluruz.

$$\begin{aligned} -1 /\quad x + y &= 6 \\ -3x + y &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -x - y &= -6 \\ +\ -3x + y &= 2 \\ \hline -4x &= -4 \\ x &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bulduğumuz x verilen denklemleri sağlayacağından herhangi bir denklemde x yerine 1 yazarak diğer bilinmeyen olan y yi buluruz.

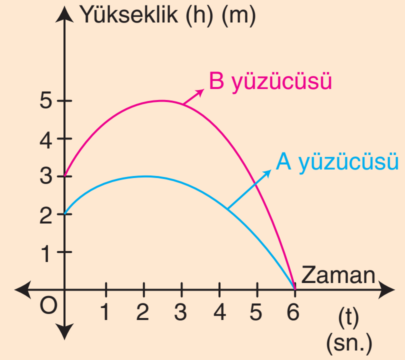
$x + y = 6$ denklemini seçelim. Burada $x = 1$ yazarsak

$1 + y = 6 \Rightarrow y = 5$ bulunur.

O hâlde denklem sistemini sağlayan (x, y) ikilisi, (1, 5) bulunur.

Öğrenelim:

Yanda iki yüzücünün 2 m ve 3 m yükseklikteki tramplenlerden aynı anda suya atlayışlarına yönelik zaman ve yükseklik grafiği verilmiştir. Grafikten A yüzücüsünün 2 m yükseklikten 6 saniyede, B yüzücüsünün de 3 m yükseklikten 6 saniyede suya düştüğü anlaşılmaktadır.



Grafiklerin kesişiminde görüldüğü gibi her iki yüzücü de 6 saniye sonra suya düşmüştür. Yani iki eğrinin kesişimi, analitik düzlemde (6, 0) noktasıdır. Bu eğrilere ait fonksiyonlar,

A yüzücüsünün $f(x) = y = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 3$ ve

B yüzücüsünün $g(x) = y = -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + 2$ biçimindedir. Demek ki bu fonksiyonlara ait denklemlerin cebir yardımıyla ortak çözümü sonucunda (6, 0) çözümünü bulmalıyız.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 3 \\ y = -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + 2 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözümünü cebirsel işlemler yaparak bulalım.

İlk denklemdeki y değeri ikinci denklemde yerine yazılarak bir bilinmeyenli denklem elde edilir.

$$y = -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + 2 \text{ ise}$$

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 3 = \frac{-x^2}{6} + \frac{2x}{3} + 2 \text{ yazılır.}$$

$$-\frac{2x^2}{6} + \frac{11x}{6} + 1 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 11x + 6 = 0$$

$$\Delta = 11^2 - 4.(-2).6 = 169 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2.(-2)} = \frac{-11 \pm 13}{-4} \text{ olur.}$$

Buradan $x_1 = \frac{-11+13}{-4} = -\frac{1}{2}$ ve $x_2 = \frac{-11-13}{-4} = 6$ bulunur.

Bulduğumuz $x_1 = -\frac{1}{2}$ ve $x_2 = 6$ değerlerini denklem sistemindeki denklemlerden birine yazarak y değerlerini bulalım.

$x_1 = -\frac{1}{2}$ için $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 3 \Rightarrow y = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{5.\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} + 3 \Rightarrow y = \frac{13}{8}$ ve

$x = 6$ için $y = -\frac{6^2}{2} + \frac{5.6}{2} + 3 \Rightarrow y = -18 + 15 + 3 = 0 \Rightarrow y = 0$ olur.

Demek ki denklem sisteminin çözümü, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{8}\right)$ ve (6, 0) noktalarıdır.

Grafik yardımıyla iki eğrinin kesişimi, (6, 0) olarak verilmiştir. Cebir yardımıyla da çözümler arasında (6, 0) bulunmuştur. Cebir yardımıyla yapılan denklem sisteminin çözümü, bilinen yollar kullanılarak yapılmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken, çözdüğümüz denklem sistemindeki denklemlerin ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler olmasıdır.

a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}$ ve a, b, c sayıları aynı anda sıfır olmamak şartıyla içinde x ve y gibi iki bilinmeyen bulunduran

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** adı verilir.

İkinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sisteme de **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Buradaki a, b, c, d, e ve f denklemin katsayılarıdır. Bu denklem;

$a = b = c = 0$, $d \neq 0$ veya $e \neq 0 \Rightarrow dx + ey + f = 0$ doğru denklemi,

$b = c = 0$, $a \neq 0$ veya $e \neq 0 \Rightarrow ax^2 + dx + ey + f = 0$ parabol denklemi,

$b = d = e = 0$, $a = c = 1$ ve $f = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ birim çember denklemi olur.

Denklemlerden en az bir tanesi ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem olmak üzere iki denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Denklem sistemini çözmek demek, verilen her iki denklemi de sağlayan (x, y) sıralı ikililerini bulmak demektir. Denklem sistemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin kümesine de verilen sistemin **çözüm kümesi** denir.

Genelde denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan yöntem, denklemlerin birinden bir bilinmeyeni çekip, diğer denklemlerde yerine yazarak bilinmeyen sayısını düşürmektir. Bilinmeyen sayısı 1 e düşürülen denklemde kalan bilinmeyen bulunarak, bu değer denklem sistemindeki herhangi bir denklemde yerine yazılarak diğer bilinmeyenin bulunması sağlanır. Bu yöntemi verilen denklem sisteminde uygulamak zor oluyorsa verilen denklem sistemindeki denklemler kullanılarak bir bilinmeyenli yeni bir denklem elde etmek, çözüm için kullanabilecek diğer bir yöntemdir.

Uygulayalım:

$\left.\begin{array}{l} x^2 - 3y^2 = -21 \\ x^2 + y^2 = 43 \end{array}\right\}$ ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözelim:

1. Yol:

Verilen denklem sisteminde ikinci denklemi (–1) ile çarpıp denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - 3y^2 = -21 \\ -1/\ x^2 + y^2 = 43 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x^2 - 3y^2 = -21 \\ + \quad -x^2 - y^2 = -43 \\ \hline -4y^2 = -64 \end{array}$$

$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ ve $y = -4$ bulunur.

Bulduğumuz değerleri denklem sistemindeki herhangi bir denklemde yerine yazarsak

$x^2 + y^2 = 43$ denkleminde $y = 4$ için $x^2 + 4^2 = 43 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{3}$ olur.

$y = -4$ için $x^2 + (-4)^2 = 43 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{3}$ olur.

Buradan verilen denklem sisteminin çözüm kümesi

$Ç = \{(3\sqrt{3}, 4), (-3\sqrt{3}, 4), (3\sqrt{3}, -4), (-3\sqrt{3}, -4)\}$ bulunur.

2. Yol:

Verilen denklem sisteminde ilk denklemden x^2 yi çekip diğer denklemde yerine yazarsak bir bilinmeyenli denklem elde ederiz.

$x^2 - 3y^2 = -21 \Rightarrow x^2 = 3y^2 - 21$ olur. Bu eşitliği diğer denklemde yerine yazarsak

$x^2 + y^2 = 43 \Rightarrow 3y^2 - 21 + y^2 = 43 \Rightarrow 4y^2 = 64 \Rightarrow y = \pm 4$ bulunur.

Buradan $x^2 - 3y^2 = -21$ denkleminde $y = 4$ için $x = \pm 3\sqrt{3}$

$y = -4$ için $x = \pm 3\sqrt{3}$ elde edilir.

Dolayısıyla $Ç = \{(3\sqrt{3}, 4), (-3\sqrt{3}, 4), (3\sqrt{3}, -4), (-3\sqrt{3}, -4)\}$ bulunur.

Uygulayalım:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümünü $\mathbb{R}^2$ de grafik yardımıyla bulalım.

Çözelim:

Koordinat düzleminde $y = -x^2 + 2x + 4$ fonksiyonunun grafiği bir paraboldür. Bu parabolde $a = -1$, $b = 2$ ve $c = 4$ olduğundan

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1 \text{ olur.}$$

Tepe noktasının ordinatı da $k = -1^2 + 2.1 + 4 = 5$ bulunur.

Yani parabolün tepe noktası, (1, 5) tir. Parabolün eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için $y = 4$ olur.

$y = 0$ için $-x^2 + 2x + 4 = 0$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4ac$ ise

$\Delta = 2^2 - 4.(-1).4 = 20 > 0$ olduğundan farklı iki gerçek kök vardır.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2.(-1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \text{ ise}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5} \text{ ve}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

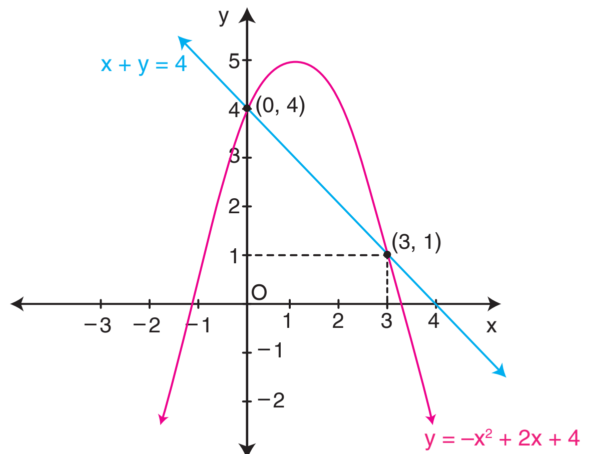
O hâlde $x_1 \cong -1,236$ ve $x_2 \cong 3,236$ olur.

Yani parabolün y eksenini kestiği nokta (0, 4) ve x eksenini kestiği noktalar, (–1,236 , 0) ve (3,236 , 0) dır.

$y = -x^2 + 2x + 4$ parabolünde $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.

$x + y = 4$ doğrusal bir denklem olduğundan fonksiyonun grafiği bir doğrudur.

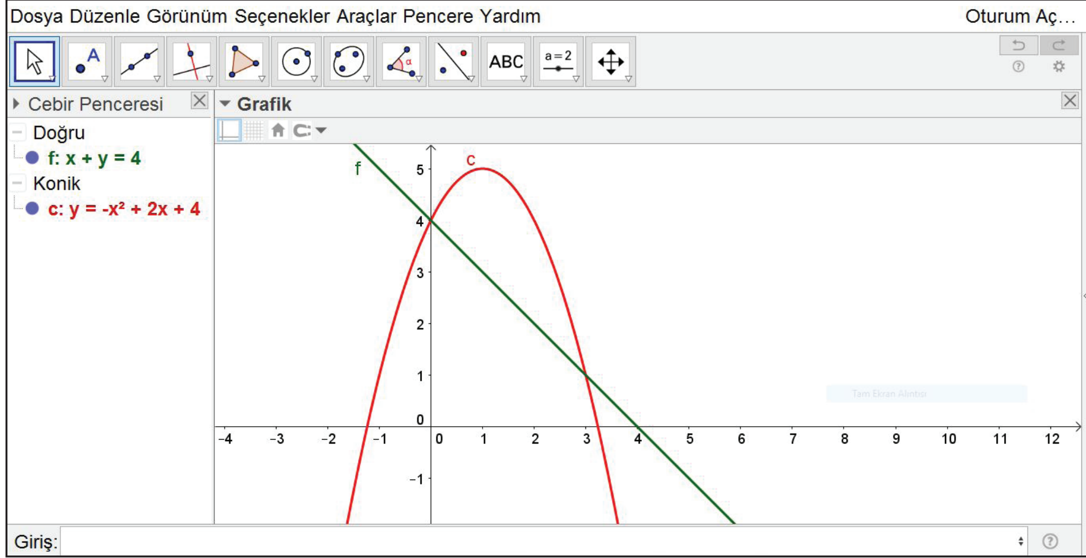
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right\}$ (0, 4) ve (4, 0) noktalarından geçen doğrudur.



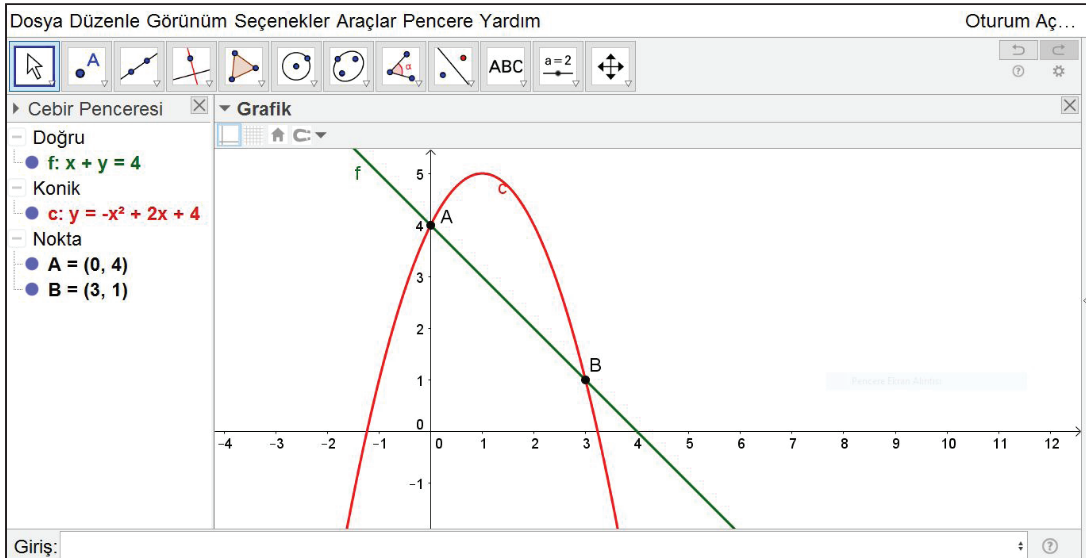
Yanda her iki fonksiyonun grafiği çizilmiştir. Fonksiyonların grafiklerinin kesim noktaları, verilen denklem sisteminin çözümleridir. Grafikte de görüldüğü gibi çözümler (0, 4) ve (3, 1) noktalarıdır.

Şimdi de verilen denklem sisteminin grafik yardımıyla çözümünü bilgi ve iletişim teknolojileri kullanarak yapalım. Bunun için GeoGebra yazılımını kullanalım.

Öncelikle bilgisayarınıza yüklediğiniz GeoGebra yazılımını açtıktan sonra "Giriş" satırına Giriş: **x+y=4** ve Giriş: **y=-x^2+2x+4** yazıp "Enter" tuşuna basınız, aşağıdaki gibi grafikler çizildiğini göreceksiniz.



Grafiklerden anlaşıldığı gibi grafiklerin iki kesişim noktası vardır. Biri y ekseni üzerinde (0, 4) noktası, diğeri de (3, 1) noktasıdır. Bu kesişim noktalarını yazılımda daha iyi görebilmek için "Nokta" araç çubuğu seçilerek grafiklerin kesim noktalarına tıklanır. Bu durumda aşağıdaki gibi A ve B noktaları elde edilir.



Yukarıdaki ekran alıntısından da görüldüğü gibi verilen denklem sisteminin kökleri, (0, 4) ve (3, 1) olarak elde edilir.

Uygulayalım:

$\left.\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ y &= 2x^2 - 3x - 1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümünü $\mathbb{R}^2$ de cebir yardımıyla bulup çözümü grafik üzerinde gösterelim.

Çözelim:

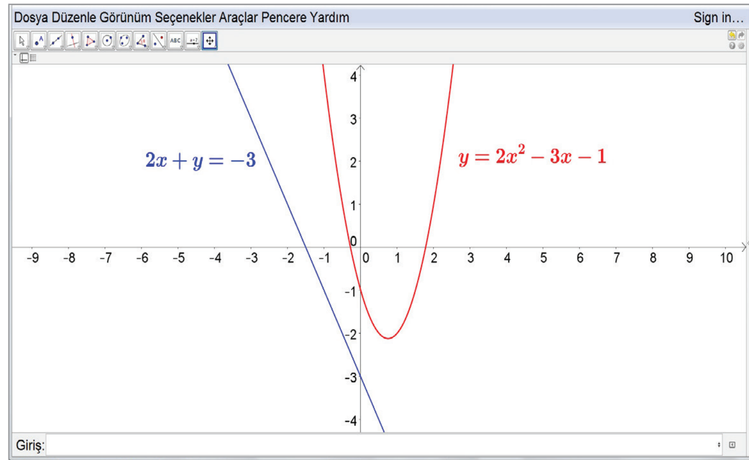
Verilen denklem sisteminde yok etme metodunu kullanarak denklemin bilinmeyen sayısını iki bilinmeyenden bir bilinmeyene indirelim.

$y = 2x^2 - 3x - 1$ olduğuna göre

$2x + y = -3 \;\Rightarrow\; 2x + 2x^2 - 3x - 1 = -3 \;\Rightarrow\; 2x^2 - x + 2 = 0$ elde edilir.

$\Delta = (-1)^2 - 4.2.2 \;\Rightarrow\; \Delta = -15 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur.

Yani verilen denklem sisteminde çözüm kümesi boş kümedir. Grafikleri GeoGebra yazılımında çizip bu durumu gösterelim.



Yandaki grafikte de görüldüğü gibi verilen denklemlere ait fonksiyonların kesim noktası yoktur. O hâlde bu denklem sisteminin çözüm kümesi,

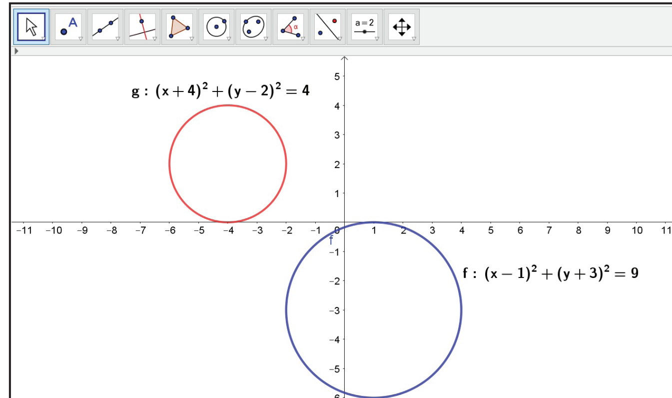
Ç = ∅ dir.

Uygulayalım:

$\left.\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 9 \\ (x + 4)^2 + (y - 2)^2 &= 4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümü için bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak bu denklemlere ait grafikleri çizip çözümü yorumlayalım.

Çözelim:

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımını kullanalım. Yazılımda verilen denklemlere ait grafikleri çizmek için "Giriş" satırına Giriş: **(x-1)^2+(y+3)^2=9** ve Giriş: **(x+4)^2+(y-2)^2=4** yazıp ayrı ayrı "Enter" tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafikleri çizilmiş olur.



Çizilen grafiklerden denklemlerin kesim noktalarının olmadığı görülür. O hâlde denklem sistemindeki her iki denklemi de sağlayan (x, y) ikilileri yoktur. Bu durumda verilen denklem sisteminin çözüm kümesi ∅ olur.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x^2 - x - 6 \\ y = 2x^2 + x - 2 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{R}^2$ de bulalım.

Çözelim:

Verilen denklem sistemindeki ilk denklemin y değerini ikinci denklemde yerine yazıp bilinmeyen sayısını bire indirerek önce x değerini bulalım.

$y = 4x^2 - x - 6$ ve $y = 2x^2 + x - 2$ ise

$4x^2 - x - 6 = 2x^2 + x - 2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow 2(x - 2).(x + 1) = 0$

$x = 2$ veya $x = -1$ bulunur.

$x = 2$ için $y = 4.2^2 - 2 - 6 \Rightarrow y = 8$ ve

$x = -1$ için $y = 4.(-1)^2 - (-1) - 6 \Rightarrow y = -1$ olur.

O hâlde bu denklem sisteminin çözümü, $(-1, -1)$ ve $(2, 8)$ noktalarıdır.

Çözüm kümesi,

$Ç = \{(-1, -1), (2, 8)\}$ olur.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 - xy + 4y - 16 = 0 \\ x - 3y = 4 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{R}^2$ de bulalım.

Çözelim:

Denklem sisteminde $x - 3y = 4 \Rightarrow x = 3y + 4$ tür.

$x^2 + 3y^2 - xy + 4y - 16 = 0$ denkleminde $3y^2$ ve $4y$ terimlerini ortak y parantezine alırsak

$x^2 + 3y^2 + 4y - xy - 16 = 0$

$x^2 + y(3y + 4) - xy - 16 = 0$

$x^2 + yx - xy - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$ bulunur.

$x = 4$ için $x - 3y = 4 \Rightarrow 4 - 3y = 4 \Rightarrow y = 0$ ve

$x = -4$ için $x - 3y = 4 \Rightarrow -4 - 3y = 4 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$ olur.

Yani verilen denklem sisteminin iki çözümü vardır.

Bunlar, $\left(-4, -\frac{8}{3}\right)$ ve $(4, 0)$ dır.

Çözüm kümesi ise

$Ç = \left\{\left(-4, -\frac{8}{3}\right), (4, 0)\right\}$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 + 4x - 4 \\ -x^2 - 4x + y = -4 \end{array}\right\}$ ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözüm kümesini cebir yardımıyla $\mathbb{R}^2$ de bulup bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak grafik üzerinde gösterelim.

Çözelim:

Verilen denklemlerde y leri birbirine eşitlersek bir bilinmeyenli denklem elde ederiz.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 + 4x - 4 \\ y = x^2 + 4x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 + 4x - 4 = x^2 + 4x - 4$$

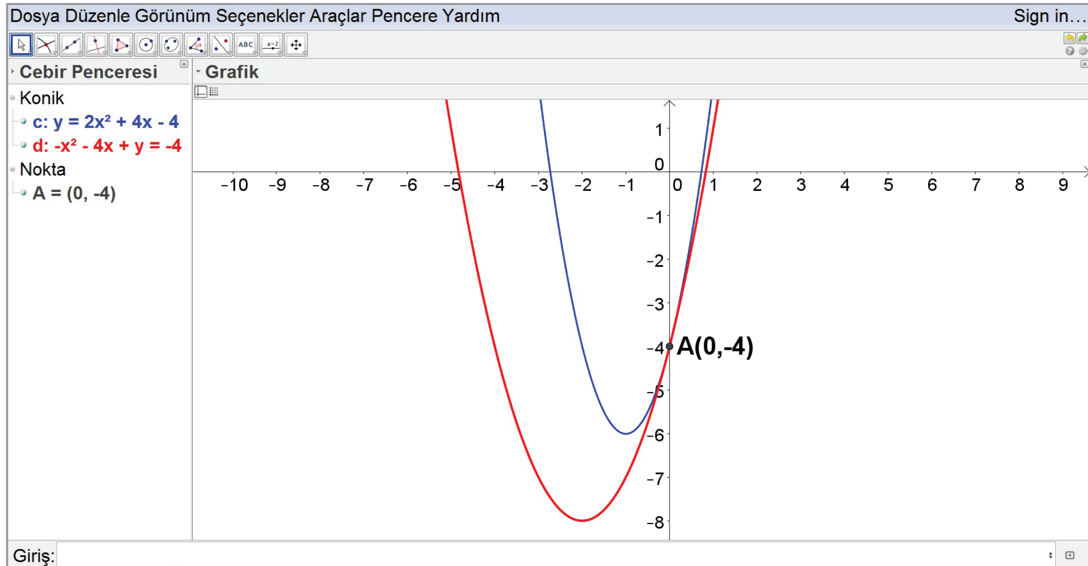
$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ buluruz.}$$

Bu değeri herhangi bir denklemde yerine yazarsak

$x = 0$ için $y = 2.0^2 + 4.0 - 4 \Rightarrow y = -4$ buluruz.

O hâlde bu denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu çözüm (0, –4) noktasıdır. Denklemin çözüm kümesi, Ç = {(0, –4)} olur.

$y = 2x^2 + 4x - 4$ ve $y = x^2 + 4x - 4$ fonksiyonlarını GeoGebra yazılımının “Giriş” satırına yazıp, “Enter” tuşuna basalım. Ekranda grafikler çizip grafiklerin kesiştikleri noktayı bulursak aşağıdaki görüntüyü elde ederiz.



Görüldüğü gibi bu fonksiyonlar tek bir noktada kesişmektedir. Bu nokta, (0, –4) tür.

O hâlde denklemin çözüm kümesi, Ç = {(0, –4)} bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki gibi 60 cm² lik bir kartondan hacmi 90 cm³ olan üstü ve altı açık bir silindir şeklinde çikolata kutusu yapılmıştır. Buna göre silindirin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım ($\pi \cong 3$ alalım.).

Çözelim:

Oluşan silindir kutunun taban yarıçapı r ise tabanın çevresi $2\pi r$ dir. Yani kartonun bir kenar uzunluğu, $2\pi r$ ve diğeri de h kadardır.

Kartonun alanı 60 cm^2 olduğuna göre $2\pi rh = 60$ olarak yazabiliriz.

Silindirin hacmi 90 cm^3 olduğuna göre $\pi r^2 h = 90$ olur.

Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} 2\pi rh &= 60 \\ \pi r^2 h &= 90 \end{aligned}\right\}$$ deklem sisteminin çözümünden elde edilen yükseklik, isteneni verecektir.

$2\pi rh = 60 \Rightarrow rh = \dfrac{30}{\pi}$ olur.

$\pi r^2 h = 90 \Rightarrow \pi r . rh = 90$

$\Rightarrow \pi r \cdot \dfrac{30}{\pi} = 90 \Rightarrow r = 3$ cm bulunur.

$r = 3$ için $2\pi rh = 60 \Rightarrow 2.3.3.h = 60$

$\Rightarrow h = \dfrac{10}{3}$ cm olur.

Pekiştirelim:

1. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini $\mathbb{R}^2$ de bulunuz.

a. $y = x^2 + x - 2$
$x + y = 1$

b. $x^2 - 5x - y = -7$
$y - 2x = 1$

c. $y = 2x + 8$
$y = x^2 + 12x + 32$

ç. $y = -3x^2 - 5$
$2x - y = -3$

d. $5x^2 - 20x - y + 8 = 0$
$x + y = 12$

e. $y = 2x^2 + 3$
$y = x + 2$

2. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini $\mathbb{R}^2$ de cebir yardımıyla elde ediniz.

a. $x^2 + y^2 = 25$
$3x - y = 6$

b. $2x^2 + y^2 = 9$
$4x - 3y = 15$

c. $-x^2 - xy + 2y^2 - x + 3y = 1$
$-x + 2y = -1$

ç. $x^2 + 4x - 4y - 16 = 0$
$-2x + y + 1 = 0$

d. $6x^2 + 3y^2 - 2x + y = 12$
$y = 3 - x$

e. $x^2 + y^2 = 1$
$x + y = 1$

3. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini $\mathbb{R}^2$ de cebir ve grafik yardımıyla bulunuz.

a. $y = x^2 - 2$
$y = -x^2 + 1$

b. $y = x^2 - 3x - 4$
$y = x^2$

c. $y = -2x^2 - 4$
$y = x^2 - 2x + 1$

ç. $y = x^2 - 2x + 1$
$y = x^2 + x + 7$

4. Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümelerini $\mathbb{R}^2$ de cebir yardımıyla bulunuz.

a. $4x^2 + y^2 - 64 = 0$
$4x^2 - 56 + 9y^2 = -160$

b. $2x^2 - 3y^2 = 6$
$6x^2 + y^2 = 58$

c. $x^2 + y^2 = 25$
$x^2 + 4y^2 = 64$

4.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Eşitsizlik Sistemleri

Hayatımızın birçok alanında bazı sınırlılıklar ya da koşullar vardır. Örneğin;

Sağlıklı bir yetişkinin nabzı dakikada 60 ile 100 arasında olmalıdır.

- 150 TL ve üzeri alışveriş yapana 50 TL lik hediye çeki verilmektedir.
- %100 kuru havada vücudun birkaç saat için dayanabileceği en yüksek sıcaklık 60°C, %100 nemli bir havada ise 34,4°C dir.
- Bu vinç, en fazla 1 ton ağırlığı kaldırabilmektedir.

Siz de günlük hayatınızdan bunlara benzer örnekler veriniz.

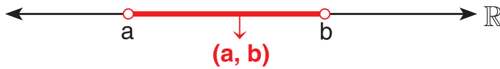
4.2.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Hatırlayalım:

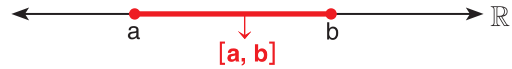
Matematikte aralık, herhangi iki sayı arasındaki noktaların kümesidir. Bu iki sayının bu aralığa dâhil olup olmamasına göre farklı aralık kavramları kullanılmaktadır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere

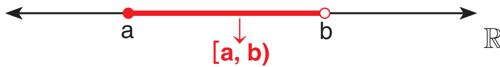
$\{x \mid a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi (a, b) biçiminde gösterilir ve **açık aralık** adını alır. Grafik gösterimi aşağıdaki gibidir.

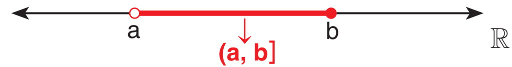


$\{x \mid a \le x \le b,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $[a, b]$ biçiminde gösterilir ve **kapalı aralık** adını alır. Grafik gösterimi aşağıdaki gibidir.



$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $[a, b]$ kapalı aralığının uç noktalarından biri çıkarılırsa elde edilen yeni aralığa **yarı açık aralık** denir. $\{x \mid a \le x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $[a, b)$ ve $\{x \mid a < x \le b,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi de $(a, b]$ biçiminde gösterilip bu aralıklar, yarı açık aralıktır. Aralıkların grafik gösterimi aşağıdaki gibidir.





İçinde hem birinci dereceden bilinmeyen hem de eşitsizlik sembolleri kullanılan ifadelere **birinci dereceden eşitsizlikler** denir. Eşitsizliklerin çözümü için aşağıdaki ilişkileri hatırlayalım.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $c \in \mathbb{R}$ için $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ dir. Yani eşitsizliğin her iki tarafına herhangi bir gerçek sayı eklemek eşitsizliğin yönünü değiştirmez.
- $c \in \mathbb{R}^+$ için $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafını pozitif bir gerçek sayıyla çarpmak ya da böyle bir sayıya bölmek, eşitsizliğin yönünü değiştirmez.

- $c \in \mathbb{R}^-$ için $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafını negatif bir gerçek sayıyla çarpmak ya da böyle bir sayıya bölmek, eşitsizliğin yönünü değiştirir.

Örneğin

$-2(5 + 6x) + 7 < 5(3 - 2x)$ eşitsizliğini çözüp çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterelim.

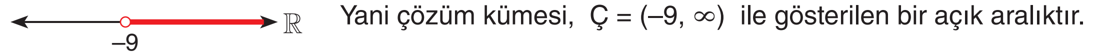
$-2(5 + 6x) + 7 < 5(3 - 2x) \Rightarrow -10 - 12x + 7 < 15 - 10x$ (Her iki tarafa 10x eklersek)

$-2x - 3 < 15$ (Her iki tarafa 3 eklersek)

$-2x < 18$ (Her iki tarafı –2 ye bölersek)

$x > -9$ bulunur.

Bu çözümün sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibidir.



Yani çözüm kümesi, $Ç = (-9, \infty)$ ile gösterilen bir açık aralıktır.

Keşfedelim:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$ ve $g(x) = -2x + 4$ fonksiyonlarının grafiklerini analitik düzlemde çiziniz.

2. Bu fonksiyonların köklerinden küçük ya da büyük x değerleri için f(x) in alacağı değerlerin pozitif ya da negatif olma durumlarını grafiklerine bakarak belirleyiniz.

3. Buna göre her iki fonksiyon için kökten büyük ya da küçük değerlerde fonksiyonların + ya da – olup olmadığına göre aşağıdaki tabloyu + veya – yazarak doldurunuz.

x	$-\infty$	kök	$+\infty$
f(x)		0	

x	$-\infty$	kök	$+\infty$
g(x)		0	

▶ Verilen doğrusal fonksiyonlar $f(x) = ax + b$ biçiminde olduğuna göre tabloya yerleştirdiğiniz işaretler ile a nın işareti arasında nasıl bir ilişki olduğunu belirleyiniz.

4. Aşağıda verilen fonksiyonlar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye tanımlıdır. Bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ **b.** $h(x) = x^2 - 2x + 1$ **c.** $m(x) = x^2 - 3x + 6$

ç. $g(x) = -6x^2 + 7x - 2$ **d.** $k(x) = -4x^2 - 12x - 9$ **e.** $t(x) = -5x^2 + x - 2$

5. Grafiklerden her bir fonksiyonun 0 dan büyük ya da küçük olduğu durumların çözüm kümesini bulunuz.

6. Fonksiyonların kökleri (varsa) x_1 ve x_2 olsun. Aşağıdaki tabloya benzer tablolar yaparak fonksiyonların köklerine göre hangi aralıkta + (pozitif) veya – (negatif) olduğunu yazınız.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f(x)		0		0	

▶ Oluşturduğunuz tablolara göre fonksiyonun iki farklı kökü, tek kökü olduğu veya kökünün hiç olmadığı durumlarda tablodaki işaretlerle ikinci dereceden $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlardaki a nın işareti arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

Öğrenelim:

Birinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların alacağı değerleri fonksiyonların kökü yardımıyla bulalım.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ birinci dereceden bir değişkenli fonksiyonunu ele alalım.

$ax + b = 0$ denkleminin kökü, $x_1 = -\dfrac{b}{a}$ dır.

$f(x) = ax + b$ fonksiyonunu bu kök yardımıyla yazalım.

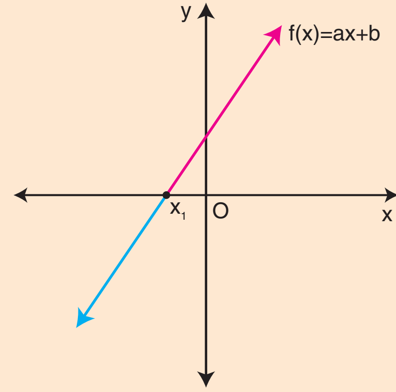
$f(x) = ax + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\dfrac{b}{a}\right)\right] = a(x - x_1)$ olur.

Burada

1. $a > 0$ ise $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir. Yani

$x < x_1$ için fonksiyon negatif değerlidir.
(a nın ters işaretlisi)

$x > x_1$ için fonksiyon pozitif değerlidir.
(a nın aynı işaretlisi)



x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f(x)=ax+b a>0	−	0	+

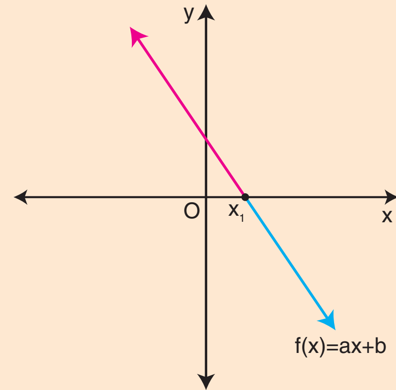
2. $a < 0$ ise $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir. Yani

$x < x_1$ için fonksiyon pozitif değerlidir.

(a nın işaretinin ters işaretlisi)

$x > x_1$ için fonksiyon negatif değerlidir.

(a nın işaretinin aynı işaretlisi)



x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f(x)=ax+b a<0	+	0	−

Yukarıda oluşan işaret tablolarını birleştirirsek aşağıdaki işaret tablosunu elde ederiz.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
f(x)=ax+b	a nın işareti ile ters işaret	0	a nın işareti ile aynı işaret

Elde edilen bu tabloya göre $f(x) < 0$ veya $f(x) > 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümesi, grafik çizmeden rahatlıkla bulunabilir. Yani birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik olan $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leqslant 0$ eşitsizliklerinin çözümü için yukarıdaki gibi işaret tablosu oluşturup a nın işaretine göre istenen çözüm kümesi bulunur.

Şimdi de ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların alacağı değerlerin işaretini inceleyelim.

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonunu ele alalım.

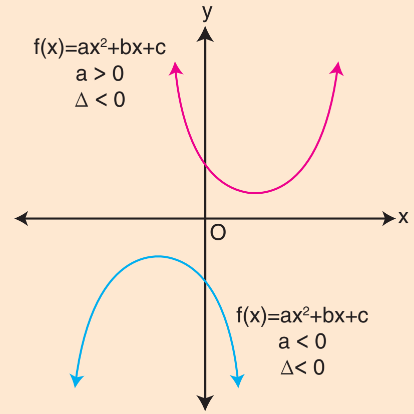
$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ifadesini tam kareye tamamlayalım.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ elde edilir.}$$

Yukarıda $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ve $4a^2$ daima pozitiftir. O hâlde Δ nın işaretine göre $f(x)$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaretini inceleyelim.



1. $\Delta < 0$ ise fonksiyonun gerçek sayılarda kökü yoktur.

$\Delta < 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ olur.

O hâlde $a > 0$ ise fonksiyon pozitif, $a < 0$ ise fonksiyon negatif değerler alır. Yani a nın işareti ile fonksiyonun aldığı değerlerin işareti aynıdır.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	a nın işaretinin aynısı

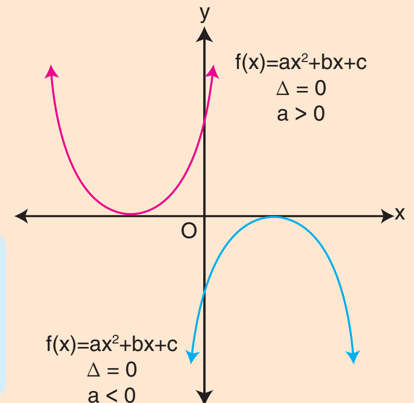
2. $\Delta = 0$ ise fonksiyonun $x_1 = x_2$ gibi eşit olan kökleri vardır. Bu kökler, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dır. Yani

$\Delta = 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ olur.

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ için } f(x) = 0 \text{ dır.}$$

Bunun dışında $x \neq -\frac{b}{2a}$ için $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ olduğundan a nın işareti, f(x) fonksiyonunun işaretini etkiler.

$a > 0$ ise $f(x) > 0$ ve $a < 0$ ise $f(x) < 0$ olur. Bu, yandaki grafikte de görülmektedir.



x	$-\infty$	$x_1 = x_2 - \frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	a nın işareti ile aynı işaret	○	a nın işareti ile aynı işaret

$\Delta > 0$ ise fonksiyonun x_1 ve x_2 gibi iki farklı gerçek kökü vardır.

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçiminde yazılabilir.

a. $x < x_1 < x_2$ olduğunda $x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 < 0$ olduğundan $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ elde edilir. Bu durumda f(x) fonksiyonunun işareti için a nın işaretine bakılır. a nın işareti ile f(x) fonksiyonunun işareti aynı olur.

b. $x_1 < x < x_2$ olduğunda $x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 < 0$ olup $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ elde edilir. Bu durumda f(x) fonksiyonunun işareti a nın işaretinin tersi olur.

c. $x_1 < x_2 < x$ olduğunda $x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 > 0$ olur. O hâlde $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ dır. Bu durumda f(x) fonksiyonunun işareti a nın işareti ile aynı olur.

Tüm bu durumların işaret tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

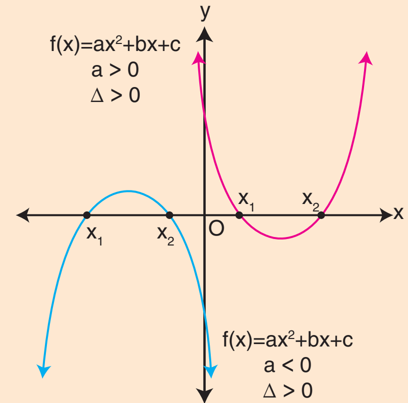
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$	a nın işareti ile aynı işaret	0	a nın işareti ile ters işaret	0	a nın işareti ile aynı işaret

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için

$f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ ve $f(x) \leq 0$ eşitsizliklerinin çözümü, f(x) fonksiyonunun yapılan işaret tablosundan elde edilir.

a, b, c $\in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ biçiminde yazılan eşitsizliklere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir. Bu tür eşitsizliklerin çözüm kümesi yukarıda bahsedildiği gibi işaret tablosu oluşturulup bulunur.



Uygulayalım:

$x^2 - x > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini cebir yardımıyla bulalım.

Çözelim:

$f(x) = x^2 - x = x.(x - 1)$ olarak alınırsa $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ bulunur. $a = 1 > 0$ ve kökler 0 ile 1 iken işaret tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x) = x^2 - x$	a nın işareti ile aynı işaret +	0	a nın işareti ile ters işaret −	0	a nın işareti ile aynı işaret +

$f(x) > 0$ olduğu aralıklar $(-\infty, 0)$ ve $(1, \infty)$ olduğundan çözüm kümesi $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

$x^2 + 2x - 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de grafik ve cebir yardımıyla bulalım.

Çözelim:

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesini önce grafik yardımıyla bulalım.

Bunun için önce $f(x) = x^2 + 2x - 15$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$ ve $k = f(r) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = -16$ dır.

Tepe noktasının koordinatları $(-1, -16)$ dır.

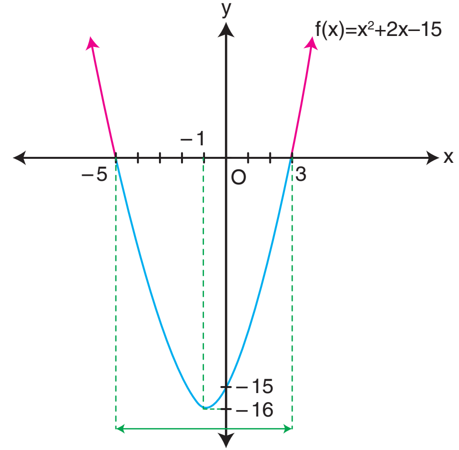
Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için $y = -15$ ve

$y = 0$ için $x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow (x + 5) \cdot (x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = -5$ veya $x = 3$ bulunur.



Fonksiyonda $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Grafik yandaki gibidir.

Grafikte de görüldüğü gibi $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi yani $f(x) = x^2 + 2x - 15$ fonksiyonunun negatif değerler ve 0 değeri aldığı aralık, $[-5, 3]$ biçimindedir.

Şimdi de $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini cebir yardımıyla bulalım.

Bunun için $f(x) = x^2 + 2x - 15$ fonksiyonuna ait işaret tablosunu yapalım.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0$ olduğundan denklemin iki farklı gerçek kökü vardır. Bunlar,

$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -5$ veya $x_2 = 3$ olur.

x	$-\infty$	-5		3	$+\infty$
$f(x)=x^2+2x-15$	a nın işareti ile aynı işaret +	0	a nın işareti ile ters işaret −	0	a nın işareti ile aynı işaret +

İşaret tablosunda da görüldüğü gibi $f(x) = x^2 + 2x - 15$ fonksiyonunu negatif yapan değerler, $(-5, 3)$ aralığındadır. İstenen eşitsizlikte $f(x) = 0$ için de değerlerin olması gerektiğinden $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözümü $[-5, 3]$ aralığıdır.

Çözüm kümesi $Ç = \{x \mid -5 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ olarak yazılır.

Dikkat Edelim!

$k \in \mathbb{R}$, olmak üzere $f(x) > k$, $f(x) \geqslant k$, $f(x) < k$, ve $f(x) \leqslant k$ biçiminde eşitsizlikler $f(x) - k < 0$, ve $f(x) - k \leqslant 0$ biçimine getirdikten sonra çözüm kümesi bulunur.

Uygulayalım:

$-15x^2 \geq 7 - 8x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

İstenen çözüm kümesini cebir yardımıyla bulalım. Bunun için $f(x) = -15x^2 + 8x - 7$ fonksiyonuna ait işaret tablosunu yapalım. Önce $-15x^2 + 8x - 7 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$\Delta = b^2 - 4ac$ ise

$\Delta = 8^2 - 4 . (-15) . (-7) = -356 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökleri yoktur. Yani fonksiyon, x eksenini kesmez.

$-15x^2 \geq 7 - 8x \Rightarrow -15x^2 + 8x - 7 \geq 0$ eşitsizliğinin işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = -15x^2+8x-7$ $a = -15 < 0$	a nın işareti ile aynıdır. — — — — — —	

İşaret tablosunda da görüldüğü gibi tüm gerçek sayılar için $-15x^2 + 8x - 7$ ifadesi, daima negatiftir. Yani $-15x^2 + 8x - 7 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç = \varnothing$ dir.

Uygulayalım:

"Karesi 6 fazlasından küçük ya da 6 fazlasına eşit olan gerçek sayılar" kümesini cebir yardımıyla bulalım.

Çözelim:

Herhangi bir gerçek sayıyı x temsil ederse

$x^2 \leq x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$ eşitsizliği elde edilir.

$x^2 - x - 6 = 0$ denkleminde $\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 . (-6) = 25 > 0$ dır.

Bu denklemin köklerini çarpanlara ayırmayı kullanarak bulalım.

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3) . (x + 2) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -2$ olur.

Şimdi eşitsizliğe ait işaret tablosunu oluşturalım.

x	$-\infty$ -2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - x - 6$ $a = 1 > 0$	a nın işareti ile aynı işaret +	a nın işareti ile ters işaret —	a nın işareti ile aynı işaret +

Yukarıdaki işaret tablosu incelendiğinde $x^2 - x - 6$ ifadesinin

x in $(-2, 3)$ aralığındaki değerleri için negatif,

x in 3 ten büyük olan ve –2 den küçük olan değerleri için pozitif,

$x = -2$ ve $x = 3$ değerleri için ise 0 olduğu görülür.

O hâlde karesi 6 fazlasından küçük ya da 6 fazlasına eşit olan gerçek sayılar, $[-2, 3]$ nda bulunan gerçek sayılardır.

Uygulayalım:

Derin, ailesi ve kendisine karşı sorumluluk hisseden bir öğrencidir. Aynı zamanda istikrarlı ve sabırlıdır. Üniversite sınavı için hafta sonları $x^2 - 12x + 32 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesine ait aralıktaki değerler kadar sınava girip ders çalışmaktadır. Derin'in hafta sonları kaç saat sınava girip ders çalıştığını bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak bulalım.

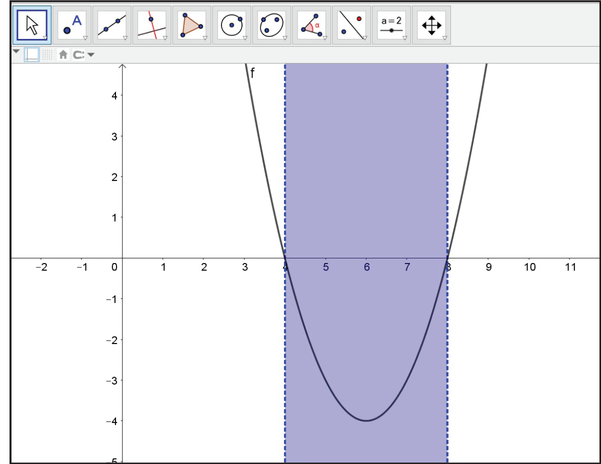
Çözelim:

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesini bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımını kullanarak bulalım. GeoGebra yazılımının "Giriş" satırına önce `Giriş: f(x)=x^2-12x+32` yazıp "Enter" tuşuna basıldıktan sonra $f(x) = x^2 - 12x + 32$ fonksiyonunun grafiği çizilir. Sonra da yine yazılımın "Giriş" satırına `Giriş: x^2-12x+32<0` yazılarak "Enter" a basıldıktan sonra verilen eşitsizliğin çözüm kümesi aşağıdaki gibi görülür.

Yandaki grafikte çözüm kümesi $4 < x < 8$ olarak görülmektedir.

Demek ki $x^2 - 12x + 32 < 0$ eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x | 4 < x < 8, x \in \mathbb{R}\}$ dir.

O hâlde Derin, hafta sonları (4, 8) saatleri arasında sınava girip ders çalışmaktadır.



Tanıyalım:

Thomas Harriot (Tomas Hariyot) (1560 - 1621)

İngiliz cebir okulunu kuran matematikçi ve gökbilimci olan Thomas Harriot, "Cebirsel Denklemlerin Çözümüne Uygulanan Analitik Yöntemler" adlı kitabında denklemler kuramını geliştirmiştir. Bugünkü modern cebirin kurucusu olarak kabul edilmektedir. Denklemlerin katsayıları ile kökleri arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur (Dönmez, 2005, 9. cilt, 53).

Thomas Harriot

Öğrenelim:

$10x^2 + 31x + 15 \leq 0$ ikinci dereceden bir değişkenli eşitsizliğinin tablosunu iki farklı yolla yapalım.

1. Yol:

Verilen ikinci dereceden bir değişkenli ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$10x^2 + 31x + 15 \leq 0 \Rightarrow (5x + 3) \, . \, (2x + 5) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir.

Burada $(5x + 3)$ ve $(2x + 5)$ birinci dereceden bir değişkenli ifadelere ait işaret tablosunu yapıp bu ifadelerin çarpımlarını bulalım.

Bunun için $5x + 3 = 0$ ve $2x + 5 = 0$ denklemlerinin köklerini bulalım.

$5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$ ve $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ bulunur.

Bu kökleri küçükten büyüğe doğru işaret tablosuna yerleştirelim.

x	∞	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{5}$	+∞
5x + 3	−		−	0	+
2x + 5	−	0	+		+
(5x+3)(2x+5)	(−).(−) = +	0	(−).(+) = −	0	(+).(+) = +

İşaret tablosunda da görüldüğü gibi $10x^2 + 31x + 15 = (5x + 3).(2x + 5)$ ifadesini negatif ve sıfır yapan değerler, $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ kapalı aralığındaki sayılardır.

Yani $10x^2 + 31x + 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ şeklinde bulunur.

2. Yol:

Verilen $10x^2 + 31x + 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözümü için $10x^2 + 31x + 15 = 0$ denkleminin köklerini doğrudan bulup bunların işaret tablosunu yapalım.

$10x^2 + 31x + 15 = 0 \Rightarrow (5x + 3) \, . \, (2x + 5) \Rightarrow 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5}$ veya $x_2 = -\frac{5}{2}$ bulunur.

x	∞	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{5}$	+∞
$10x^2 + 31x + 15$	+	0	−	0	+

Görüldüğü gibi $10x^2 + 31x + 15 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan sayılar, $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ kapalı aralığındadır. Yani verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{5}, x \in \mathbb{R}\right\}$ dir.

Her iki yolla da bulunan çözüm kümeleri aynıdır.

Yani p(x), q(x) ve r(x) birinci veya ikinci dereceden bir değişkenli polinomlar olmak üzere $p(x) \, . \, q(x) > 0$, $p(x) \, . \, q(x) < 0$, $p(x) \, . \, q(x) \geq 0$, $p(x) \, . \, q(x) \leq 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ gibi eşitsizliklerin çözüm kümesi bulunurken

1. Eşitsizlikteki tüm çarpan ya da bölenlerin varsa gerçek kökleri bulunarak, küçükten büyüğe doğru sıralanıp işaret tablosuna yerleştirilir.

2. Her bir çarpandaki polinom (yani fonksiyon) için işaret incelemesi yapılır.

3. İstenen çarpım ya da bölüm ifadesinin negatif ve pozitifliği işaretlerin o aralıktaki çarpımı ya da bölümünden elde edilir.

4. Böylece istenen çözüm kümesi bulunur.

Uygulayalım:

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

Eşitsizliğin sol tarafındaki polinomu çarpanlarına ayıralım.

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 > 0 \Rightarrow (x^3 - 4x^2) - (4x - 16) > 0 \Rightarrow x^2(x - 4) - 4(x - 4) > 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x^2 - 4) > 0$ bulunur.

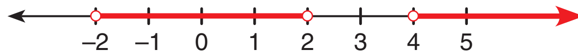
Her bir çarpanı sıfır yapan değerleri bulalım.

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ veya $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ dir.

Bulunan değerleri küçükten büyüğe doğru sıralayarak işaret tablosunda yerleştirelim. Çarpanları sıfır yapan değerleri işaretleyerek tabloyu dolduralım.

x	∞		-2		2		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 4)(x^2 - 4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi, $(-2, 2) \cup (4, \infty)$ dir. Bunu sayı doğrusunda da gösterebiliriz.



Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \{x \mid -2 < x < 2$ veya $x > 4, x \in \mathbb{R}\}$ olarak yazılır.

Uygulayalım:

$\dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 5} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

Verilen rasyonel ifadenin pay ve paydasındaki polinomların sıfırlarını bulalım.

$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (2x - 3).(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ veya $x = -1$ dir.

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ bulunur.

Bulunan x değerlerini işaret tablosunda küçükten büyüğe doğru sıralayarak yazalım ve işaret tablosunu dolduralım. $x = -5$, bölümü tanımsız yaptığından işaret tablosunda çift çizgi ile gösterilir. Yani bu değer hiçbir şekilde çözüme dâhil edilmez.

x	∞		-5		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 5}$		$-$	‖	$+$		$-$	0	$+$	

İşaret tablosunda da görüldüğü gibi bu eşitsizliği sağlayan x değerleri, $(-\infty, -5) \cup \left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$ aralıklarındadır. Yani verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x < -5 \text{ veya } -1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$ biçimindedir.

Dikkat Edelim!

$p(x)$ ve $q(x)$ birer polinom olmak üzere $\dfrac{p(x)}{q(x)} \le 0$ veya $\dfrac{p(x)}{q(x)} \ge 0$ gibi eşitsizliklerin çözüm kümesini bulurken $q(x)$ polinomunu sıfır yapan değerler, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ifadesini tanımsız yapacağından çözüm kümesine dâhil edilmez.

Uygulayalım:

$\dfrac{(3x^2 - 22x - 16).(x + 2)}{x^2 + 6x + 9} \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

Her bir polinomun sıfırlarını bulalım.

$3x^2 - 22x - 16 = 0 \Rightarrow (3x + 2)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ veya $x = 8$ olur.

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ dir. $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$ bulunur.

Bulunan x değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayarak işaret tablosuna yerleştirelim.

x	∞		-3		-2		$-\frac{2}{3}$		8		$+\infty$
$3x^2 - 22x - 16$		+		+		+	○	–	○	+	
$x + 2$		–		–	○	+		+		+	
$x^2 + 6x + 9$		+	○○	+		+		+		+	
$(3x^2 - 22x - 16)(x + 2)$		–		–	○	+	○	–	○	+	
$\dfrac{(3x^2 - 22x - 16)(x + 2)}{x^2 + 6x + 9}$		–	○	–	○	+	○	–	○	+	

İşaret tablosunun son kısmında negatif çıkan işaretlerin bulunduğu aralıklar, eşitsizliğin çözüm kümesine aittir. Buna göre eşitsizliği sağlayan x değerleri, $(-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup \left[-\dfrac{2}{3}, 8\right]$ aralıklarındadır. Yani verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{x \mid x < -3 \text{ veya } -3 < x \le -2 \text{ veya } -\dfrac{2}{3} \le x \le 8,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ olarak bulunur.

Pekiştirelim:

1. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de hem cebir hem de grafik yardımıyla elde ediniz.

a. $x^2 + x - 20 < 0$ **b.** $x^2 + 5x + 8 \leqslant 0$ **c.** $-x^2 + 10x - 25 > 0$ **ç.** $-2x^2 - 5x + 12 \geqslant 0$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulunuz.

a. $x^2 - 4 < 0$ **b.** $-20x^2 + 41x - 20 \le 0$ **c.** $5(2x^2 - 7) < 11x$ **ç.** $(-x^2 - 2x + 8)(2x - 7) \ge 0$

d. $(-x^2 + 6x - 9)(x^2 + 12x + 32) > 0$ **e.** $\dfrac{4x^2 - 9x + 2}{3x - 2} \le 0$ **f.** $\dfrac{(8x^2 - 15x - 2)(2x - 2)}{25x^2 - 16} > x$

3. Aşağıda verilen eşitsizlikler ile aralıkları eşleştiriniz.

(.............) $x^2 - 6x - 8 \le -16$

(.............) $x^3 + 2x^2 - 10x > 14x$

(.............) $4x^3 - 2x^2 - 6x \ge 0$

(.............) $x^3 - 25x < 0$

a. $[2, 4]$

b. $(-\infty, -5) \cup (0, 5)$

c. $[-1, 0] \cup \left[\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

ç. $(-6, 0) \cup (4, \infty)$

4.2.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümeleri

Bir sempozyumda katılımcılara çanta, defter ve kalem dağıtılacaktır. Çanta için 3500 TL, defter ve kalem için de 1000 TL ye kadar sponsor olacak firmalar belirlenmiştir. Organizasyon sahibi sempozyum çantası için 12 TL, defter ve kalem için ise toplam 5 TL ye anlaşmıştır. Bu malzemelerin taşınması için de 90 TL ödeme yapılacaktır. Her çantaya bir defter ve kalem konulacağına göre bu sponsorların yardımıyla kaç kişiye dağıtım yapılabileceğini bulunuz.

- Bu problemin çözümünde eşitsizlik sistemi oluşturunuz.
- Eşitsizlik sisteminin kaç bilinmeyenli ve kaçıncı dereceden olduğunu belirleyiniz.
- Çözümün nasıl yapılması gerektiğini tartışınız.

Hatırlayalım:

İçindeki bilinmeyenin derecesi 1 olan bir bilinmeyenli iki eşitsizlik, eşitsizlik sistemi oluşturur. Buna **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemi** adı verilir. Bu sistemin çözüm kümesi, her iki eşitsizliği de sağlayan noktalar kümesinden oluşur. Bu tür eşitsizlik sistemlerinin çözümünde her iki eşitsizlik de ayrı ayrı çözülür ve çözüm kümelerinin kesişimi, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur. Örneğin

$\left.\begin{matrix} 2x + 3 < 1 \\ x + 2 \geq -1 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

$2x + 3 < 1 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \quad \Rightarrow \quad Ç_1 = \{x | -\infty < x < -1, x \in \mathbb{R}\}$ ve

$x + 2 \geq -1 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \quad \Rightarrow \quad Ç_2 = \{x | -3 \leq x, \ x \in \mathbb{R}\}$ olur.

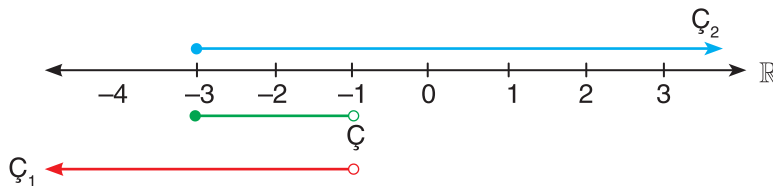
Bu çözüm kümelerinin kesişimi olan aralık,

$(-\infty, -1) \cap [-3, \infty) = [-3, -1)$ biçiminde elde edilir.

Yani verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi,

$Ç = \{x | -3 \leq x < -1, x \in \mathbb{R}\}$ olarak bulunur.

Çözümleri sayı doğrusunda gösterelim.



Bu durumda Ç = [–3, –1) olarak gösterilir.

1. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözümünü hem cebir hem de grafik yardımıyla bulunuz.

a. $2x^2 - 8x - 10 < 0$ **b.** $-x^2 + 10x - 16 > 0$

c. $9x^2 - 8x - 17 \leq 0$ **ç.** $3x^2 - 18x + 15 \geq 0$

2. Aşağıdaki eşitsizlikleri birlikte sağlayan çözüm kümelerini hem cebir hem de grafik yolu ile bulunuz.

a. $\begin{cases} 2x^2 - 8 - 10 < 0 \\ -x^2 + 10x - 16 < 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -x^2 + 10x - 16 > 0 \\ 9x^2 - 8x - 17 \leq 0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 9x^2 - 8x - 17 \leq 0 \\ 3x^2 - 18x + 15 \geq 0 \end{cases}$

▶ İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesi cebir ve grafik yardımıyla nasıl bulunur. Açıklayınız.

Öğrenelim:

İçinde en az biri ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik olan birden fazla eşitsizliğe **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemi** adı verilir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan noktalar kümesinden oluşur. Bunun için eşitsizlik sistemindeki her bir eşitsizliğin çözüm kümeleri bulunur. Bu çözüm kümelerinin kesişimi, eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir. Bu çözümleri cebir veya grafik yardımıyla yapabiliriz.

Örneğin

$-3x^2 - 6x + 24 \leq 0$ eşitsizliğini sadeleştirerek $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$ yazalım.

$\left.\begin{array}{r} -x^2 - 2x + 8 \leq 0 \\ x^2 + 6x + 5 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sistemi elde edillir.

Cebir Yardımıyla:

Önce cebir yardımıyla çözüm kümesini bulalım. Bunun için her bir eşitsizliğin çözüm kümesinin ayrı ayrı işaret tablolarını yapalım. İşaret tablosu yapmak için

$-x^2 - 2x + 8 = 0$ ve $x^2 + 6x + 5 = 0$ denklemlerinin köklerini bulalım.

$-x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2).(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -4$ olur.

$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x + 1).(x + 5) = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = -5$ bulunur.

Bulunan x değerlerini işaret tablosunda küçükten büyüğe doğru sıralayalım ve işaret tablosunu dolduralım.

	∞				
$-x^2 - 2x + 8$	–	–	+	+	–
$x^2 + 6x + 5$	+	–	–	+	+
Ortak Çözüm					

$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç_1 = (-\infty, -4] \cup [2, \infty)$ ve

$x^2 + 6x + 5 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç_2 = (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$ olur.

İşaret tablosunda $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$ ve $x^2 + 6x + 5 > 0$ kısımlarını işaretlediğimizde ikisinin sağlandığı ortak çözüm kümesi elde edilir.

Eşitsizlik sisteminin çözümü, yukarıda bulunan iki çözüm kümesinin kesişimidir.

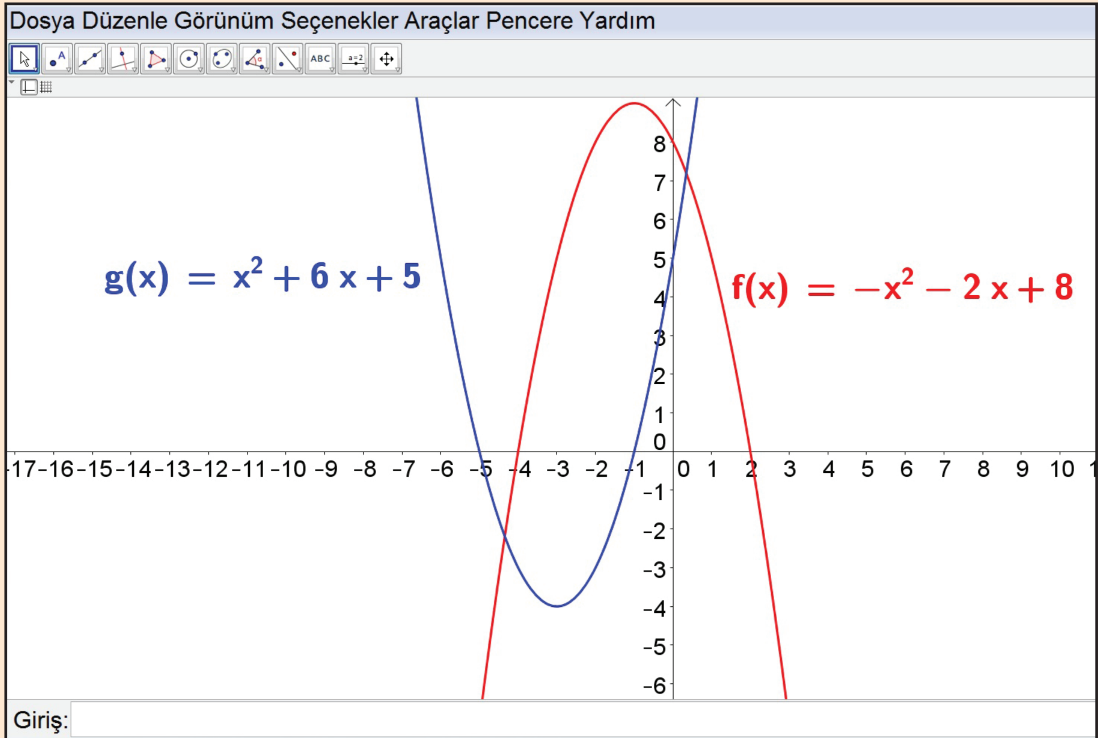
$$\left.\begin{array}{r} -x^2 - 2x + 8 \leq 0 \\ x^2 + 6x + 5 > 0 \end{array}\right\} \text{sisteminin çözüm kümesi } Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (-\infty, -5) \cup [2, \infty) \text{ olur.}$$

Yani eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $Ç = \{x | x < -5 \text{ veya } x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$ olarak bulunur.

Grafik Yardımıyla:

Verilen eşitsizlik sisteminin çözümünü grafik yardımıyla bulalım.

Bunun için $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ ve $g(x) = x^2 + 6x + 5$ fonksiyonlarını çizdikten sonra $f(x) \leq 0$ ve $g(x) > 0$ olan kısımları belirleyip kesişimlerini elde edelim. Grafikleri GeoGebra yazılımında çizelim. Bu fonksiyonların çizimi için yazılımın "Giriş" satırına fonksiyonları yazıp bilgisayarın "Enter" tuşuna basarız.



Grafiklerde de görüldüğü gibi $f(x) \leq 0$ olduğu kısım, x ekseninin altında kalan yani $x \leq -4$ veya $x \geq 2$ için olan değerlerdir. $g(x) > 0$ olduğu kısım ise x ekseninin üstünde kalan yani $x < -5$ veya $x > -1$ için olan değerlerdir. Her iki çözüm kümesinin kesişimi yani iki eşitsizliği de aynı anda sağlayan noktaların kümesi,

$Ç = \{x \mid x < -5 \text{ veya } x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{array}{r} x-3<0 \\ x^2-5x-6>0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini ℝ de bulalım.

Çözelim:

Verilen eşitsizlik sistemindeki eşitsizliklerin çözümlerini ayrı ayrı bulalım.

$x-3<0$ için $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x^2-5x-6>0$ için $x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=-1$ veya $x=6$ dır.

Bulunan kökleri işaret tablosunda küçükten büyüğe yazıp işaret tablosunu doldural

x	∞			+∞
$x-3$	(−)	(−)	0 +	+
x^2-5x-6	(+)	0 −	−	0 (+)
Ortak Çözüm	▒			

Yapılan işaret tablosundan $x-3$ ifadesinin negatif ve x^2-5x-6 ifadesinin pozitif olduğu ortak çözüm $(\infty, -1)$ olduğu görülür.

O hâlde verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{x|\ x<-1,\ x\in\mathbb{R}\}$ elde edilir.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{array}{r} 5x^2+12x-9>0 \\ 8x^2-42x-11\le 0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini ℝ de cebir yardımıyla bulalım.

Çözelim:

$5x^2+12x-9=0$ ikinci dereceden denklemini çözelim.

$5x^2+12x-9=0 \Rightarrow (x+3).(5x-3)=0 \Rightarrow x=-3$ veya $x=\frac{3}{5}$ olur.

$8x^2-42x-11=0$ denklemini çözelim.

$8x^2-42x-11=0 \Rightarrow (4x+1).(2x-11)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ veya $x=\frac{11}{2}$ olur.

Bulduğumuz x değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayıp işaret tablosunu yapalım.

x	∞		$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{2}$ +∞
$5x^2+12x-9$	(+)	0 −	−	0 (+)	(+)
$8x^2-42x-11$	+	+	0 (−)	(−)	0 +
Ortak Çözüm				▒	

Yukarıdaki işaret tablosunda da görüldüğü gibi verilen eşitsizlik sisteminin çözümü, $\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{2}\right]$ elde edilir. Yani eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $Ç=\left\{x|\ \frac{3}{5}<x\le\frac{11}{2},\ x\in\mathbb{R}\right\}$ olarak bulunur.

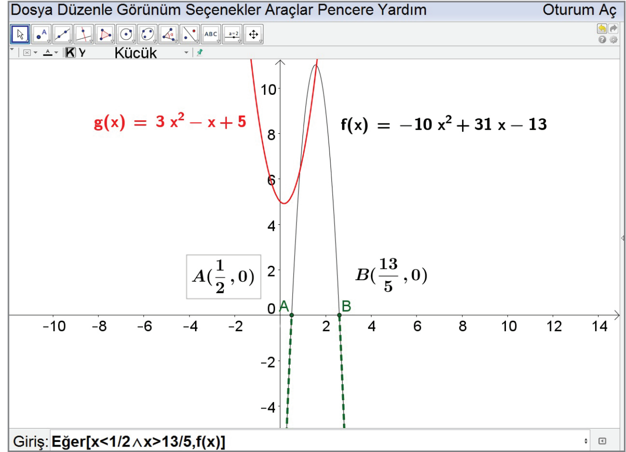
Burada $x=\frac{3}{5}$ değeri, $5x^2+12x-9=0$ denkleminin kökü olduğundan çözüm kümesine dâhil edilmeyip $x=\frac{11}{2}$ değeri, $8x^2-42x-11=0$ denkleminin kökü olduğundan çözüm kümesine dâhil edilmiştir.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{aligned}-10x^2 + 31x - 13 < 0\\ 3x^2 - x + 5 < 0\end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

$f(x) = -10x^2 + 31x - 13$ ve $g(x) = 3x^2 - x + 5$ fonksiyonlarını oluşturarak $f(x) < 0$ ve $g(x) < 0$ olduğu aralıkları bulalım. $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarını GeoGebra yardımıyla çizelim. Bu çizim, yazılımda fonksiyonlar “Giriş” kısmına yazılarak yapılır.



Grafiklerde görüldüğü gibi f(x) fonksiyonunu sıfırdan küçük yapan x değerleri,

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{5}, -\infty\right) = \mathbb{R} - \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{5}\right] \text{ tir.}$$

Yani $f(x) < 0$ eşitliğinin çözüm kümesi,

$$Ç_1 = \left\{x \mid x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{13}{5},\ x \in \mathbb{R}\right\} \text{ tir.}$$

g(x) fonksiyonunun grafiğine bakıldığında her x değeri için $g(x) > 0$ dır. Bunun için $g(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $Ç_2 = \varnothing$ dir.

Bu durumda her iki çözüm kümesinin kesişimi, $Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = \varnothing$ olur.

Uygulayalım:

$-15 < x^2 - 8x < 9$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{Z}$ de bulalım.

Çözelim:

$-15 < x^2 - 8x < 9$ çözümü için

$$\left.\begin{aligned}-15 < x^2 - 8x\\ x^2 - 8x < 9\end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözümünü bulmalıyız.

Her bir eşitsizliğin çözümü için önce denklemlerin çözümünü bulalım.

$-15 < x^2 - 8x$ için $-15 = x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = 5$ olur.

$x^2 - 8x < 9$ için $x^2 - 8x = 9 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 9$ olur.

Bulunan kökleri işaret tablosunda yerleştirip işaret tablosunu düzenleyelim.

x	∞				$+\infty$
$x^2 - 8x + 15 > 0$	(+)	(+)	−	(+)	(+)
$x^2 - 8x - 9 < 0$	+	(−)	(−)	(−)	+
Ortak Çözüm		■		■	

Buna göre eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, $(-1, 3) \cup (5, 9)$ aralığındaki tam sayılar olacaktır. Yani $Ç = \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$ olur.

Uygulayalım:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ -4x^2 + 12x - 9 \leq 0 \end{aligned}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözelim:

1. Yol:

Verilen eşitsizlik sistemindeki $3x^2 - 4x + 1 > 0$ ve $-4x^2 + 12x - 9 \leqslant 0$ eşitsizliklerinin çözümü için önce denklemlerin çözümünü bulalım.

$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ veya $x = 1$ olur.

$-4x^2 + 12x - 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ olur.

Bulunan x değerlerini kullanarak işaret tablosu oluşturup düzenleyelim.

x	∞		$\frac{1}{3}$				$\frac{3}{2}$		+∞
$3x^2 - 4x + 1 > 0$		+	○	−	○	+		+	
$-4x^2 + 12x - 9 \leqslant 0$		−		−		−	○○	−	
Ortak Çözüm									

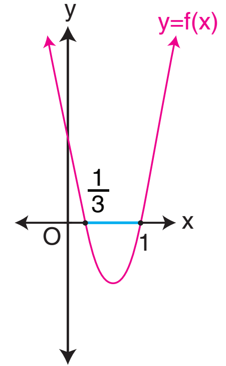
$3x^2 - 4x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözümü, $Ç_1 = (\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ ve $-4x^2 + 12x - 9 \leqslant 0$ eşitsizliğinin çözümü, $Ç_2 = \mathbb{R}$ yani tüm gerçek sayılardır. Eşitsizlik sisteminin çözümü, $Ç = Ç_1 \cap Ç_2$ den

$Ç = \{x| \infty < x < \frac{1}{3} \vee 1 < x < \infty,\ x \in \mathbb{R}\}$ olarak bulunur.

2. Yol:

Çözümü yaparken cebir yolunu kullanalım.

$3x^2 - 4x + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleri, $x = \frac{1}{3}$ veya $x = 1$ bulunur.



İstenen eşitsizliği sağlayan noktalar kümesi, ya $\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$ ya da $\mathbb{R} - \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$ olmalıdır. $a = 3 > 0$ olduğundan $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ fonksiyonuna ait parabolün kolları yukarı doğrudur. Grafiği yandaki gibidir.

$f(x) > 0$ kısmı yani verilen eşitsizliğin çözümü, $\mathbb{R} - \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$ olarak bulunur.

Çözüm kümesi $Ç_1 = \left\{x | x < \frac{1}{3} \vee x > 1,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ olur.

$-4x^2 + 12x - 9 = 0$ denklemin kökü $x = \frac{3}{2}$ idi.

Denklemin birbirine eşit kökleri olduğuna göre x eksenini tek noktada keser. $a = -4 < 0$ olduğundan $g(x) = -4x^2 + 12x - 9$ parabolünün kolları aşağıya doğrudur. Yani g(x) her x değeri için negatif ya da sıfırdır.

Eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç_2 = \mathbb{R}$ olur.

İstenen eşitsizlik sisteminin çözümü,

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = \left\{x | x < \frac{1}{3} \vee x > 1,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ olur.

Pekiştirelim:

1. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini $\mathbb{R}$ de cebir ve grafik yardımıyla bulunuz.

a. $-6x^2 + 9x - 3 > 0$
$3x^2 - 4x - 7 < 0$

b. $3x^2 - 7x + 4 \geq 0$
$8x^2 - 9x - 17 \leq 0$

c. $-5x^2 + 6x - 10 \geq 0$
$13x^2 - 7x + 9 > 0$

2. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerini $\mathbb{R}$ de istediğiniz yolu kullanarak bulunuz.

a. $3x^2 + 2x - 5 > 0$
$-2x^2 + 1 < 0$

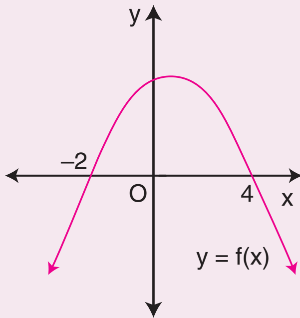
b. $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$
$-\frac{3}{4}x^2 + 4x - 8 \leq 0$

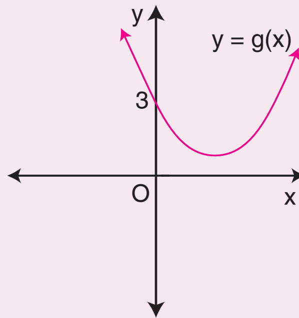
c. $2x^2 - 9x + 8 \geq 0$
$-x^2 - 6x - 4 < 0$

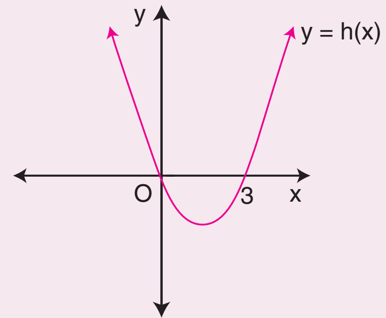
3. Aşağıdaki hangi iki eşitsizliği seçersek elde edilen eşitsizlik sisteminin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi,
$Ç = \left\{x \mid \frac{1}{5} < x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ olur?

a. $5x^2 + 4x - 1 > 0$ **b.** $5x^2 - 34x - 7 < 0$ **c.** $x^2 - 1 \leq 0$ **ç.** $15x^2 + 53x + 10 > 0$

4. Aşağıda $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlanan f(x), g(x) ve h(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.







Buna göre aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesini bulunuz.

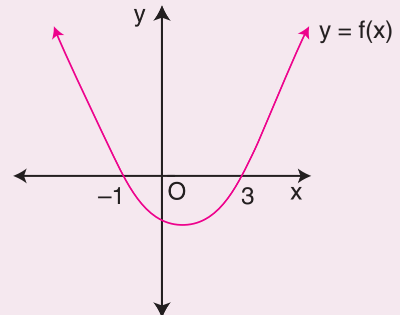
a. $f(x) \geq 0$
$g(x) \leq 0$

b. $f(x) < 0$
$h(x) < 0$

c. $g(x) > 0$
$h(x) \geq 0$

5. Yanda $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlanmış $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $(x^2 - 4) \cdot f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.



4. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a. $x^2 + y^2 = 1$
$x + y = -1$

b. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
$2y + x = 0$

2. Aşağdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini cebir yardımıyla bulunuz.

a. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ **b.** $x^2 + x + 3 > 0$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini grafik yardımıyla bulunuz.

a. $x^2 - 4x - 12 < 0$ **b.** $2x^2 - x - 1 > 0$

4. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\frac{2x-6}{x+1} > 0$ **b.** $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

5. $\frac{(x+3).(2-x)}{x-3} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan en büyük iki tam sayının toplamı kaçtır?

6. $\frac{x^2-2x+1}{5-x} > 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane doğal sayı vardır?

7. $\frac{-(x+6).(x+8)}{x+1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

8. $\frac{(x-4).(x+2)}{x+1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

9. $(3-x).(x-2) > (x+2)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $\frac{-x^2+8x-12}{x^2-6x+9} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $\frac{x^2+x+5}{x^2+2x+7} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

12. $\frac{x-1}{x+4} - \frac{x-3}{x+1} > 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

13. Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

a. $x - 3 < 0$
$-x^2 + 4 \geqslant 0$

b. $x^2 + 5x + 6 > 0$
$x^2 + x + 1 \leqslant 0$

4. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. $\dfrac{x^2 - 9}{5x^2 + 14x - 3} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0} B) {–3} C) $\left\{-3, \frac{1}{5}, 3\right\}$

D) {–3, 3} E) {3}

2. $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{x - 2}$ denkleminin bir kökü 5 olduğuna göre a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 6 E) 11

3. $-6.\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 36.\left(x + \frac{1}{x}\right) - 54 = 0$ olduğuna göre $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

4. $\dfrac{x^2 - 4}{(x + 1).(x + 2)} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $a < 0 < b < c$ olmak üzere

$\dfrac{(a.x + b).(b.x + c)}{x^2} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(-\infty, -\frac{b}{c}\right)$ B) $\left(-\frac{c}{b}, -\frac{b}{a}\right) - \{0\}$

C) $\left(0, -\frac{b}{a}\right]$ D) $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

E) $\left(\frac{c}{b}, \frac{b}{a}\right)$

6. $\dfrac{x}{x - 3} \leq \dfrac{x + 2}{2x}$ eşitsizliğinin çözüm aralığında kaç tane tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $\dfrac{(x + 3).(-x + 1)}{-x^2 + 4} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane tam sayı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8. $\dfrac{3x.(-x^2 - 4)}{x^2 - 4x - 5} \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) [2, 5] B) [0, 5]

C) (–2, 1] D) (– ∞, –1)

E) (–1, 0]

9. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 7x + 6 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizliklerini sağlayan x in çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 1) B) (–2, 1)

C) (1, 4) D) (1, 6)

E) (5, 6)

10. $4 < x^2 - 3x < 40$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–5, 4) B) (–5, –1) ∪ (4, 8) C) (–1, 8)

D) (4, 8) E) (–5, 8)

11. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{x - 1} \leq 2 \\ x < \frac{8}{x} + 2 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–∞, –2) ∪ [2, 4) B) [1, 2] C) (1, 4)

D) (–∞, –2) ∪ (0, 1) ∪ [2, 4) E) $\mathbb{R}$ – (1, 2]

12.

	∞			
	+	−	+	+
	+	+	−	+

Yukarıda tablosu verilen eşitsizlik sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 3x + 2 < 0$
$x^2 - 5x + 6 > 0$

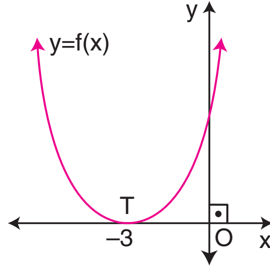
B) $x^2 + 3x + 2 > 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$

C) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 5x + 6} < 0 < 0$

D) $x^2 - 3x + 2 < 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$

E) $x^2 + 3x - 2 > 0$
$x^2 - 5x - 6 < 0$

13.



Şekilde y = f(x) parabolü, T(–3, 0) noktasında x eksenine teğettir.

Buna göre $\frac{x^2 - 16}{f(x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-4, 4]$
B) $(-4, 0)$
C) $(0, 4) - \{-3\}$
D) $[-4, 0] - \{-3\}$
E) $[-4, 4] - \{-3\}$

14. $x^2 + 4x + a$ üç terimlisi x in bütün değerleri için 6 dan büyük olduğuna göre a nın alabileceği değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a < -2$
B) $-2 < a < 1$
C) $1 < a < 3$
D) $3 < a < 5$
E) $10 < a$

15. $\left.\begin{matrix} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizliklerini sağlayan tam sayılar $x^2 - 3 \cdot m + 6 = 0$ denklemini de sağladığına göre m nin alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

16. $\frac{x^2}{1 - x} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty)$
B) $(-2, 1)$
C) $(-\infty, 1)$
D) $(-1, 2)$
E) $\mathbb{R} - \{1\}$

17. $\left.\begin{matrix} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 4)$
B) $(1, 4)$
C) $\varnothing$
D) $(2, 4)$
E) $(-2, 1)$

18. $x^2 - 4 < x^2 + x < x^2 - 2x + 6$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[4, 2)$
B) $\varnothing$
C) $(-4, 2)$
D) $\mathbb{R}$
E) $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$

19. $a < 0 < b$ olmak üzere

$$\frac{a.x^2 - x - a.b.x + b}{b.x^2 - a} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-a, b)$
B) $\left(\frac{1}{a}, b\right)$
C) $\left(a, \frac{1}{b}\right)$
D) $(-\infty, 2) \cup (0, 1) \cup [2, 4)$
E) $\left(a, \frac{b}{a}\right)$

5. Alt Öğrenme Alanı: ÇEMBER VE DAİRE

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

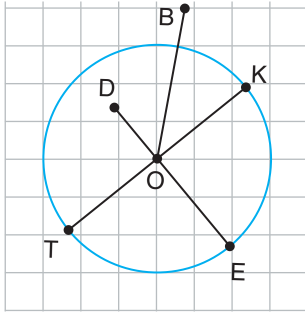
- Çemberde teğet, kiriş, çap, yay ve kesen kavramlarını açıklamanız, çemberlerde kirişin özelliklerini göstererek işlemler yapmanız,
- Bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet - kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmanız,
- Çemberde teğetin özelliklerini göstererek işlemler yapmanız,
- Dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturmanız amaçlanmaktadır.

"Evren, matematik diliyle yazılmıştır. Harfleri; üçgenler, daireler, diğer geometrik biçimlerdir. Bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolanılır."

Galileo (Galilo)

5. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1.



Yukarıda O merkezli çemberde T, O, K doğrusaldır. Verilenlere göre aşağıdaki ifadelerde doğru olan ifadelerin başına D, yanlış olan ifadelerin başına Y harfi getiriniz.

a. (....) [OD] çemberin yarıçapıdır.

b. (....) O merkezinden eşit uzaklıktaki noktalar T, E ve K dır.

c. (....) [OE] çemberin yarıçapıdır.

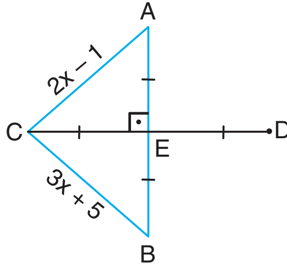
ç. (....) [TK] çemberin çapıdır.

d. (....) |OB| çap kadardır.

e. (....) Çemberin yarıçapı, 4 br dir.

f. (....) |TK| = 2. |OE| tir.

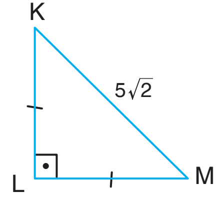
2.



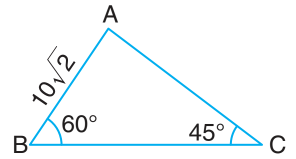
Yukarıdaki ABC üçgeninde C, E, D doğrusaldır. [CE] üçgenin AB kenarına ait orta dikme ise E merkezli [ED] yarıçaplı bir çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

3. Yandaki KLM ikizkenar dik üçgeninde $|KM| = 5\sqrt{2}$ br dir.

Buna göre L merkezli ve K den geçen çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

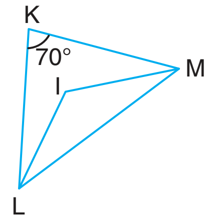


4. Yandaki ABC üçgeninde verilenlere göre |AC| nu bulunuz.



5. Bir doğru parçasının orta dikmesini pergel ve cetvel kullanarak çiziniz.

6. Yandaki KLM üçgeninde I üçgenin açıortaylarının kesişim noktasıdır. $m(\widehat{LKM}) = 70°$ ise $m(\widehat{LIM})$ nü bulunuz.



5.1. Çemberin Temel Elemanları

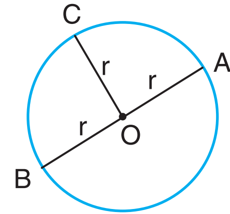
Çember, kayıtlı tarihin başladığı dönemlerden beri bilinen bir geometrik şekildir. Çemberin şekli doğal daire olarak algılanan Ay, Güneş ve kum tanecikleri sayesinde gözlem yoluyla öğrenilmiştir. Bu gözlemler, tekerleğin ve dolayısıyla uygarlığın temelini oluşturmuştur. Çember üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Bunların çoğu da dairenin çevresini ve alanını hesaplamakla ilgilidir. Bu çalışmaların kaydedilmiş olanlarından bazıları; Ahmes papirüsünde dairenin alanını bulmayla ilgili bir problem bulunması, Öklid'in elemanlar kitabının 3. cildinde dairenin çevresini bulmayla ilgilenmesi, Platon'un yedinci mektubunda daire ile ilgili ayrıntılı açıklamalar yapmasıdır. Çember, eski çağlardan beri geometri ve astronomide bilindiği için sanat, din ve daha birçok farklı alanda sembolleştirilerek kullanılmıştır (Dönmez, 2005: X. cilt, 324).

5.1.1. Çemberde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen Kavramları

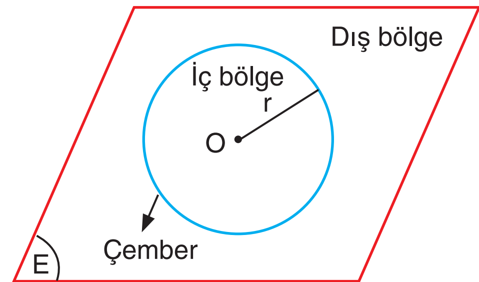
Hatırlayalım:

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu kümeye **çember** adı verilir. Çemberin sabit noktasına **merkez**, çemberin merkezini çember üzerindeki bir noktaya birleştiren doğru parçasına ise **yarıçap** denir. Çemberin yarıçap uzunluğu **r** ile gösterilir. Başlangıç ve bitiş noktası çember üzerinde ve çemberin merkezinden geçen doğru parçasına da **çap** denir. Çap uzunluğu **R** ile gösterilir ve R = 2r dir.

Yandaki şekilde O merkezli ve |OA| = r yarıçaplı bir çember görülmektedir. Bu çember (O, r) ile ifade edilir. Pergel yardımı ile çember çizilirken pergelin ucu, çemberin merkezine konulur. Pergelin açıklığı yarıçap olacak şekilde çember çizilir.

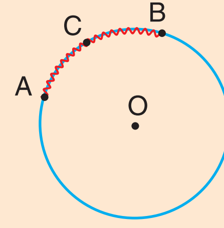


Düzlemde bulunan bir çemberde merkeze uzaklıkları yarıçaptan küçük olan noktaların oluşturduğu kümeye **çemberin iç bölgesi**, merkeze uzaklıkları yarıçaptan büyük olan noktaların oluşturduğu kümeye **çemberin dış bölgesi** adı verilir. Çemberin merkezinden yarıçapa eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu kümeye de **çemberin üzeri** (çemberin kendisi) denir. Çemberin iç bölgesi ve kendisinin oluşturduğu küme ise **çembersel bölge** olarak adlandırılır. Sağdaki şekli inceleyiniz.

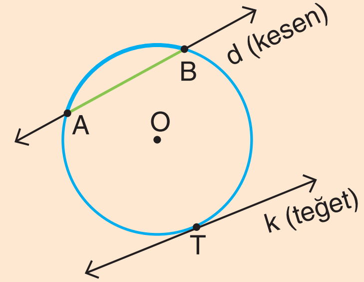


Öğrenelim:

Çemberin iki noktası arasında kalan parçasına **çember yayı**, **çemberin parçası** veya kısaca **yay** denir. Sağdaki çemberde A ve B noktaları arasındaki parça bir yaydır. Bu yay, $\overset{\frown}{ACB}$ şeklinde gösterilir. ACB yayının uzunluğu ise $|\overset{\frown}{ACB}|$ biçiminde ifade edilir.



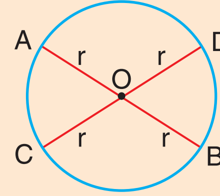
Çemberle kesişimi iki nokta olan doğruya **kesen,** sadece bir nokta olan doğruya **teğet** adı verilir. Teğetin çemberi kestiği noktaya **değme noktası** denir. Çemberde bir kesenin çember içinde kalan parçasına **kiriş** denir. Sağdaki çemberde d doğrusu kesen, [AB] kiriş ve k doğrusu teğettir. T noktası da teğetin değme noktasıdır.



Çemberde en uzun kiriş, merkezden geçen kiriştir. Bu kirişe **çap** adı verilir. Sağdaki çemberde de görüldüğü gibi çap, yarıçapın iki katıdır.

$|AB| = |CD| = 2.r$ dir.

Çemberin temel elemanları teğet, kiriş, çap, yay ve kesendir.

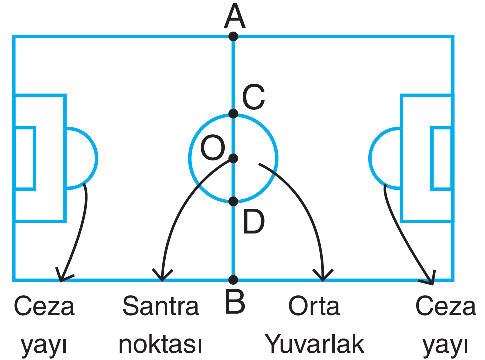


Uygulayalım:

Yandaki şekilde bir futbol sahasının temsilî çizimi görülmektedir. Bu çizimde bulunan çemberlere ait elemanları belirleyelim.

Çözelim:

Orta yuvarlak bir çemberdir. Santra noktası çemberin merkezi, [OC] ve [OD] çemberin yarıçapı, [CD] çapı ve AB ise kesenidir. Ceza yayları da birer çember yayıdır.

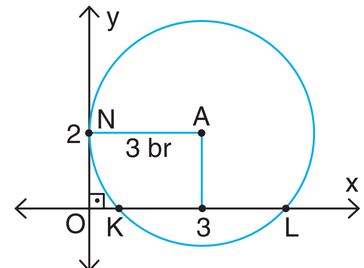


Uygulayalım:

Merkezi A(3, 2) ve yarıçap uzunluğu 3 br olan çemberi analitik düzlemde çizip eksenlerin çembere göre durumlarını inceleyelim.

Çözelim:

Verilen çember analitik düzlemde çizildiğinde yandaki şekil elde edilir. Bu çemberde x ekseni çemberin keseni, y ekseni çemberin teğeti, x ekseni üzerindeki [KL] çemberin bir kirişidir. N noktası, teğetin değme noktasıdır.



Uygulayalım:

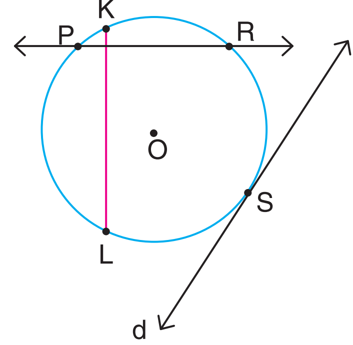
Yandaki şekilde çizilen çemberin temel elemanlarını belirleyelim.

Çözelim:

Çemberde çizilen temel elemanlardan PR, çemberi iki noktada kestiği için kesendir. Ayrıca bu kesenin çember içinde kalan parçası [PR] kiriştir. Şekilde çember üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren [KL] da çemberin kirişidir.

Çemberi sadece bir noktada kesen d doğrusu teğettir.

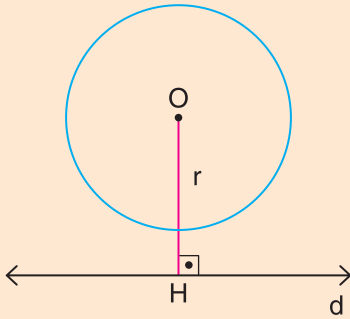
Çemberin iki noktası arasında kalan $\overset{\frown}{PKR}$, $\overset{\frown}{LSR}$ ve $\overset{\frown}{PLS}$ verilen çemberde çizilen yaylara örnektir.



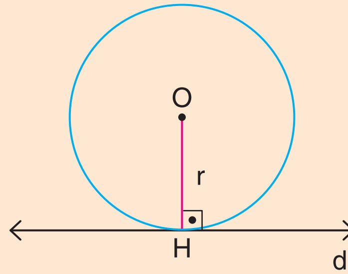
Öğrenelim:

1. Bir doğru, bir çemberi tek noktada veya iki noktada kesebilir veya hiçbir noktada kesmeyebilir. Bir doğru bir çemberi iki noktada kesiyorsa çemberin **kesen doğrusu**, tek noktada kesiyorsa çemberin **teğet doğrusu** adını alır.

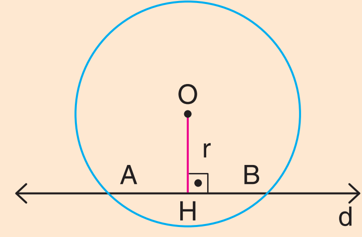
2. Aynı düzlemde bulunan (O,r) çemberi ile d doğrusu için aşağıdaki üç durum söz konusudur.



$[OH] \perp d$ ve $|OH| > r$ ise d doğrusu çemberi kesmez.



$[OH] \perp d$ ve $|OH| = r$ ise, d doğrusu çembere teğettir.



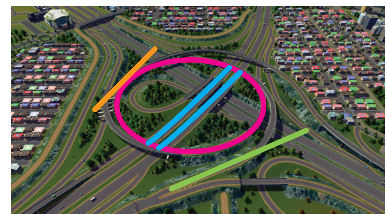
$[OH] \perp d$ ve $|OH| < r$ ise d doğrusu çemberi farklı iki noktada keser.

Uygulayalım:

Yandaki fotoğrafta çember şeklindeki yolun dışından, içinden ve teğet geçen yollar var mıdır? Gösterelim.

Çözelim:

Fotoğrafta görüldüğü gibi çember şeklindeki yol, kırmızı renkle çizilmiştir. Çember şeklindeki yolun dışından geçen yollar yeşil; içinden geçen yollar mavi renkle gösterilmiştir. Çember şeklindeki yola teğet olan yol ise turuncu ile gösterilmiştir.



Pekiştirelim:

1. Defterinize pergel ve cetvel yardımıyla yarıçap uzunluğu 4 cm olan bir çember ve bu çember üzerinde yandaki çizimi yapınız. Bu çizime göre noktalı yerlere uygun ifadeleri yazınız.

a. Çemberin merkezi ....dir.

b. |ML| = ... cm dir.

c. |PK| = ... cm dir.

ç. |NR| en çok .... cm olur.

d. d doğrusu, çemberi .... noktada kesmektedir.

e. t doğrusu, çemberi .... noktada kesmektedir.

f. d doğrusu, çemberi .... yaya ayırır.

g. [PK], çemberi .... parçaya ayırır.

2. Sağdaki çember ve üzerindeki elemanları inceleyip sembolleri, uygun kavramlarla eşleştiriniz.

Merkez		[OA]
Yarıçap		k doğrusu
Çap		d doğrusu
Kesen		[DE]
Teğet		F elemanı
Kiriş		O noktası
Yay		[BC]

3. Yanda verilen O merkezli r yarıçaplı çemberde P, O, C doğrusal olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y harfi getiriniz.

a. (...) |OY| > r olduğundan d doğrusu O merkezli çemberin dışındadır.

b. (...) [KT] çemberin kirişidir.

c. (...) ℓ doğrusu çemberi iki noktada kesmektedir.

ç. (...) |OL| < r olduğundan KT doğrusu çemberi iki nokta keser.

d. (...) t çembere teğet doğrudur.

e. (...) Çemberle doğrunun 3 durumu da şekilde gösterilmiştir.

f. (...) [OY] çemberin kirişidir.

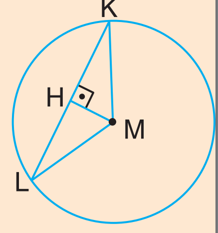
g. (...) K noktası çemberde teğetin değme noktasıdır.

h. (...) [PC] çemberin en uzun kirişidir.

5.1.2. Çemberde Kirişin Özellikleri

Öğrenelim:

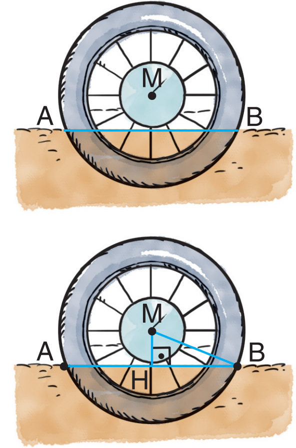
"Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişine indirilen dikme, kirişi iki eş parçaya ayırır." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.



Yandaki M merkezli çemberde [KL] bir kiriş olsun. [MH] ⊥ [KL] olacak biçimde [MH] nı çizelim. |MK| = |ML| olduğundan $\widehat{MKL}$ ikizkenar bir üçgendir. M noktasından tabana indirilen dikme, KL tabanını iki eş parçaya ayırır. Buna göre |KH| = |HL| olur. Yani ifade doğrudur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde çember biçiminde çamura saplanmış bir tekerlek görülmektedir. Tekerleğin M merkezinin çamura uzaklığı 12 cm ve |AB| = 32 cm olduğuna göre tekerleğin çapı kaç cm dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekildeki gibi [MH] ⊥ [AB] olacak biçimde [MH] çizilirse

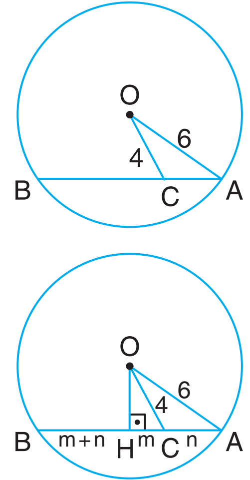
|AH| = |HB| = 16 cm olur. Çünkü çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi iki eş parçaya ayırır. [MB] çemberin yarıçapı olduğundan MHB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|MB|^2 = |MH|^2 + |HB|^2 \Rightarrow r^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow r = 20$ cm bulunur.

O hâlde tekerleğin çapı 2 . 20 = 40 cm dir.

Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli çemberde AB kirişi verilmiştir. |OA| = 6 br ve |OC| = 4 br ise |AC| . |BC| kaç br² dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekilde H ∈ [AB] olmak üzere, [OH] ⊥ [BA] olacak biçimde [OH] çizilirse |BH| = |HA| olur. |HC| = m ve |CA| = n ise |BH| = m + n olur.

OHA dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|OH|^2 + (m + n)^2 = 6^2$ ① ve

OHC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|OH|^2 + m^2 = 4^2$ ② dir.

① denkleminden ② çıkartıldığında $(m + n)^2 - m^2 = 36 - 16$

$\Rightarrow m^2 + 2mn + n^2 - m^2 = 20 \Rightarrow n^2 + 2mn = 20$

$\Rightarrow n . (n + 2m) = 20$ br² olur.

|AC| = n br ve |BC| = (n + 2m) br olduğundan

n . (n + 2m) = |AC| . |BC| = 20 br² bulunur.

Keşfedelim:

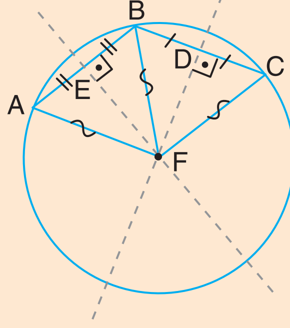
Araç ve gereçler: pergel ve ölçüsüz cetvel

1. Pergel ve ölçüsüz cetvel yardımıyla O merkezli bir çember ve bu çemberin [AB] kirişini çiziniz.
2. Bu kirişin orta dikmesini pergel ve ölçüsüz cetvel yardımı ile çiziniz.
3. Çizdiğiniz orta dikmenin çemberin merkezinden geçip geçmediğine karar veriniz.

▶ Kirişin orta dikmesinin daima çemberin merkezinden geçip geçmediğini tartışınız.

Öğrenelim:

"Bir çemberde herhangi bir kirişin orta dikmesi, çemberin merkezinden geçer." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.



Şekildeki gibi çember üzerinde farklı A, B ve C noktaları alalım. AB ve BC kirişleri ve bu kirişlerin orta dikme doğrularını çizelim. [AB] nın orta noktası E, [BC] nın orta noktası D ve orta dikme doğrularının kesişim noktası F olarak adlandırılsın.

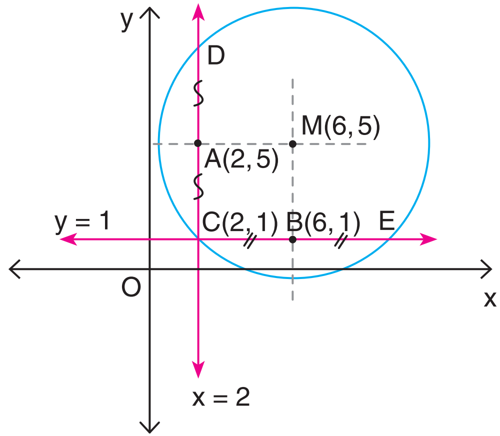
$\widehat{FAB}$ nde |AE| = |EB| ve [EF] ⊥ [AB] olduğundan $\widehat{FAB}$ ikizkenar üçgen ve |FA| = |FB| dur.

$\widehat{FBC}$ nde |BD| = |DC| ve [BC] ⊥ [DF] olduğundan $\widehat{FBC}$ ikizkenar üçgen ve |FB| = |FC| dur.

F noktası, çemberin üzerindeki A, B ve C noktalarından eşit uzaklıkta olduğundan çemberin merkezidir. Kirişlerin orta dikmeleri F noktasından geçtiğine göre bir çemberde herhangi bir kirişin orta dikmesi, çemberin merkezinden geçer.

Uygulayalım:

Bir çember x = 2 doğrusunu C ve D noktalarında, y = 1 doğrusunu C ve E noktalarında kesmektedir. [CD] nın orta noktası A(2, 5) ve [CE] nın orta noktası B(6, 1) olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir? Bulalım.



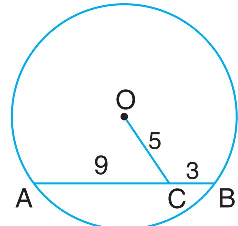
Çözelim:

Verilenlere uygun şekil yandaki gibidir. Kirişlerin orta noktasından çizilen dik doğrular çemberin merkezinde kesişeceğinden M noktası, çemberin merkezidir. M noktasının koordinatları M(6, 5) olur.

$|MC| = \sqrt{(6-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ br yarıçap uzunluğudur.

Uygulayalım:

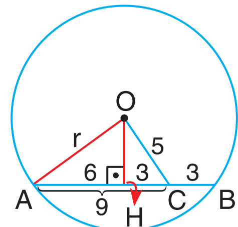
Yandaki şekilde O noktası, çemberin merkezi ve [AB] kiriştir. |OC| = 5 br, |CB| = 3 br ve |AC| = 9 br olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekildeki gibi [OH] ⊥ [AB] olacak biçimde [OH] çizilirse

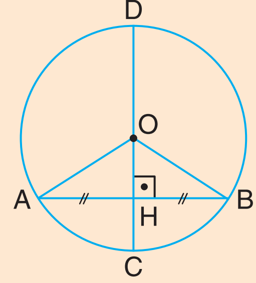
|AH| = |HB| = 6 br ve |HC| = 3 br olur. OHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa, $|OC|^2 = |HC|^2 + |OH|^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + |OH|^2 \Rightarrow |OH| = 4$ br bulunur. OA yarıçapı çizilir ve AHO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|AO|^2 = |AH|^2 + |HO|^2 \Rightarrow r^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{13}$ br bulunur.



Öğrenelim:

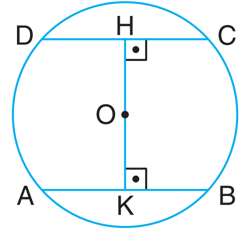
"Bir kirişe dik olan bir çap, kirişi ve kiriş ile belirlenen yayların her birini iki eşit parçaya böler." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

Yandaki şekilde O merkez ve [AB] çemberin bir kirişidir. [DC] çapı [AB] kirişine diktir. Bir çemberde tüm kirişlerin orta dikmeleri çemberin merkezinden geçeceğinden |AH| = |HB| tir. [AO] ve [OB] çizilirse |AH| = |HB|, $m(\widehat{AHO}) = m(\widehat{BHO}) = 90^\circ$ ve [OH] ortak kenar olduğundan $\widehat{AHO} \cong \widehat{BHO}$ olur. Buradan $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$ bulunur. AC ile CB yayının merkez açıları eş olduğu için $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$ ve $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}$ bulunur.



Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli çemberde [AB] ve [CD] kirişleri eştir. [OK] ⊥ [AB], [OH] ⊥ [CD], |AB| = 12 br ve |HK| = 16 br ise çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir? Bulalım.



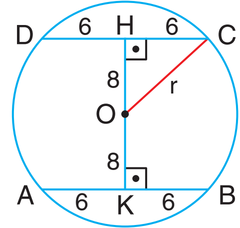
Çözelim:

[AB] ≅ [CD] ⇒ |AB| = |CD| = 12 br olacağından

$|OH| = |OK| = \dfrac{|HK|}{2} = 8$ br dir. [OH] ⊥ [CD] olduğundan

|DH| = |HC| = 6 br dir. Şekildeki gibi [OC] çizilirse |OC| = r olur. OHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

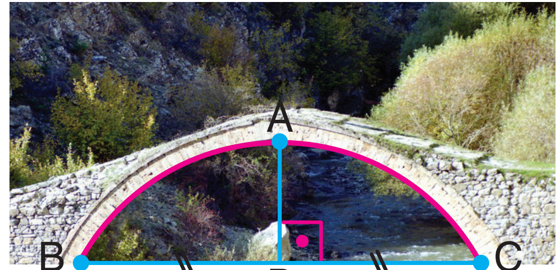
$|OC|^2 = |OH|^2 + |HC|^2 \Rightarrow r^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow r = 10$ br bulunur.



Uygulayalım:

Yandaki fotoğrafta tarihi miraslarımızdan olan ve kültürümüzü yansıtan bir köprünün çember biçimindeki kemerinin su üstünde kalan kısmı görülmektedir.

[BC] ⊥ [AD], |BD| = |DC| = 4 m ve |AD| = 2 m ise köprünün kemeri, yarıçapı kaç m olan bir çember tarafından oluşmuştur? Bulalım.

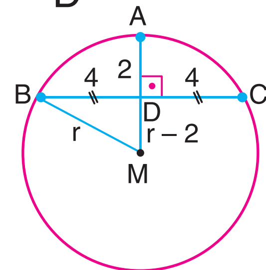


Çözelim:

M çemberin merkezi olsun. [BM] ve [MA] çizilirse |BM| = |MA| = r ve |DM| = r – 2 olur.

BMD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$r^2 = (r-2)^2 + 4^2 \Rightarrow \cancel{r^2} = \cancel{r^2} - 4r + 20 \Rightarrow r = 5$ m bulunur.

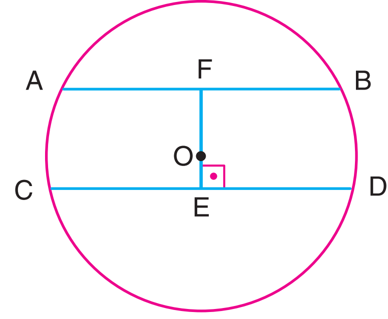


Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli çemberde

[AB] // [CD], [EF] ⊥ [AB] dır.

|AB| = 6 cm, |CD| = 10 cm ve |EF| = 8 cm ise çemberin yarıçapı kaç cm dir? Bulalım.



Çözelim:

|AF| = |FB| = 3 cm ve |CE| = |ED| = 5 cm dir.

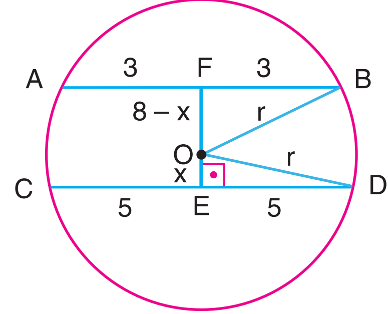
|OE| = x ise |OF| = 8 – x olur.

OFB dik üçgeninde $r^2 = (8-x)^2 + 9$ ① ve

OED dik üçgeninde $r^2 = x^2 + 25$ ② dir.

① ve ② den, $(8-x)^2 + 9 = x^2 + 25 \Rightarrow x = 3$ cm olur.

Yarıçap ise $r^2 = 9 + 25 = 34 \Rightarrow r = \sqrt{34}$ cm bulunur.



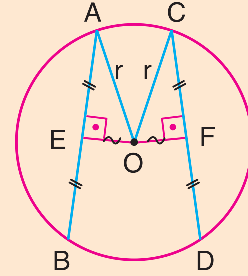
Öğrenelim:

1. Bir çemberde veya eş çemberlerde eş kirişlerin merkeze uzaklıkları eşittir.

Şekildeki O merkezli çemberde [AB] ve [CD] eş kirişleri görülmektedir.

|AB| = |CD| dur. E ∈ [AB] ve [OE] ⊥ [AB] ise |AE| = |EB| olur.

F ∈ [CD] ve [OF] ⊥ [CD] ise |CF| = |FD| olur. |OA| = |OC| olduğundan |OE| = |OF| bulunur. O hâlde verilen çemberin eş kirişleri olan [AB] ve [CD] nın merkeze uzaklıkları olan |OE| ve |OF| eşittir.

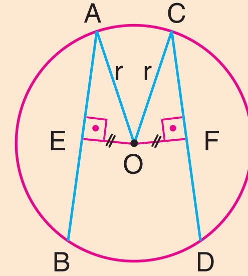


2. Bir çemberde veya eş çemberlerde merkezden eşit uzaklıktaki kirişlerin uzunlukları eşittir.

Şekildeki O merkezli çemberde [AB] ve [CD] kirişlerinin merkeze uzaklıkları olan |OE| = |OF| olsun. |OA| = |OC| = r olduğundan |AE| = |CF| tir.

[OE] ⊥ [AB] ise |AB| = 2.|AE| ve [OF] ⊥ [CD] ise |CD| = 2.|CF| tir.

O hâlde verilen çemberin merkezine eşit uzaklıktaki [AB] ve [CD] kirişlerinin uzunlukları eşittir.



3. Bir çemberin iki kirişi merkezden eşit uzaklıkta değilse uzun olan kiriş merkeze daha yakındır.

[AB] ve [AC], O merkezli çemberin iki kirişi olsun.

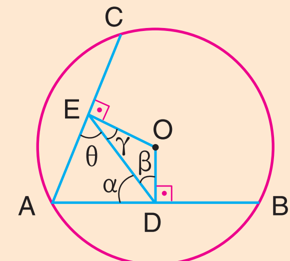
|AB| > |AC|, [OD] ⊥ [AB] ve [OE] ⊥ [AC] kabul edelim.

$|AD| = \dfrac{|AB|}{2}$ ve $|AE| = \dfrac{|AC|}{2} \Rightarrow |AD| > |AE|$ dur.

Bir üçgende büyük kenar karşısında ölçüsü büyük açı bulunduğundan,

ADE üçgeninde $\theta > \alpha$ olur.

$\gamma + \theta = 90^\circ$ ve $\alpha + \beta = 90^\circ$ olduğundan $\gamma < \beta$ olur. O hâlde OED üçgeninde |OD| < |OE| bulunur.



Uygulayalım:

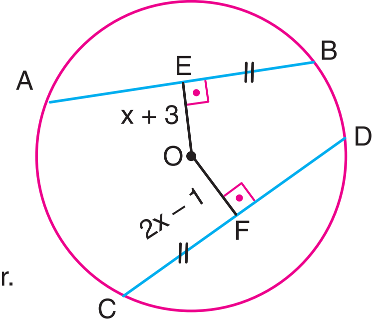
Şekildeki O merkezli çemberde

$[OE] \perp [AB]$, $[OF] \perp [CD]$, $|EB| = |CF|$,

$|OE| = (x + 3)$ br ve $|OF| = (2x - 1)$ br dir.

[AB] ve [CD] kirişleri için verilenlere göre

|OF| kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

$[OE] \perp [AB]$ ise $|AE| = |EB|$ ve $[OF] \perp [CD]$ ise $|CF| = |FD|$ dur.

$|EB| = |CF|$ verildiğinden $|AB| = |CD|$ olur. Bir çemberde;

eş kirişlerin merkeze uzaklıkları eşit olacağından

$|OE| = |OF| \Rightarrow x + 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

$|OF| = 2.4 - 1 = 7$ br olur.

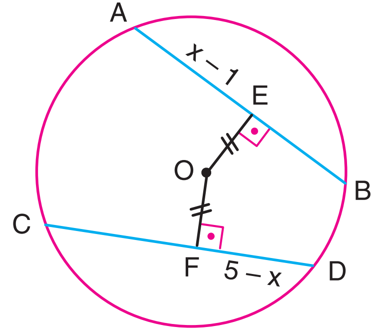
Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli çemberde

$[OE] \perp [AB]$, $[OF] \perp [CD]$, $|OE| = |OF|$,

$|AE| = (x - 1)$ br ve $|FD| = (5 - x)$ br dir.

Verilenlere göre [AB] ve [CD] kirişlerinin uzunluklarının toplamı kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

Bir çemberde merkezden eşit uzaklıktaki kirişlerin uzunlukları eşittir. O merkezli verilen çemberde [AB] ve [CD] kirişlerinin merkeze uzaklıkları olan |OE| ve |OF| eşit verilmiştir.

$|OE| = |OF| \Rightarrow |AB| = |CD|$ dur.

$|AB| = 2.|AE| = 2.(x - 1) = 2x - 2$ ve $|CD| = 2.|FD| = 2.(5 - x) = 10 - 2x$ olduğundan

$2x - 2 = 10 - 2x \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$ olur. O hâlde

$|AB| = 2x - 2 = 4$ br ve $|CD| = |AB| = 4$ br olacağından $|AB| + |CD| = 8$ br bulunur.

Uygulayalım:

Bir çemberin iki kirişi olan [AB] ve [CD] için

$|AB| = (2x + 7)$ br ve $|CD| = (5x - 2)$ br olarak veriliyor.

[AB] kirişi [CD] kirişine göre çemberin merkezine daha yakın olduğuna göre x yerine yazılabilecek tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Bir çemberde merkeze yakın kirişin boy uzunluğu, merkeze uzak olanlara göre daha uzundur. [AB] kirişi, [CD] kirişine göre çemberin merkezine yakındır.

O hâlde uzunluğu daha büyük olmalıdır. Yani

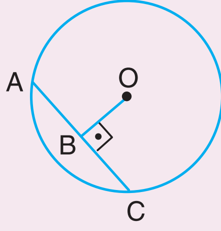
$|AB| > |CD| \Rightarrow 2x + 7 > 5x - 2 \Rightarrow 9 > 3x$ ise

$x < 3$ bulunur. Ayrıca $5x - 2 > 0$ ise $x > \frac{2}{5}$ olmalıdır.

x yerine yazılabilecek uygun tam sayılar, 1 ve 2 olup bu sayıların toplamları 3 tür.

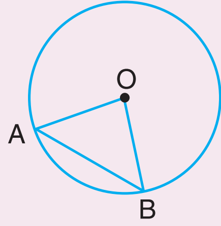
Pekiştirelim:

1.



Şekildeki O merkezli çemberde [OB] ⊥ [AC] ve |AB| = 5 cm ise |AC| kaç cm dir?

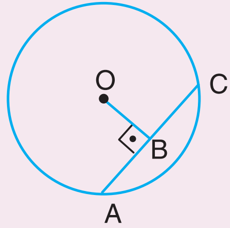
2.



Şekildeki O merkezli çemberde

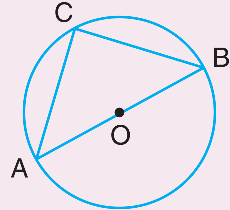
$m(\widehat{AOB}) = 60°$ ve |AB| = 7 cm ise çemberin yarıçapı kaç cm dir?

3.



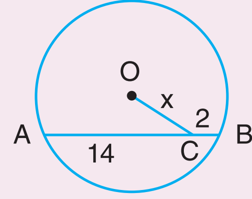
Şekildeki O merkezli çemberde [OB] ⊥ [AC], |OB| = 3 cm ve |AC| = 8 cm ise çemberin çapı kaç cm dir?

4.



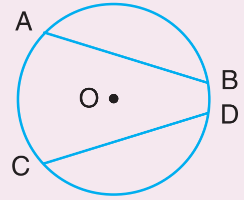
Şekildeki O merkezli ve [AB] çaplı çemberde |AC| = |BC| dur. |AB| = 6 br ise |CB| kaç br dir?

5.



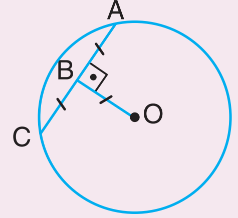
Yukarıdaki yarıçapı 10 br olan O merkezli çemberde [AB] bir kiriştir. |AC| = 14 br ve |CB| = 2 br ise |OC| = x kaç br dir?

6.



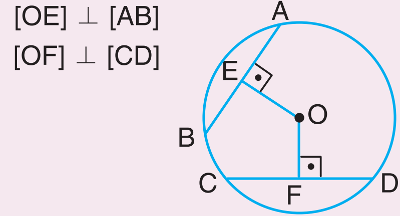
Yarıçapı 5 cm olan yukarıdaki O merkezli çemberde O noktasının AB ve CD kirişlerine uzaklıkları eşit olup h dir. |AB| = (3x – 1) br ve |CD| = (2x + 2) br ise h kaç br dir?

7.



Şekildeki O merkezli çemberde verilenlere göre $\frac{|AC|}{r}$ oranı kaçtır?
(r, çemberin yarıçap uzunluğudur.)

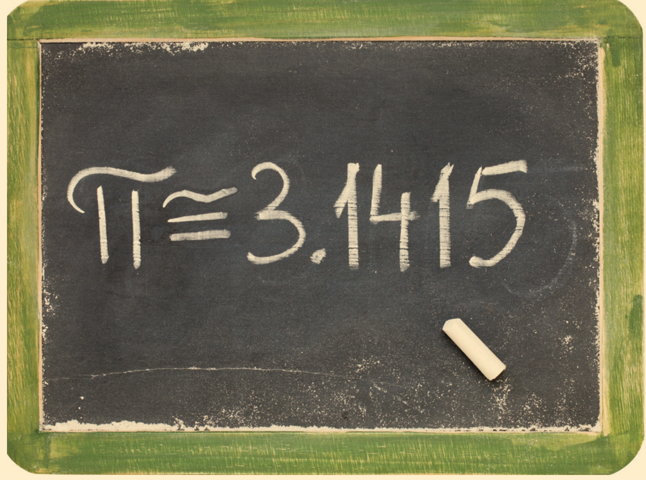
8.



Şekildeki O merkezli çemberde |EO| = |OF| ve |AB| = 2.|CD| – 6 cm ise |CF| + |EB| kaç cm dir?

5.2. Çemberde Açılar

π sayısı, zaman içinde birçok kişi ve uygarlık tarafından hesaplanmaya çalışılmıştır. Bu kişi ve uygarlıklar hesaplama yöntemleri, ölçme hassasiyetleri gibi nedenlerle π sayısını farklı değerlerde hesaplamışlardır. Bu nedenle π sayısı da değer değiştirmiştir. Mısırlılar, π sayısını 3,1605 olarak bulmuşlardır. Babilliler ise π sayısını karesi 10 olan sayı, $3\frac{1}{8}$ ve 3,15 gibi farklı değerlerde hesaplayıp kullanmışlardır. π sayısını Archimedes (Arşimet) $3\frac{10}{71}$ ile $3\frac{1}{7}$ arasında bir sayı, Fibonacci (Fibonaçi) 3,141818 olarak kullanmıştır (Dönmez, 2005: X. cilt, 93, 282, 288).

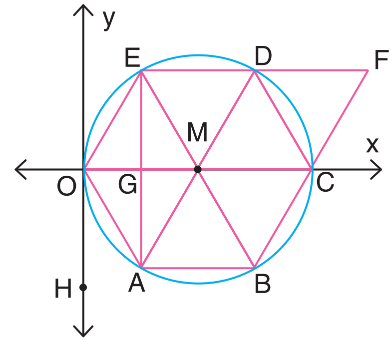


Günümüzde π sayısı için birçok bilgisayarın hesap makinesi programında kullanılan yaklaşık değer, 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 dur.

5.2.1. Çemberde Açı Özellikleri

Keşfedelim:

Yandaki şekilde M merkezli, y eksenine teğet çember ve köşeleri bu çember üzerinde bulunan OABCDE düzgün altıgeni verilmiştir.



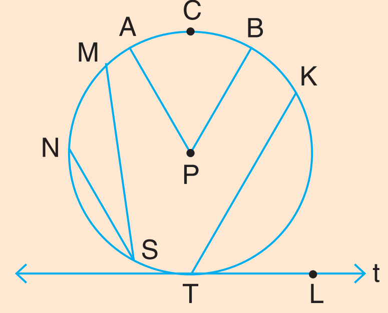
Şekli inceleyerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. OA küçük yayının ölçüsüyle OMA açısının ölçüsünü bularak sonuçları karşılaştırınız.
2. OEA açısının ölçüsünü bularak sonucu OA küçük yayının ölçüsü ile karşılaştırınız.
3. AOH açısının ölçüsüyle OA küçük yayının ölçüsünü karşılaştırınız.
4. OGA açısının ölçüsüyle OA ve EC küçük yaylarının ölçüleri toplamını karşılaştırınız.
5. EFB açısının ölçüsünü EAB yayının ölçüsü ve DC küçük yayının ölçüsünün farkıyla karşılaştırınız.

▶ Bir açı ve bu açının çemberde ayırdığı yay ölçüleriyle ilgili sonuçlar çıkartınız.

Öğrenelim:

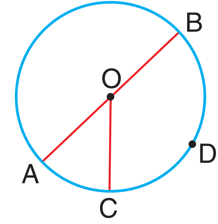
Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberi iki noktadan kesen açıya **merkez açı** denir. Köşesi çember üzerinde olan ve ışınları çemberi iki noktada kesen açıya **çevre açı** adı verilir. Köşesi çember üzerinde olan ve bir kiriş ile bir teğetin belirlediği açıya **teğet - kiriş açı** denir. Bir çemberde merkez açının ölçüsü, açının gördüğü yayın ölçüsü ile aynıdır.



Yandaki şekilde P, çemberin merkezi ve t, bir teğetidir. Bu şekilde $\widehat{APB}$ merkez açı, $\widehat{MSN}$ çevre açı ve $\widehat{KTL}$ teğet - kiriş açıdır. $m(\widehat{APB}) = m(\widehat{ACB})$ dır.

Uygulayalım:

Sağdaki O merkezli AB çaplı çemberde $m(\widehat{BDC}) = 130°$ ise $m(\widehat{AOC})$ değeri kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

AB çapı, çemberi 180° lik iki çember yayına ayırmıştır.

$m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CDB}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{AC}) + 130° = 180° \Rightarrow m(\widehat{AC}) = 50°$ dir.

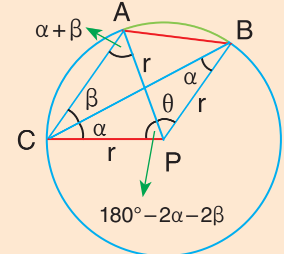
$\widehat{AOC}$ bir merkez açı olup gördüğü AC yayının ölçüsü ile eş ölçüye sahiptir. Yani $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC}) = 50°$ bulunur.

Öğrenelim:

"Bir çemberde aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısı kadardır." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

Yandaki şekilde P merkez A, B ve C çember üzerinde noktalardır. $m(\widehat{BCP}) = \alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \beta$ ve $m(\widehat{APB}) = \theta$ olsun.

Burada $m(\widehat{APB}) = 2.m(\widehat{ACB}) \Rightarrow \theta = 2\beta$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için [AB] ve [CP] çizilirse $|AP| = |BP| = |CP| = r$ olur.



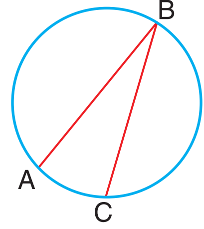
İfadeler	**Gerekçeler**
1. $m(\widehat{BCP}) = m(\widehat{PBC}) = \alpha$	**1.** BPC üçgeninde $|BP| = |CP|$ olduğundan
2. $m(\widehat{ACP}) = m(\widehat{CAP}) = \alpha + \beta$	**2.** CPA üçgeninde $|AP| = |CP|$ olduğundan
3. $m(\widehat{CPA}) = 180° - 2\alpha - 2\beta$	**3.** APC üçgen olduğundan
4. $m(\widehat{APB}) = 180° - 2\alpha - (180° - 2\alpha - 2\beta)$	**4.** CPB üçgen olduğundan
5. $\theta = 2\beta$	**5.** 4 ün düzenlenmesinden

Yani ifade doğrudur. Başka bir deyişle bir çemberde aynı yayı gören çevre açısının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısı kadardır. Yukarıdaki P merkezli çemberde ACB çevre açısının ölçüsü, gördüğü AB yayının ölçüsünün yarısına eşittir.

Yani $m(\widehat{ACB}) = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2}$ dir.

Uygulayalım:

Sağdaki şekilde A, B ve C noktaları çemberin üzerindedir.
$m(\overset{\frown}{ABC}) = 280°$ ise $m(\widehat{ABC})$ değeri kaç derecedir? Bulalım.

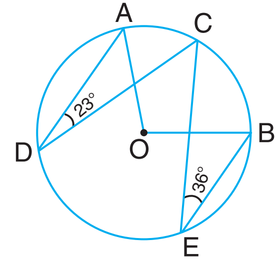


Çözelim:
Bir dairenin çevresine karşılık gelen açı 360° dir. O hâlde
$m(\overset{\frown}{ABC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 360°$ dir.
$280° + m(\overset{\frown}{AC}) = 360° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AC}) = 80°$ bulunur.
$\widehat{ABC}$ bir çevre açı olup ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir. Bu durumda

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{80°}{2} = 40° \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

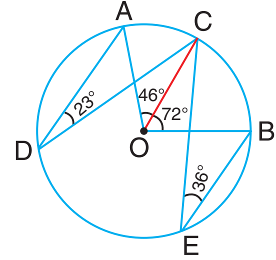
Şekildeki O merkezli çemberde A, B, C, D ve E çember üzerinde noktalardır. $m(\widehat{ADC}) = 23°$ ve $m(\widehat{CEB}) = 36°$ olduğuna göre $\widehat{AOB}$ nın ölçüsü kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

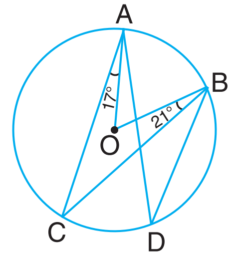
Şekildeki gibi [OC] çizilirse $\widehat{ADC}$ ve $\widehat{AOC}$ aynı yayı gören çevre ve merkez açılar olduğundan $m(\widehat{AOC}) = 2.m(\widehat{ADC}) = 2.23° = 46°$ dir. Benzer şekilde $\widehat{CEB}$ ve $\widehat{COB}$ aynı yayı gören çevre ve merkez açılar olduğundan $m(\widehat{COB}) = 2.m(\widehat{CEB}) = 2.36° = 72°$ dir.

O hâlde $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = 46° + 72° = 118°$ bulunur.



Uygulayalım:

Yandaki şekilde O merkezli çemberde A, B, C ve D çember üzerinde noktalardır. $m(\widehat{CAO}) = 17°$ ve $m(\widehat{OBC}) = 21°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADB})$ kaç derecedir? Bulalım.

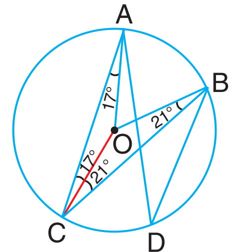


Çözelim:

Şekildeki gibi [OC] çizilirse AOC ve BOC ikizkenar üçgenler olur.

$m(\widehat{CAO}) = m(\widehat{ACO}) = 17°$ ve $m(\widehat{OCB}) = m(\widehat{OBC}) = 21°$ bulunur. Dolayısıyla $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACO}) + m(\widehat{OCB}) = 17° + 21° = 38°$ dir. $\widehat{ACB}$ ile $\widehat{ADB}$ aynı yayı gördüğünden bunların ölçüleri de eşittir.

O hâlde $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) = 38°$ bulunur.

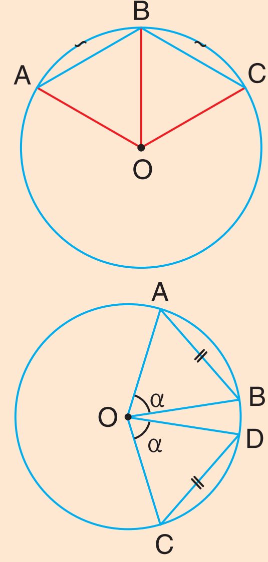


Öğrenelim:

Bir çemberde iki küçük yayın eş olması için gerek ve yeter şart, yaylara karşılık gelen kirişlerin eş olmasıdır.

Yandaki şekilde AB ve BC küçük yaylar olup O noktası, çemberin merkezidir.

[AB] nın [BC] ile eş olması için $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{BOC}$ eş olmalıdır.



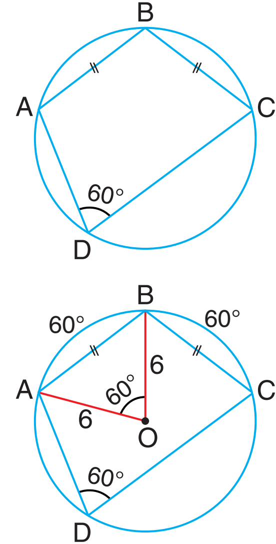
Bir çemberde eş kirişlerin yayları da eştir.

O merkezli yandaki çemberde [AB] ile [CD] birer kiriştir.

[AB] $\cong$ [CD] ise $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ olur.

Uygulayalım:

Yandaki çemberde AB kirişi ile BC kirişi eştir. $m(\overset{\frown}{ADC}) = 60°$ ve çemberin yarıçapı 6 br olduğuna göre |AB| kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekilde |AB| = |BC| olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC})$ dür.

$m(\overset{\frown}{ADC}) = 60°$ ise $m(\overset{\frown}{ABC}) = 120°$ ve buradan

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 60°$ bulunur. O, merkez olmak üzere [OA] ve [OB] çizilirse $m(\widehat{AOB}) = 60°$ olur.

|OA| = |OB| = 6 br olduğundan AOB, bir eşkenar üçgendir.

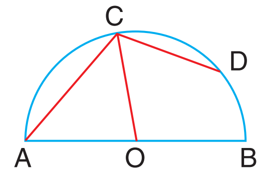
O hâlde |AB| = 6 br bulunur.

Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli [AB] çaplı yarım çemberde C ve D çember üzerindedir.

[AC] ve [CD] kirişleri eş olup $m(\overset{\frown}{DB}) = 40°$ dir.

Verilenlere göre $m(\widehat{AOC})$ kaç derecedir?



Çözelim:

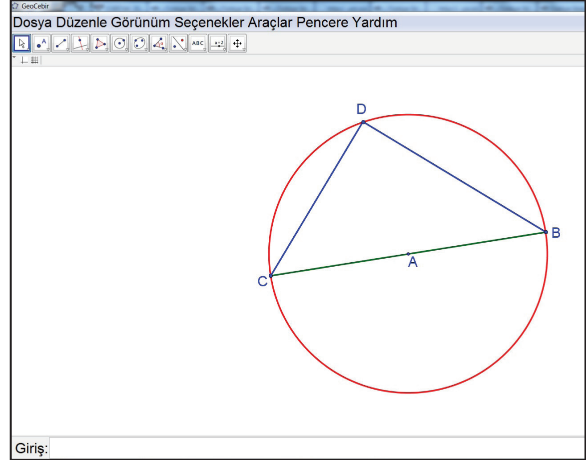
[AC] ve [CD] kirişleri eş olduğundan $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CD})$ tir.

$m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{DB}) = 180° \Rightarrow 2.m(\overset{\frown}{AC}) = 140° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AC}) = 70°$ olur.

$m(\widehat{AOC}) = m(\overset{\frown}{AC}) = 70°$ bulunur.

Keşfedelim:

Araç ve gereçler: bilgisayar, GeoGebra yazılımı



1. Yazılımda “merkez ve bir noktadan geçen çember” araç çubuğunu [Merkez ve bir noktadan geçen çember] seçerek ekranda A merkezli B den geçen bir çember çiziniz.

2. İki noktadan geçen doğru araç çubuğunu [Doğru parçası] seçerek A ve B noktalarından geçen doğruyu çiziniz.

3. Çizdiğiniz doğrunun çemberle B noktası dışındaki kesişimi olan noktaya [Nokta] araç çubuğu ile nokta yerleştiriniz. Bu noktanın adı C olsun.

4. Araç çubuklarından doğru parçası çizen araç çubuğunu [Doğru parçası] seçerek BC doğru parçasını, yani çemberin çapını çiziniz.

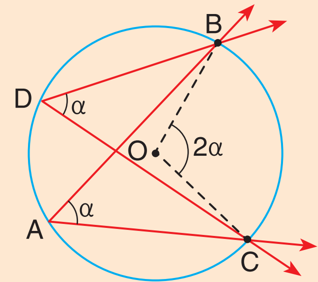
5. Çember üzerinde herhangi bir nokta yerleştiriniz. Bu noktanın adı D olsun. Doğru parçası araç çubuğu ile DC doğru parçasını ve DB doğru parçasını çiziniz.

6. D açısının ölçüsünü yazılımdan açı ölçüsünü bulma araç çubuğunu [Açı] kullanarak buldurunuz.

7. Çember üzerindeki noktayı hareket ettirerek D açısının ölçüsünün değişip değişmediğini belirleyiniz.

▶ Buna göre bir çemberde çapı gören çevre açısının ölçüsü kaç derece olmalıdır?

Öğrenelim:

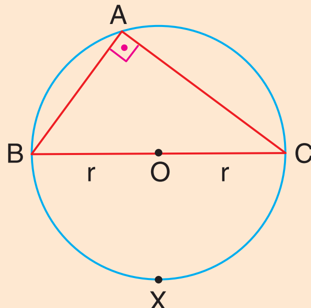


1. Bir çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eştir.

O merkezli şekildeki çemberde $\widehat{BDC}$ ve $\widehat{BAC}$ çevre açıları $\overset{\frown}{BC}$ yayını görmektedir. $\widehat{BOC}$ merkez açısının ölçüsü 2α ise

$m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olur.

2.



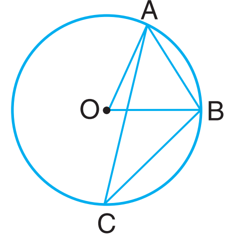
Bir çemberde çapı gören çevre açısının ölçüsü 90° dir.

Şekildeki (O, r) çemberinde $\widehat{BAC}$, çapı gören çevre açısıdır.

$m(\widehat{A}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BXC}) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$ olur.

Uygulayalım:

Sağdaki O merkezli çemberde |AB| = |OA| olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

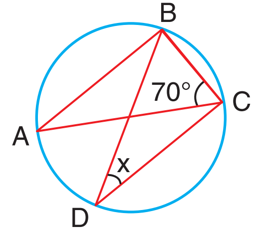
Çemberde |OA| = |OB| = r dir. |AB| = |OA| = r ise AOB üçgeni eşkenar üçgen olup $m(\widehat{O}) = 60°$ bulunur.

$\widehat{ACB}$ ile $\widehat{AOB}$ aynı yayı gören çevre ve merkez açılar olduğundan

$$m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2} = \frac{60°}{2} = 30° \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

Sağdaki AC çaplı çemberde A, B, C ve D noktaları, çemberin üzerindedir. $m(\widehat{ACB}) = 70°$ ise $m(\widehat{BDC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

[AC] çap olduğu için $m(\widehat{ABC}) = 90°$ dir.

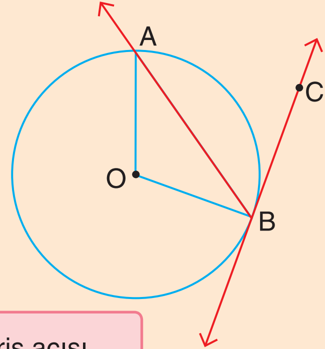
$m(\widehat{BAC}) = 180° – (90° + 70°) = 20°$ dir.

$\widehat{BAC}$ ile $\widehat{BDC}$ aynı yayı gören çevre açılar olduğundan

$m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BAC}) = 20°$ bulunur.

Öğrenelim:

“Bir teğet-kiriş açısının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.” ifadesinin doğruluğunu gösterelim.



Yandaki şekilde O merkez, [AB] kiriş, [BC] teğet ve [OA] ile [OB] yarıçaptır.

İstenen: $m(\widehat{AOB}) = 2.m(\widehat{ABC})$

$\widehat{ABC}$ teğet - kiriş açısı
Verilen

$m(\widehat{OBC}) = 90°$
[OB] yarıçap ve BC teğet olduğundan

$m(\widehat{OBA}) = 90° – m(\widehat{ABC})$
Açı toplama özelliğinden

AOB ikizkenar üçgen
[AO] ve [OB] yarıçap olduğundan

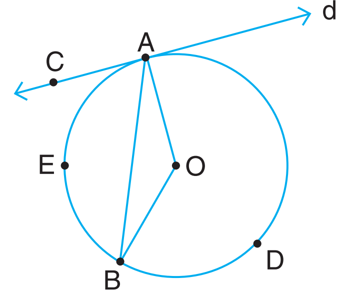
$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO})$
İkizkenar üçgenin taban açılarının eşitliğinden

$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{BAO}) = 180°$
AOB üçgen olduğundan

$m(\widehat{AOB}) = 2.m(\widehat{ABC})$
Yerine koyma ve toplama özelliğinden

Uygulayalım:

Şekildeki O merkezli çemberde d doğrusu, A noktasında çembere teğettir. $C \in d$ ve B, D ve E noktaları çember üzerindedir. $m(\widehat{CAB}) = \alpha + 12°$ ve $m(\widehat{AOB}) = 3\alpha - 42°$ ise $m(\overset{\frown}{ADB})$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

CAB teğet - kiriş açısı ve AOB merkez açı olduğundan

$m(\widehat{AOB}) = 2.m(\widehat{CAB}) \Rightarrow 3\alpha - 42° = 2.(\alpha + 12°)$

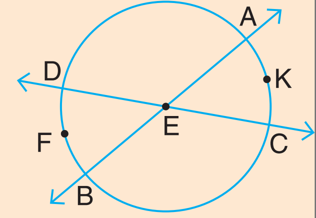
$\Rightarrow 3\alpha - 42° = 2\alpha + 24° \Rightarrow \alpha = 66°$ dir.

$m(\widehat{AOB}) = 3.\alpha - 42° = 3.66° - 42° = 156° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AEB}) = m(\widehat{AOB}) = 156°$ dir.

O hâlde $m(\overset{\frown}{AEB}) + m(\overset{\frown}{ADB}) = 360° \Rightarrow 156° + m(\overset{\frown}{ADB}) = 360° \Rightarrow m(\overset{\frown}{ADB}) = 204°$ bulunur.

Öğrenelim:

"Yandaki şekilde AB ve DC çemberin kesenleridir. Bu durumda $m(\widehat{DEB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DFB}) + m(\overset{\frown}{AKC})}{2}$ dir." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

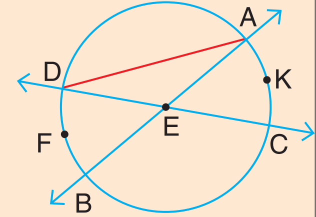


Şekildeki gibi [DA] nı çizelim. DAE üçgeninde $\widehat{DEB}$, $\widehat{DAE}$ ve $\widehat{ADE}$ na komşu olmayan dış açı olduğundan

$m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ADC})$ ① dir. $\widehat{ADC}$, $\overset{\frown}{AKC}$ nı gördüğünden

$\dfrac{m(\overset{\frown}{AKC})}{2} = m(\widehat{ADC})$ ② ve $\widehat{DAB}$, $\overset{\frown}{DFB}$ nı gördüğünden

$\dfrac{m(\overset{\frown}{DFB})}{2} = m(\widehat{DAB})$ ③ dir.



Elde edilen ② ve ③ eşitliği ① eşitliğinde yerine yazılırsa

$m(\widehat{DEB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DFB}) + m(\overset{\frown}{AKC})}{2}$ bulunur.

Uygulayalım:

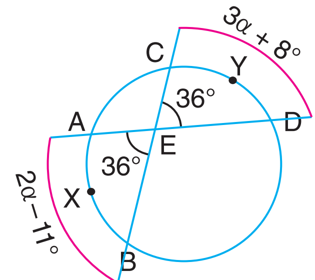
Köşe noktası bir çemberin içinde olan ve 36° ölçüye sahip bir açı, ölçüleri $2\alpha - 11°$ ve $3\alpha + 8°$ lik yayları görmektedir. Buna göre α kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

Verilenlere uygun yandaki şekilde $[AD] \cap [CB] = \{E\}$ olsun.

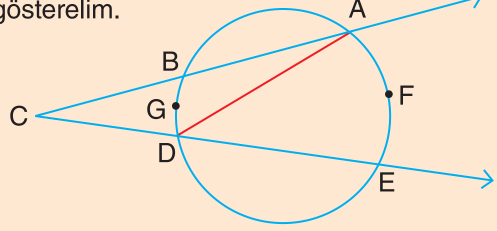
$m(\widehat{AEB}) = 36°$ ve $m(\widehat{AEB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AXB}) + m(\overset{\frown}{CYD})}{2}$ olduğundan

$36° = \dfrac{2\alpha - 11° + 3\alpha + 8°}{2} \Rightarrow 72° = 5\alpha - 3° \Rightarrow \alpha = 15°$ bulunur.



Öğrenelim:

"Köşe noktası bir çemberin dışında ve ışınları çemberi kesen açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısına eşittir." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.



Yandaki şekilde [CA ve [CE, çemberin birer keseni ve [AD] kiriştir.

İstenen: $m(\widehat{ACE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AFE}) - m(\overset{\frown}{BGD})}{2}$

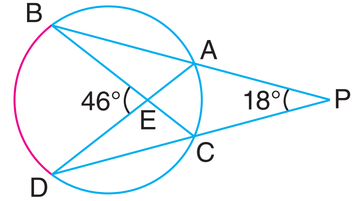
$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ADE}) - m(\widehat{CAD})$	$m(\widehat{CAD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BGD})}{2}$	$m(\widehat{ADE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AFE})}{2}$
ACD üçgeninde dış açı özelliğinden	Çevre açı özelliğinden	Çevre açı özelliğinden

$m(\widehat{ACE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AFE}) - m(\overset{\frown}{BGD})}{2}$

Yerine koyma ve toplama özelliğinden

Uygulayalım:

Yandaki şekilde PB ile PD çemberin kesenleridir. [AD] ve [BC] kirişleri, E noktasında kesişmektedir. $m(\widehat{BED}) = 46°$ ve $m(\widehat{BPD}) = 18°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{BD})$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

BPD açısının köşesi çemberin dışında olduğundan

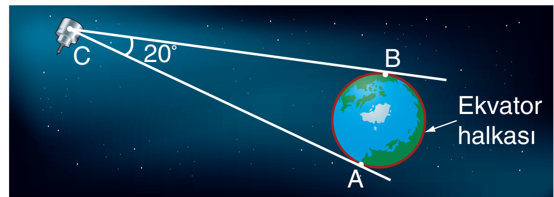
$m(\widehat{BPD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2} \Rightarrow m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{AC}) = 36°$ ① olur.

BED açısının köşesi çemberin içinde olduğundan

$m(\widehat{BED}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{AC})}{2} \Rightarrow m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 92°$ ② olur. ① ve ② denklemlerinin taraf tarafa toplanması ile $2 \cdot m(\overset{\frown}{BD}) = 128°$ ve $m(\overset{\frown}{BD}) = 64°$ bulunur.

Uygulayalım:

Dünya yörüngesinde bulunan C uydusunun Dünya'ya yolladığı sinyallerden [CA ve [CB, Dünya'ya teğet geçmektedir. $m(\widehat{ACB}) = 20°$ olduğuna göre sinyallerin Ekvator halkası üzerinde gördüğü küçük yayın ölçüsü kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

AB küçük yayının ölçüsü a, büyük yayının ölçüsü b olsun. $a + b = 360°$ ① ve $\dfrac{b - a}{2} = 20°$

$\Rightarrow b - a = 40°$ ② olur. ① ve ② denklemlerini taraf tarafa topladığımızda

$2b = 400° \Rightarrow b = 200°$ ve $a = 160°$ bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde [BA ile [BC çembere teğet, E ve D çember üzerindedir. $m(\widehat{ABC}) = 40°$ ise $m(\overarc{ADC})$ nün kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

Şekilde [BA ve [BC teğet olduğundan

$m(\overarc{ADC}) + m(\widehat{ABC}) = 180° \Rightarrow m(\overarc{ADC}) + 40° = 180°$

$\Rightarrow m(\overarc{ADC}) = 140°$ dir. Çemberin tüm yaylarının ölçüleri toplamı 360° olacağından $m(\overarc{AEC}) = 360° - 140° = 220°$ bulunur.

$\widehat{ADC}$, $\overarc{AEC}$ nı gören çevre açı olduğundan $m(\widehat{ADC}) = \dfrac{m(\overarc{AEC})}{2} = \dfrac{220°}{2} = 110°$ bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde DB, çemberin kesenidir. DA keseni, çemberin merkezi olan O noktasından geçmektedir. $|AC| = |CD|$ ve $m(\overarc{BFC}) = 90°$ olduğuna göre $m(\widehat{BCA})$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

Şekilde [AE] çap olduğundan $m(\overarc{AFE}) = 180°$ dir.

$m(\widehat{BDA}) = \alpha$ olsun. $|CA| = |CD|$ olduğundan $m(\widehat{CAD}) = \alpha$ ve dış açı özelliğinden $m(\widehat{BCA}) = 2\alpha$ olur.

Çevre açı özelliğinden $m(\overarc{AXB}) = 4\alpha$ ve $m(\overarc{CYE}) = 2\alpha$ dır. $m(\overarc{AFE}) = m(\overarc{AXB}) + m(\overarc{BFC}) + m(\overarc{CYE})$ ise

$180° = 4\alpha + 90° + 2\alpha \Rightarrow 6\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 15°$ bulunur.

O hâlde $m(\widehat{BCA}) = 2\alpha = 2 . 15° = 30°$ bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde ABC bir eşkenar üçgendir. E üçgenin iç bölgesinde bir nokta; $|AD| = |DC|$ ve $[EB] \perp [EC]$ dir. Buna göre $m(\widehat{DEC})$ kaç derecedir? Bulalım.

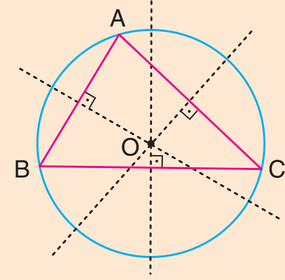
Çözelim:

Bir eşkenar üçgende yükseklikler kenar orta dikmeler üzerinde olacağından ABC eşkenar üçgeninde şekildeki gibi [BD] çizildiğinde $m(\widehat{BDC}) = 90°$ olur. Bu durumda çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olacağından B, E, D ve C noktalarından bir çember geçer. ABC üçgeni eşkenar olduğundan $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABD}) = 30°$ dir.

DBC ve DEC, çizilen çemberde aynı yayı gören çevre açılar olduğu için $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DEC}) = 30°$ bulunur.

Öğrenelim:

Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere o üçgenin **çevrel çemberi** denir. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı **R** ile gösterilir. Bir üçgende çevrel çemberin merkezi, üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişim noktasıdır. Yanda ABC üçgeninin çevrel çemberi çizilmiştir.

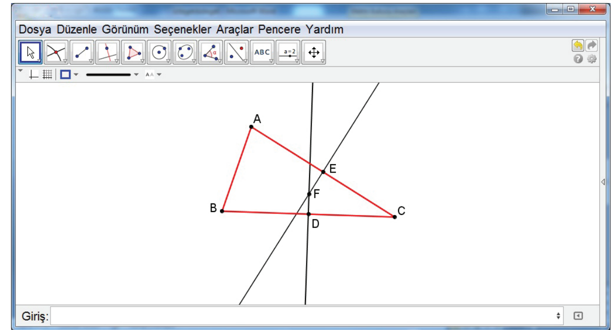


Uygulayalım:

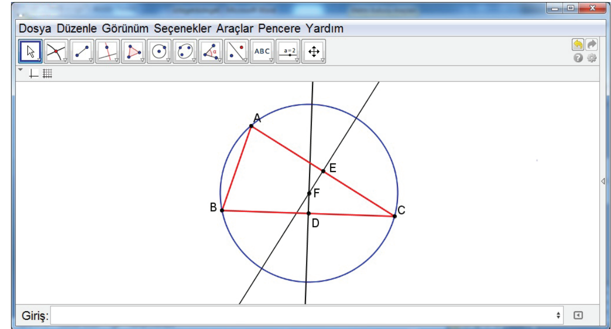
Bir üçgenin çevrel çemberini bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımını kullanarak çizelim.

Çözelim:

1. Adım: Yazılımda Doğru parçası araç çubuğu ile herhangi bir üçgen çizilip üçgenin herhangi iki kenarının orta dikmesi bulalım. Önce Orta nokta veya merkez araç çubuğu ile kenarların orta noktasını bulunur sonra da Dik doğru araç çubuğu ile bu orta noktadan geçen dikme çizilir. Kesiştir araç çubuğu ile de bu kenar orta dikmelerin kesim noktası bulunur. Bu nokta, üçgenin çevrel çemberinin merkezidir. Yandaki üçgende F noktası, çevrel çemberin merkezidir.

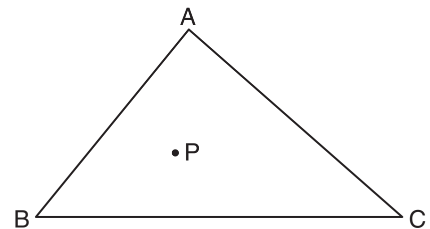


2. Adım: F noktası merkez olmak üzere, üçgenin herhangi bir köşesinden geçen çemberi, Merkez ve bir noktadan geçen çember merkez ve bu noktadan geçen araç çubuğu kullanılarak çizilirse üçgenin çevrel çemberi elde edilir.



Uygulayalım:

Yandaki ABC üçgeninde P noktası, kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır. ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu 4 cm ise P noktasının ABC üçgeninin tüm köşelerine olan uzunluklarının toplamı kaç cm dir? Bulalım.



Çözelim:

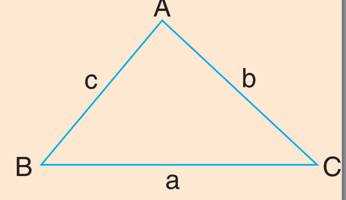
P noktası, ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesişim noktası olduğundan çevrel çemberinin merkezidir. Çevrel çember, üçgenin köşelerinden geçer. Yani A, B ve C noktaları çevrel çemberin üzerindedir. Çemberin merkezinin üzerindeki bir noktaya uzaklığının yarıçap uzunluğu kadar olduğunu biliyoruz. ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu 4 cm olarak veriliyor. $|PA|$, $|PB|$ ve $|PC|$ değerlerinin tümü yarıçap uzunluğu kadar olacağından

$|PA| + |PB| + |PC| = 4 + 4 + 4 = 12$ cm bulunur.

Öğrenelim:

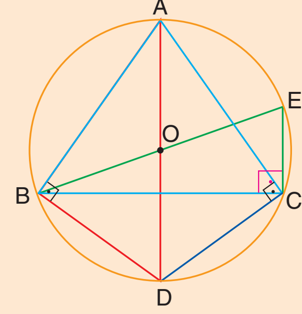
Bir üçgende kenar uzunluğu ile o kenara bakan açının sinüs değeri orantılıdır. Bu ifadeye **sinüs teoremi** denir. Yani bir ABC üçgeninde

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}\widehat{A}} = \frac{b}{\mathrm{Sin}\widehat{B}} = \frac{c}{\mathrm{Sin}\widehat{C}}$$ şeklindedir.



Şimdi sinüs teoremi ile çevrel çemberin yarıçapının ilişkisini inceleyelim.

Yandaki ABC üçgeni dar açılı bir üçgen olsun. ABC üçgeninin çevrel çemberini çizelim ve merkezini O ile adlandıralım. Ardından [AD] ve [BE] çaplarını çizelim. ADB, BEC ve BDC üçgenlerini tamamlayalım. Bir çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olacağından



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BEC})$ $m(\widehat{C}) = m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$ ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$ ① olur.

Bir çemberde çapı gören çevre açı 90° dir.

Buna göre $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ACD}) = 90°$ dir.

O çemberin merkezi olduğuna göre $|BO| = |OE| = |AO| = |OD| = R$ dir.

ABD üçgeninde $\sin(\widehat{ADB}) = \dfrac{|AB|}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{|AB|}{\sin(\widehat{ADB})}$

ACD üçgeninde $\sin(\widehat{ADC}) = \dfrac{|AC|}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{|AC|}{\sin(\widehat{ADC})}$

BCE üçgeninde $\sin(\widehat{BEC}) = \dfrac{|BC|}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{|BC|}{\sin(\widehat{BEC})}$ ② olur.

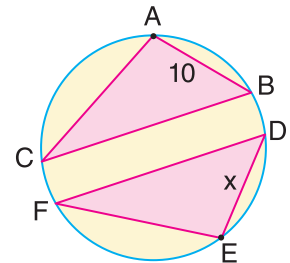
① numaralı eşitliklerin ② numaralı eşitliklerde yerine yazılması ve düzenlenmesiyle

$2R = \dfrac{|AB|}{\sin(\widehat{ACB})} = \dfrac{|AC|}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{|BC|}{\sin(\widehat{BAC})}$ ve $2R = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin\widehat{A}}$ bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde verilen çember, ABC ve DEF üçgenlerinin köşelerinden geçmektedir.

$\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{3}{4}$, $\sin(\widehat{DFE}) = \dfrac{5}{6}$ ve $|AB| = 10$ br olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir? Bulalım.



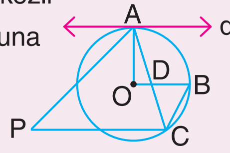
Çözelim:

ABC ve DEF üçgenlerinin çevrel çemberleri eştir. Her iki üçgende sinüs teoremi uygulanıp sonuçlar eşitlenirse

$2R = \dfrac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{|DE|}{\sin\widehat{F}}$ olur. Buradan $\dfrac{10}{\frac{3}{4}} = \dfrac{x}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \dfrac{40}{3} = \dfrac{6x}{5} \Rightarrow x = \dfrac{100}{9}$ br bulunur.

Pekiştirelim:

1. A, B, C noktaları O merkezli çember üzerinde olduğuna göre tüm açı türlerini adlandırınız.

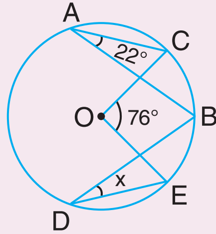


2. Yandaki O merkezli çemberde A, B, C, D ve E noktaları çemberin üzerindedir.

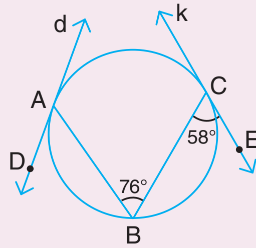
m$(\widehat{CAB})$ = 22° ve

m$(\widehat{COE})$ = 76° ise

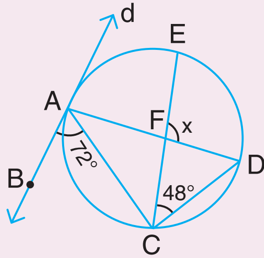
m$(\widehat{BDE})$ = x kaç derecedir?



3. Yandaki çemberin d ve k teğetleri, A ve C noktalarında çembere teğettir. m$(\widehat{ABC})$ = 76° ve m$(\widehat{BCE})$ = 58° ise m$(\widehat{BAD})$ kaç derecedir?



4.

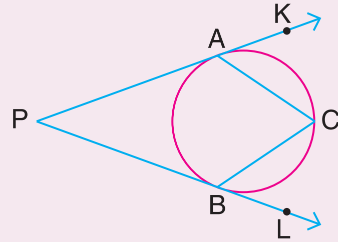


Yukarıdaki d teğeti, çemberi A noktasında kesmektedir. [AD] ∩ [CE] = {F}, m$(\widehat{BAC})$ = 72° ve m$(\widehat{ECD})$ = 48° ise m$(\widehat{EFD})$ = x kaç derecedir?

5. Aynı yayları gören iki çembersel açıdan birinin köşesi çemberin dışında diğerinin köşesi, çemberin içindedir. Bu açıların ölçüleri sırasıyla 76° ve 48° olduğuna göre yayların ölçüleri kaçar derecedir?

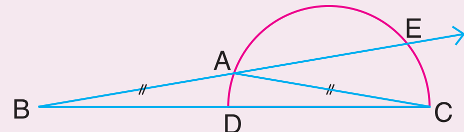
6. Bir ABC üçgeninin kenar orta dikmeleri D noktasında kesişiyor. |DA| + |DB| + |DC| toplamı 36 cm ise ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu kaç cm dir?

7.



Yukarıdaki [PK ile [PL teğet A, B ve C noktaları çemberin üzerindedir. m$(\widehat{KAC})$ = 86° ve m$(\widehat{KPL})$ = 88° ise m$(\widehat{CBL})$ kaç derecedir?

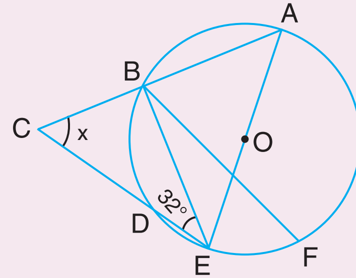
8.



Yukarıda DC çaplı yarım çemberde [BE keseni verilmiştir. |AB| = |AC| ve AE yayının ölçüsü 90° olduğuna göre m$(\widehat{ACB})$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10° B) 15° C) 20° D) 25° E) 30°

9.



Yukarıda O merkezli çemberde A, B, D, E ve F noktaları çemberin üzerindedir.

m$(\widehat{BEC})$ = 32° ise

m$(\widehat{ACE})$ = x aşağıdakilerden hangisidir?

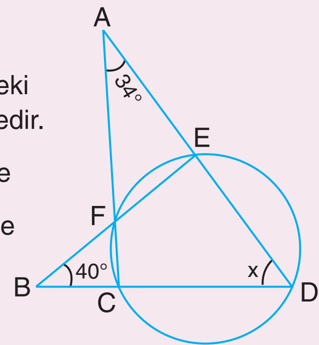
A) 42° B) 46° C) 50° D) 54° E) 58°

10. E, F, C ve D noktaları, şekildeki çember üzerindedir.

m$(\widehat{CAD})$ = 34° ve

m$(\widehat{EBD})$ = 40° ise

m$(\widehat{ADB})$ = x kaç derecedir?



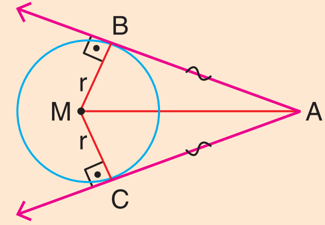
5.3. Çemberde Teğet

İlk kez 1920 Olimpiyatları'nda kullanılan Olimpiyat Bayrağı'nda farklı renklerde beş halka vardır. Bu halkalardan mavi olanı Avrupa, sarı olanı Asya, siyah olanı Afrika, kırmızı olanı Amerika, yeşil olanı Avustralya kıtasını temsil eder. Buradaki her bir çembere kaç tane teğet çizilebilir? Tartışınız.

5.3.1. Çemberde Teğetin Özellikleri

Öğrenelim:

"Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.



Yandaki şekilde M merkezli çemberin AB ve AC teğetleri görülmektedir. [MA], [MB] ve [MC] çizildiğinde ABM ile ACM dik üçgenleri elde edilir. ABM dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa, $|MA|^2 = |BM|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |AB|^2 = |MA|^2 - r^2$ ① ve ACM dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa, $|MA|^2 = |AC|^2 + |MC|^2$

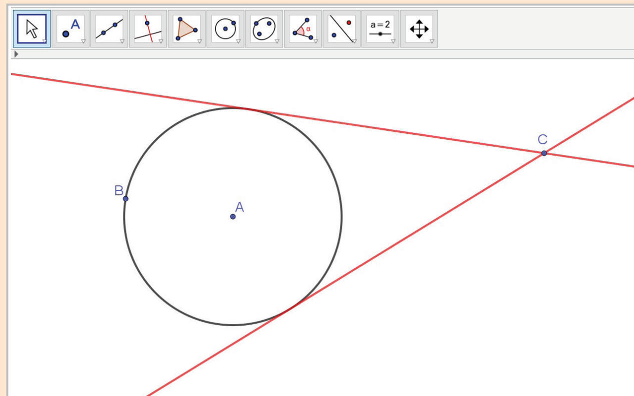
$\Rightarrow |AC|^2 = |MA|^2 - r^2$ ② elde edilir.

① ve ② eşitliğine göre $|AC| = |AB|$ dur.

Bu durumu bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla gösterelim. Bunun için GeoGebra yazılımını kullanalım. Bilgisayarınızda kurulu olan GeoGebra yazılımını açıp aşağıdaki adımları siz de yapabilirsiniz.

1. Adım:

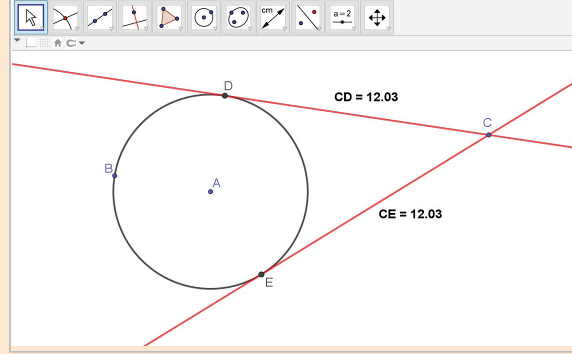
[Merkez ve bir noktadan geçen çember] araç çubuğunu seçelim. Ekranda ilk tıkladığımız A noktası çizeceğimiz çemberin merkezi olsun. İkinci tıkladığımız B noktası çember üzerinde bir nokta olur. |AB| çemberin yarıçapıdır.



Daha sonra [Nokta] araç çubuğu seçilip çemberin dışına tıklanarak ekran görüntüsünde olduğu gibi C noktasını koyalım. [Teğet] araç çubuğu ile de koyulan nokta ve çember tıklanarak bu noktadan çembere teğetler çizilir. Yandaki ekran görüntüsünde C noktasından çembere çizilen teğetler görülmektedir.

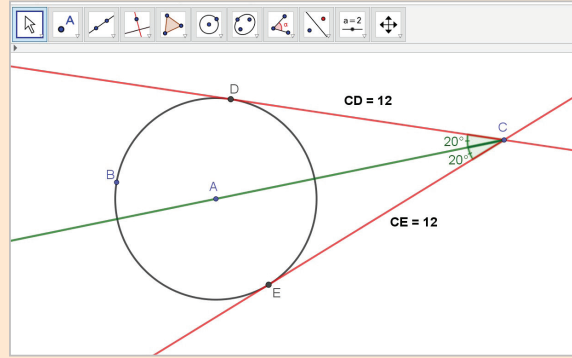
2. Adım:

A merkezli çembere çizilen teğetlerin değme noktalarını bulalım. Bunun için Kesiştir araç çubuğu seçilerek bir teğet doğrusu ve çember tıklanıp seçilen teğet ile çemberin kesişimi bulunur. Aynı işlem diğer teğet için de yapıldığında teğetlerin D ve E değme noktaları bulunur. |CD| nu ve |CE| nu bulmak için Uzaklık veya uzunluk araç çubuğu seçilerek C ve D noktaları tıklanır. Bu durumda |CD| bulunur. Benzer şekilde C ve E noktaları tıklanarak |CE| bulunur. Yandaki ekran görüntüsünden de görüldüğü gibi C noktasının sürüklenmesi ile bu eşitliğin bozulmadığı görülür.



3. Adım:

Son olarak Işın araç çubuğu seçilerek önce C sonra da A noktası tıklanıp [CA nı çizelim. Bu ışının teğetlerle yaptığı açıların ölçülerini bulalım. Bunun için Açı araç çubuğu seçilerek D, C, A noktalarına sırasıyla tıklanır ve DCA açısının ölçüsü bulunur. Benzer şekilde A, C, E noktalarına tıklanarak ACE açısının ölçüsü bulunur. Yandaki ekran görüntüsünden de anlaşılacağı gibi bu açıların ölçüleri biribirine eşittir.



O hâlde [CA, çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğetler arasındaki açının açıortayıdır. Yani bir çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin oluşturduğu açının açıortayı, çemberin merkezinden geçer.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde ABCD kare ve yarım çemberin çapı [AB] dır. [DE], çembere F noktasından teğettir. Çemberin çapı 8 br olduğuna göre |BE| kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olacağından |AD| = |DF| = 8 br olur. |FE| = |EB| = x br ise

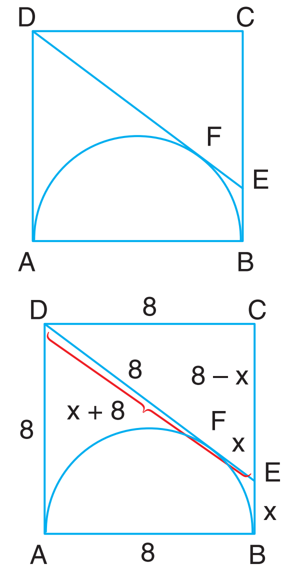
$|CB| = |CE| + |EB| \Rightarrow 8 = |CE| + x \Rightarrow |CE| = (8 - x)$ br dir.

Şekildeki DCE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|DE|^2 = |DC|^2 + |CE|^2 \Rightarrow (x + 8)^2 = (8 - x)^2 + 8^2$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 64 - 16x + x^2 + 64 \Rightarrow x = 2$ br bulunur.

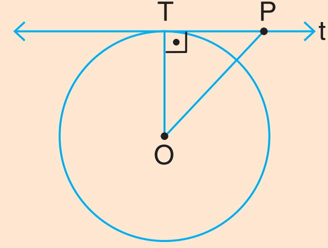
Yani |BE| = 2 br olur.



Öğrenelim:

"Bir çemberin herhangi bir teğetinin değme noktasındaki yarıçapı, teğete diktir." ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

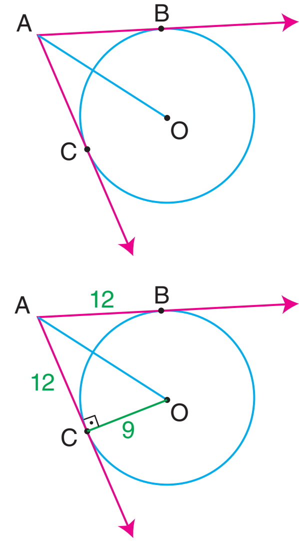
Yandaki şekilde t doğrusu çembere T noktasından teğet ve O merkezdir. t doğrusu O merkezli çembere T noktasında teğet ve [OT] yarıçap olduğundan [OT] ⊥ t olduğunu göstermeliyiz.



[OT] yarıçapının t doğrusuna dik olmadığını varsayalım. Bu durumda O noktasından t noktasına dik olan bir [OP] çizilebilir. OTP dik üçgen ve dik üçgende dik kenar hipotenüsten küçük olacağından |OP| < |OT| ① olur. Diğer taraftan T noktası çemberin üzerinde ve P noktası çemberin dış bölgesinde olduğundan |OT| < |OP| ② olmalıdır. ① ve ② eşitsizliklerinden dolayı bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla başlangıçta varsaydığımız yarıçapın teğet noktasına dik olmaması durumu yanlıştır. O hâlde [OT] ⊥ t olur.

Uygulayalım:

Şekilde O merkezli çemberin dışındaki A noktasından teğetler çiziliyor. Çemberin yarıçapı 9 cm, |AB| = (3x – 3) cm ve |AC| = (x + 7) cm ise |AO| nu bulalım.



Çözelim:

Şekilde O merkezli çembere dışındaki A noktasından teğetler çizildiğine göre |AB| = |AC| dir. O hâlde

3x – 3 = x + 7 ⇒ x = 5 olur.

Yani |AB| = |AC| = 12 cm dir.

Şekilde [OC], yarıçapa karşılık gelir.

[AC çembere teğet olduğundan [OC] ⊥ [AC olmalıdır.

Bu durumda ACO dik üçgeninde Pisagor teoreminden

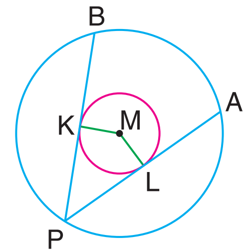
$|AO|^2 = |AC|^2 + |OC|^2$

$|AO|^2 = 9^2 + 12^2$

|AO| = 15 cm bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde çemberlerin merkezleri M noktasıdır. Büyük çemberin PA ve PB kirişleri, küçük çembere L ve K noktalarında teğettir. |PL| = 5 cm olduğuna göre |PA| + |PB| toplamı kaç cm dir? Bulalım.



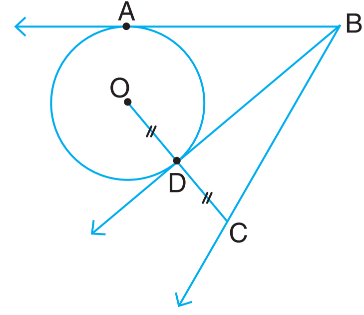
Çözelim:

M merkezli küçük çembere P noktasından çizilen teğet parçaları [PK] ve [PL] olduğundan |PK| = |PL| = 5 cm ve [MK] ⊥ [PB], [ML] ⊥ [PA] dır. M merkezli büyük çembere göre PB kirişine M den çizilen dikme [MK] olduğuna göre

|PK| = |KB| = 5 cm ve PA kirişine M den çizilen dikme [ML] olduğuna göre |PL| = |LA| = 5 cm dir.

O hâlde |PA| + |PB| = 5 + 5 + 5 + 5 = 20 cm dir.

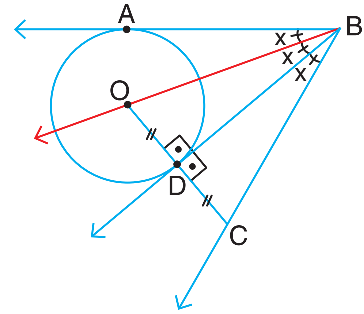
Uygulayalım:



Yandaki O merkezli çemberde A ve D teğetlerin değme noktaları, $|OD| = |DC|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 72°$ dir. Buna göre $m(\widehat{OCB})$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

Şekildeki gibi [BO çizilirse $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{DBO})$ olur. [OD] yarıçap ve [BD teğet olduğundan $[OD] \perp [BD$ dır. $|OD| = |DC|$, $m(\widehat{ODB}) = m(\widehat{CDB}) = 90°$ ve [BD] ortak kenar olduğundan $\widehat{ODB} \cong \widehat{CDB}$ dir. $m(\widehat{DBO}) = m(\widehat{DBC}) = x$ olsun. [BO, $\widehat{ABD}$ nın açıortayı olduğundan $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{OBD}) = x$ tir.



O hâlde $m(\widehat{ABC}) = 3x \Rightarrow 72° = 3x \Rightarrow x = 24°$ bulunur.

BDC üçgeninin açı ölçüleri toplamı 180° olacağından

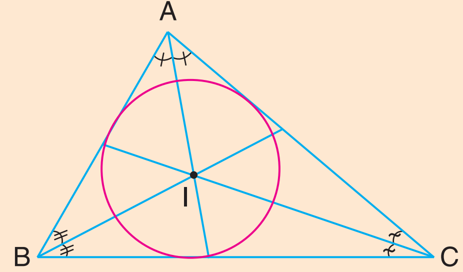
$m(\widehat{BDC}) + m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{DCB}) = 180°$

$\Rightarrow 90° + 24° + m(\widehat{DCB}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{DCB}) = 66°$ bulunur.

Öğrenelim:

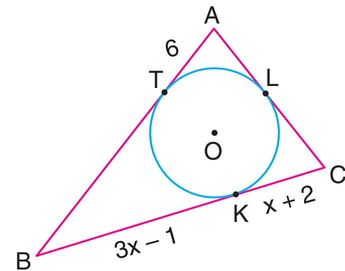
Bir üçgende iç açıortaylar, yandaki gibi bir noktada kesişir. İç açıortayların kesiştiği bu noktaya üçgenin **iç merkezi** denir. Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin iç açıortayları, **I** iç merkez noktasında kesişmiştir.

Bir üçgenin kenarlarına içten teğet olan çemberin merkezi, üçgenin iç merkezidir ve bu çembere üçgenin **iç teğet çemberi** adı verilir.



Uygulayalım:

Yandaki şekilde ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberi çizilmiştir. $|AT| = 6$ cm, $|BK| = (3x - 1)$ cm ve $|KC| = (x + 2)$ cm olup ABC üçgeninin çevresi 38 cm dir. Verilenlere göre $|BC|$ nu bulalım.



Çözelim:

Şekilde O merkezli iç teğet çemberde A çemberin dışındaki bir nokta olup A dan çizilen teğetler için $|AT| = |AL| = 6$ cm olur.

Benzer şekilde $|BT| = |BK| = (3x - 1)$ cm ve

$|KC| = |CL| = (x + 2)$ cm olur.

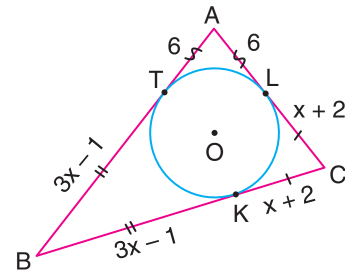
Üçgenin çevre uzunluğu 38 cm verildiğine göre

$2.6 + 2.(3x - 1) + 2.(x + 2) = 38$

$8x + 14 = 38 \Rightarrow x = 3$ bulunur.

Buna göre $|BC| = 3x - 1 + x + 2 = (4x + 1)$ cm olup x = 3 için

$|BC| = 13$ cm elde edilir.



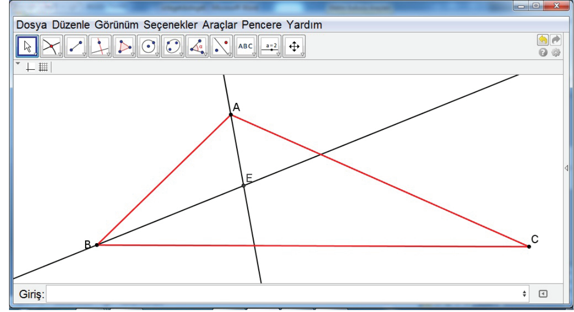
Uygulayalım:

Üçgenin iç teğet çemberini bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımını kullanarak çizelim.

Çözelim:

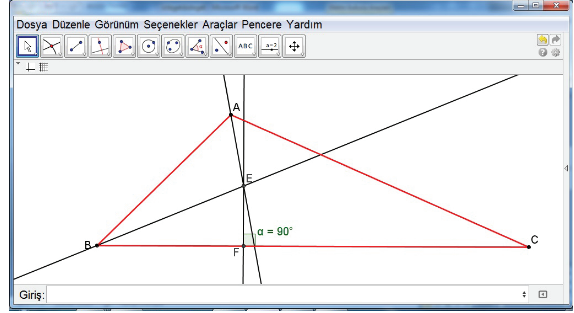
1. Adım:

GeoGebra yazılımında Doğru parçası araç çubuğu ile bir üçgen çizip üçgenin herhangi iki açıortayının kesişim noktası bulunur. Bunun için önce Açı ortay açıortay araç çubuğu seçilir. Sonra da sırasıyla C, B ve A noktalarına tıklandığında $\widehat{B}$ nın açıortayını yazılım çizmiş olur. Bezer şekilde $\widehat{A}$ nın açıortayı çizilir. Daha sonra Kesiştir kesişim araç çubuğu ile bu iki açıortay seçilerek bunların kesim noktaları bulunur. Bu nokta, üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir. Yandaki E noktası, üçgenin iç teğet çemberinin merkezi olan noktadır.

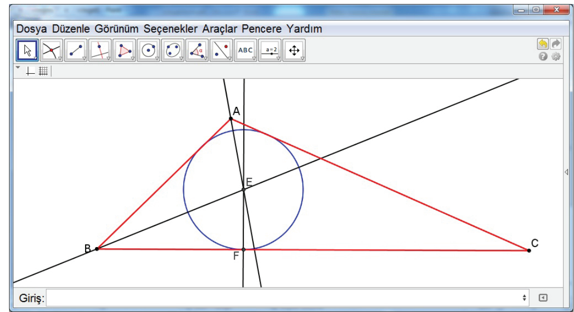


2. Adım:

Üçgenin herhangi bir kenarına E noktasından dikme çizmek için önce Dik doğru dik doğru çizme araç çubuğu seçilir. Sonra da [BC] ve E noktası tıklanarak E noktasından [BC] na dik doğru çizilir. Kesiştir kesişim araç çubuğu ile [BC] ve dik doğrunun kesişimi olan yandaki F noktası bulunur. Bu nokta, iç teğet çemberin geçtiği bir noktadır.



3. Adım: Merkezi E noktası ve geçtiği nokta F olan çember çizildiğinde elde edilen çember, ABC üçgeninin iç teğet çemberidir. Bunun için yazılımda Merkez ve bir noktadan geçen çember merkez ve bir noktadan geçen çember araç çubuğu seçilerek önce E, sonra da F noktası tıklanarak iç teğet çember çizilir.



Uygulayalım:

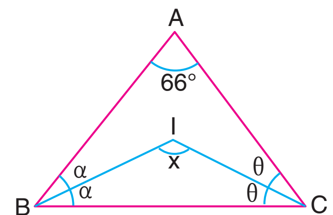
Bir ABC üçgeninde I iç merkezdir. $m(\widehat{A}) = 66^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BIC}) = x$ kaç derecedir? Bulalım.

Çözelim:

Verilenlere uygun olarak çizilen şekil yandaki gibidir. I iç mezkez olduğu için [BI] ve [CI] iç açıortaydır. $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{IBC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACI}) = m(\widehat{ICB}) = \theta$ ise $2\alpha + 2\theta + 66^\circ = 180^\circ$ dir.

$2\alpha + 2\theta = 114^\circ$ ise

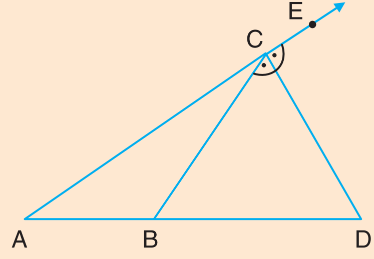
BIC üçgeninde $\alpha + \theta = 57^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$ bulunur.



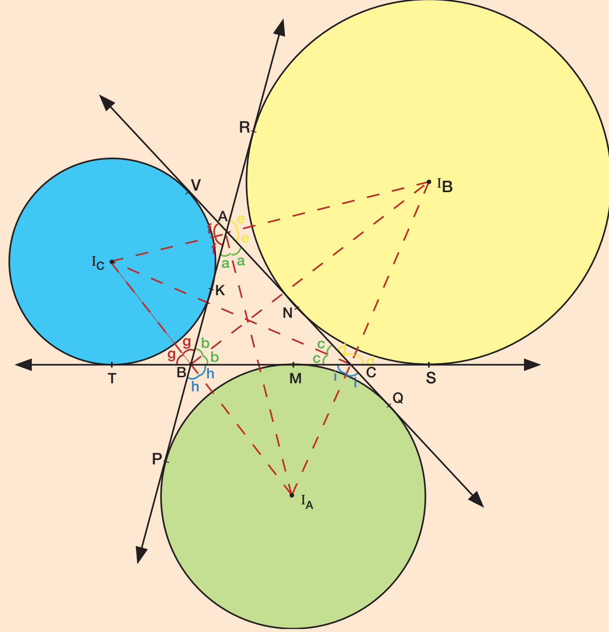
Öğrenelim:

ABC üçgeninde [CD], C nin dış açısını eşit ölçülü iki parçaya ayırmıştır. Bu yüzden dış açıortay olarak adlandırılır.

Bir üçgenin iç ve diğer iki köşeye ait dış açıortaylarının kesim noktasına üçgenin **dış merkezi** denir. Üçgenlerin üç farklı dış merkezi vardır. Bu merkezler, üçgenin bir kenarı ve diğer iki kenarının uzantılarına teğet olan çemberlerin merkezidir. Böyle çemberlere üçgenin **dış teğet çemberleri** adı verilir.

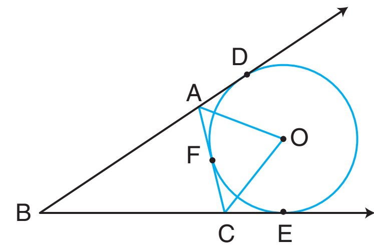


Yandaki şekilde bir ABC üçgeninin tüm dış teğet çemberleri çizilmiştir. I_A, I_B ve I_C noktaları dış merkezlerdir.



Uygulayalım:

Şekilde ABC üçgeninin O merkezli dış teğet çemberi çizilmiştir. D, E ve F çemberin teğetlerinin değme noktalarıdır. |AB| = 12 cm, |BC| = 10 cm ve dış teğet çemberinin yarıçapı 6 cm olduğuna göre A(ABCO) değerini bulalım.



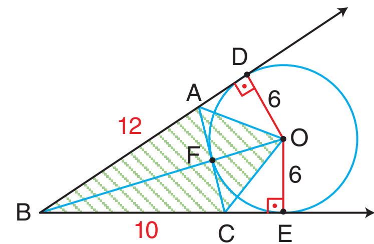
Çözelim:

Dış teğet çemberinin [OD] ve [OE] yarıçaplarını çizdiğimizde [OD] ⊥ [BD ve [OE] ⊥ [BE olur. [BO] nı çizdiğimizde ABCO dörtgeninin alanı iki üçgenin alanına ayrılır.

Yani $A(ABCO) = A(\widehat{ABO}) + A(\widehat{BCO})$ olur. $\widehat{ABD}$ de AB kenarına ait yükseklik [OD], $\widehat{BCO}$ de BC kenarına ait yükseklik [OE] olduğundan

$$A(ABCO) = \frac{|AB|.|OD|}{2} + \frac{|BC|.|OE|}{2}$$

$$= \frac{12.6}{2} + \frac{10.6}{2} = 66 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



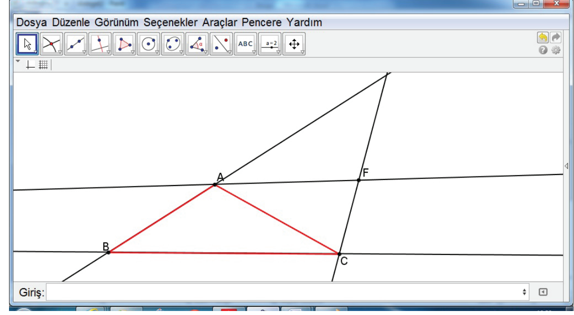
Uygulayalım:

Üçgenin dış teğet çemberini bilgi ve iletişim teknolojilerinden GeoGebra yazılımını kullanarak çizelim.

Çözelim:

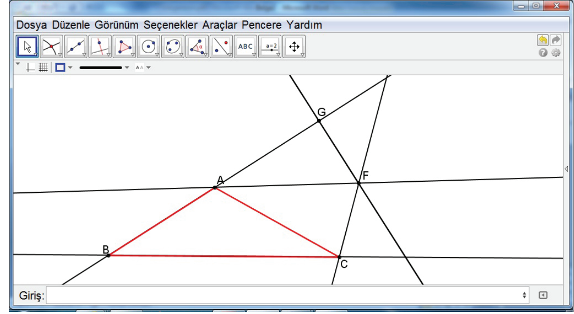
1. Adım:

GeoGebra yazılımında Doğru parçası araç çubuğu kullanılarak bir üçgen çizilir. Üçgenin herhangi iki dış açısının açıortayı Açı ortay araç çubuğu ile çizilip açıortayların kesim noktası Kesiştir kesişim araç çubuğu ile bulunur. Bu nokta, dış teğet çemberin merkezidir. Yanda F noktası, dış teğet çemberin merkezi olan noktadır.



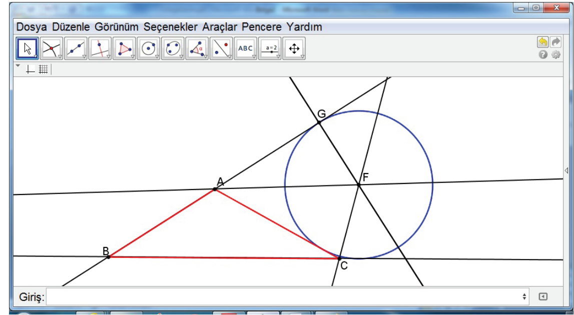
2. Adım:

Üçgenin herhangi bir kenarının uzantısına F noktasından Dik doğru araç çubuğu ile dikme çizilip dış teğet çemberin geçtiği nokta Paralel doğru araç çubuğu ile bulunur. Bu nokta, yandaki fotoğrafta görülen G noktasıdır.

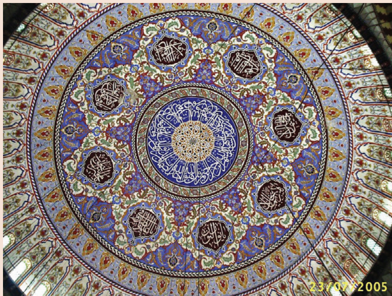


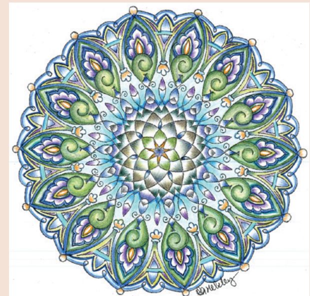
3. Adım:

Merkezi F noktası ve geçtiği nokta G olan çember Merkez ve bir noktadan geçen çember merkez ve bir noktadan geçen çember araç çubuğu kullanılarak çizilir. Elde edilen çember, ABC üçgeninin dış teğet çemberlerinden biridir.



Tanıyalım:





Mandala, esin kaynağı doğa olan geometrik desenlerin kullanıldığı bir Hint süsleme sanatıdır. Sanskritçe kökenli bir sözcüktür. Manda, (enerji, öz) ve la (kap) anlamını taşıyan sözcüklerin birleşmesiyle oluşturulmuştur. Mandala desenleri, belirli bir düzen içerisinde tekrar eden çizim ya da şekillerden oluşur. Desenler, merkezden başlayıp dışarı doğru dairesel olarak devam eden bir örüntü izler. Mandala desenlerine benzer desenler pek çok yerde karşımıza çıkar. Çini desenli tabakalarda, camilerin kubbelerinde, annelerimizin ördüğü dantellerde ... (Geçmiş, 2017, s. 22 - 25).

Uygulayalım:

Kenar uzunlukları 20 br, 21 br ve 29 br olan bir üçgende iç teğet çemberin merkezi ile çevrel çemberin merkezi arasındaki uzaklığın kaç br olacağını bulalım.

Çözelim:

Kenar uzunlukları 20 br, 21 br ve 29 br olan üçgen dik üçgendir. Çünkü $29^2 = 20^2 + 21^2$ eşitliği sağlanır.

O hâlde A dik açı olmak üzere $|AB| = 21$ br, $|AC| = 20$ br ve $|BC| = 29$ br olan yandaki gibi bir ABC üçgeni çizelim. Üçgenin iç teğet çemberi şekilde O_1 merkezli çember olup D, E ve F noktalarında üçgen ile teğettir. $|AD| = x$ dersek $|AD| = |AE| = x$ olur.

Burada $|BD| = |BF| = 21 - x$, $|EC| = |FC| = 20 - x$ olur.

$|BC| = 29$ br olduğundan

$29 = 21 - x + 20 - x \Rightarrow x = 6$ br bulunur.

Şekilde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ olduğundan

$|AE| = |O_1E| = |O_1D| = |AD| = 6$ br olur.

Yani iç teğet çemberin yarıçap uzunluğu 6 br bulunur.

ABC üçgeninin çevrel çemberi çizildiğinde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ olup çapı gören açı 90° olduğundan çizilen çevrel çemberin çapı [BC] olur. [BC] üzerinde çevrel çemberin merkezi olan O_2 seçildiğinde $|BC| = 29$ br olduğundan $|O_2C| = \frac{29}{2}$ br bulunur. Buradan

$|O_2F| = |O_2C| - |FC| \Rightarrow |O_2F| = \frac{29}{2} - 14 = \frac{1}{2}$ br bulunur.

O hâlde O_1O_2F dik üçgeninden

$|O_1O_2|^2 = |O_2F|^2 + |O_1F|^2 \Rightarrow |O_1O_2|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2 = \frac{145}{4}$

$\Rightarrow |O_1O_2| \cong 6{,}02$ br elde edilir.

Düşünelim:

Dik kenar uzunlukları 3 ve 4 br olan bir ABC üçgeninin

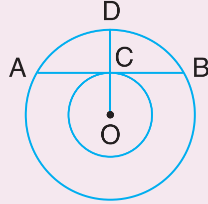
a. İç teğet çemberinin yarıçap uzunluğunu,

b. Çevrel çemberin yarıçap uzunluğunu,

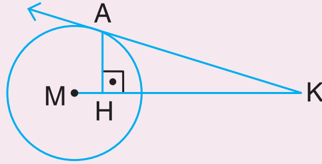
c. Dış teğet çemberlerinin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

Pekiştirelim:

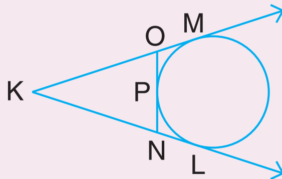
1. M, bir çemberin merkezi; T, çemberin dışında bir nokta ve A, T noktasında çizilen teğetin değme noktası olduğuna göre $m(\widehat{MAT})$ kaç derecedir?

2. 

Yukarıdaki O merkezli iki çemberden büyük olanın AB kirişi, C noktasında küçük çembere teğettir. |AB| = 6 br ve |DC| = 1 br olduğuna göre büyük çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir?

3. 

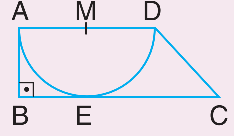
Yukarıdaki şekilde M noktası çemberin merkezi, [KA çembere A noktasında teğet, [AH] ⊥ [KM], |MH| = 4 br ve |HK| = 12 br olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir?

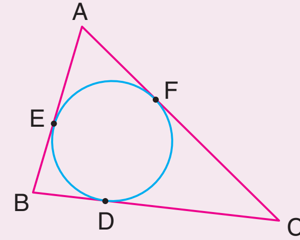
4. 

Yukarıdaki şekilde [KM çembere M noktasında, [KL çembere L noktasında, [ON] çembere P noktasında teğet ve $Ç(\widehat{KON})$ = 14 br olduğuna göre |KL| kaç br dir?

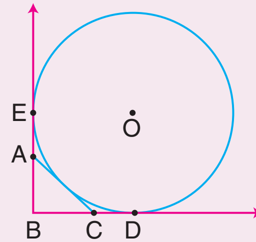
5. Herhangi bir üçgenin bir dış teğet çemberini pergel ve cetvel yardımıyla oluşturunuz.

6. Yandaki ABCD dik yamuğunun AD kenarı, M merkezli yarım çemberin çapıdır. [CB], çembere E noktasında teğettir. |DC| = 10 br ve |AB| = 8 br olduğuna göre A(ABCD) kaç br^2 dir?



7. 

Yukarıdaki şekilde ABC iç teğet çemberi çizilmiştir. |AF| = 9 cm, |AC| = 20 cm ve |BC| = 16 cm olduğuna göre |BE| kaç cm dir?

8. 

Yukarıdaki şekilde O merkezli çember ABC üçgeninin dış teğet çemberidir.

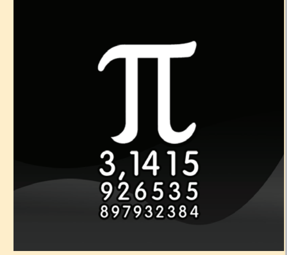
|AB| = 3 br, |BC| = 4 br ve |AC| = 5 br olduğuna göre dış teğet çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

9. Herhangi bir üçgen çizip bu üçgenin iç teğet çemberini pergel ve cetvel yardımıyla oluşturunuz.

10. Dik kenar uzunluğu 6 ve 8 cm olan dik üçgenin çevrel çemberi ile teğet çemberinin merkezi arasındaki uzaklık kaç cm dir?

5.4. Dairenin Çevresi ve Alanı

π sembolü, Yunan alfabesinin 16. harfidir. Bu harf aynı zamanda Yunanca çevre anlamına gelen perimetier (perimetır) sözcüğünün de ilk harfidir. İsviçreli matematikçi Leonard Euler (Leonard Öyler), 1737 yılında yayımladığı bir eserinde dairenin çevresinin uzunluğunun çap uzunluğuna oranından elde edilen sabit oranı π sembolü ile göstermiştir. π sayısı, yaklaşık 3,14 olarak alınır. Günümüzde bilgisayar yardımıyla π sayısının virgülden sonraki milyarlarca basamağı bulunmuştur. Dünyada mart ayının 14. günü **pi günü** olarak kutlanır (Dönmez, 2005: VI. cilt, 22, 206).



5.4.1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

Keşfedelim:

Araç ve gereçler: ip, cetvel, açıölçer ve pergel

1. Defterinize farklı büyüklükte çemberler çizip bu çemberlerin çap uzunluklarını ölçünüz.

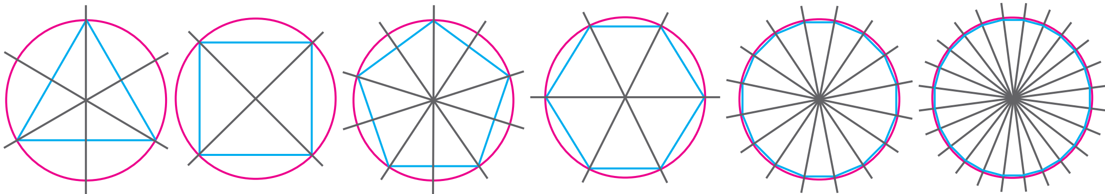
2. İp ve cetvel yardımıyla çemberlerin çevre uzunluklarını ölçünüz.

3. Çizdiğiniz her bir çember için çevre uzunluğu ve çap uzunluğu oranını hesaplayınız. Bulduğunuz oranları karşılaştırarak, dairenin çevre uzunluğu ve çap uzunluğu oranının sabit olup olmadığına karar veriniz. Sonucu yorumlayınız.

4. Dairenin çevre uzunluğunun bulunması için nasıl bir yöntem kullanılması gerektiğini tartışınız.

5. Çizdiğiniz çemberlerin üzerinde belirlediğiniz bir açı değerine karşılık gelen yayın uzunluğunu ölçünüz.

6. Her bir çember için $\frac{\text{yay uzunluğu}}{\text{çevre uzunluğu}}$ değerini hesaplayınız. Bu değerin değişip değişmediğine karar veriniz. Bulduğunuz oranı $\frac{\text{yayın açı ölçüsü}}{360°}$ oranı ile karşılaştırınız. Belli bir açı değerine sahip çember yayının uzunluğunun nasıl bulunacağını tartışınız.

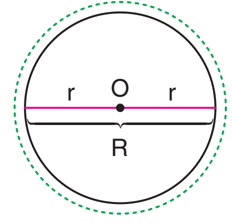


7. Yukarıda verilen düzgün çokgenlerin alanlarının nasıl hesaplanacağını ve bunlardan hangisinin alanının içinde bulunduğu dairenin alanına daha yakın bir sonuç vereceğini saptayınız.

8. Çokgenlerin kenar sayısını arttırdıkça, çokgenlerin çevre uzunlukları toplamının dairenin çevre uzunluğuna yaklaşıp yaklaşmadığını tartışınız. Ayrıca çokgenin merkezinden kenara indirilen dikmenin uzunluğunun dairenin yarıçap uzunluğuna yaklaşıp yaklaşmadığına karar veriniz.

▶ Düzgün çokgenlerin alanını bulmak için kullanılan $\frac{Ç.h}{2}$ (Ç: çevre uzunluğu, h: merkezden kenara indirilen dikme uzunluğu) formülünü ve etkinliğin 8. adımında elde ettiğiniz sonuçları kullanarak daire için bir alan formülü oluşturunuz.

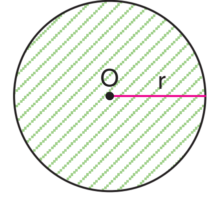
Hatırlayalım:



Tüm çemberlerde çemberin çevre uzunluğunun çapına oranı, sabit bir değere karşılık gelir. Bu sabit sayıya pi denir ve π sembolü ile gösterilir. Çemberin çevre uzunluğunu Ç ve çapını R ile gösterirsek

$\pi = \frac{Ç}{R}$ ile bulunur.

Bu sayı, $\pi = 3,1415926535897932...$ biçiminde devam eden, ondalık kısmı düzenli olmayan bir gerçek sayıdır. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla π sayısı 3,14 ya da $\frac{22}{7}$ veya 3 olarak alınabilmektedir. Buradan çemberin çevre uzunluğu elde edilir.



$\pi = \frac{Ç}{R} \Rightarrow Ç = \pi.R$ olur. $R = 2r$ olduğundan $Ç = 2\pi r$ olarak bulunur.

Çemberin kendisi ve iç bölgesini oluşturan noktalar kümesine daire denir. Dairenin alanı da $A = \pi.r^2$ bağıntısı ile bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki gibi bir tekerleğin yarıçapı 29,2 cm dir. Bisikletin tekerleği 100 tam tur atarsa bisikletin kaç m yol almış olacağını bulalım.
($\pi \cong 3,14$ alalım.)

Çözelim:

Bisikletin tekerleğinin tam bir tur atması, tekerleğin çevresi kadardır. $r = 29,2$ cm olduğuna göre

$Ç = 2\pi r \Rightarrow Ç = 2 . 3,14 . 29,2$

$Ç = 183,376$ cm olur.

Tekerlek 100 tam tur attığından bisiklet,
$100 . 183,376 = 18337,6$ cm yol alır.

Yani 18337,6 cm = 183,376 m yol almış olur.

Uygulayalım:

Eğitim - öğretimin insan hayatındaki önemini çok iyi bilen Ayşe Başak öğretmen, Darüşşafaka Cemiyetine bağışta bulunmak istemektedir. Bunun için bilezikler yapacak ve bunların satışından kazanacağı parayı Darüşşafaka Cemiyetine bağışlayacaktır. Bileziğin çapı, 16 cm dir. İçindeki çember şeklindeki zincirin çevresi ise kırmızı bocuklu bileziğin çevresinden 3 cm kısadır. Buna göre zincirin yarıçapının kaç cm olduğunu bulalım.
($\pi \cong 3$ alalım.)

Çözelim:

Boncuklu bileziğin çapı R = 16 cm ise

$Ç = 3 . 16 = 48$ cm bulunur. Bu durumda zincirin çevresi

$Ç = 48 - 3 = 45$ cm olur.

Buna göre zincirin yarıçapı

$Ç = 2\pi r \Rightarrow 45 = 2 . 3 . r \Rightarrow r = 7,5$ cm bulunur.

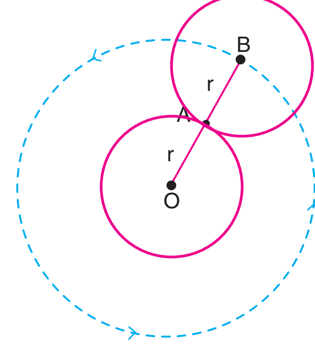
Uygulayalım:

Türkiye Cumhuriyeti'nin resmi para birimi Türk lirasıdır. Para birimi bir ülkeyi, milleti temsil eder ve değerlidir. Bunun için kullanılan paralara zarar vermek, ülke ekonomisi için olumsuz bir durum teşkil eder. Kullandığınız her paranın belirli ölçülerde ve belirli bir tasarımla planlanması ve basılması ülkemizde Darphane ve Damga Matbaası Müdürlüğü tarafından yapılmaktadır. İşte en son 01.01.2009 tarihinden itibaren tedavüle giren metal paralardan 1 Türk lirasının çapı 2,615 cm dir.

Yanda bu paralardan 2 tanesi verilmiştir. Yazı durumunda olan para yere sabit olup tura durumunda olan para diğerine sadece A noktasında değmektedir. Verilenlere göre tura durumundaki madenî 1 lira kaymadan yuvarlanarak yazı durumundaki madenî paranın etrafında 1 tam tur yapıp A noktasına tekrar geldiği ana kadar merkezinin kaç cm yol alacağını bulalım ($\pi \cong 3$ alalım.).

Çözelim:

Verilen problemi yandaki gibi modelleyelim. Madenî paraların yarıçapları r olsun. Yandaki şekilde görüldüğü gibi tura durumundaki madenî paranın merkezi B olsun. B noktasının bu hareket boyunca izlediği yol. O merkezli ve 2r yarıçaplı bir çemberin çevresidir. Bu çemberin çevre uzunluğu istenen yanıttır.



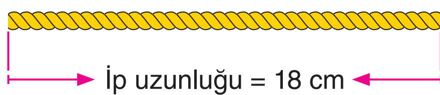
$Ç = 2\pi 2r = 4\pi r = 4.3.2,615$

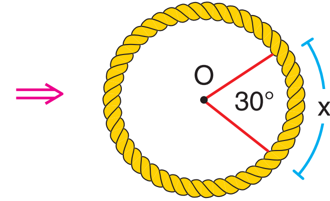
$= 31,38$ cm bulunur.

Uygulayalım:

18 cm uzunluğundaki bir ip parçası ile oluşturulan çemberde 30° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu kaç cm olur? Bulalım.

Çözelim:





Problemin akış diyagramı, yukarıda verildiği gibidir.

x ile gösterilen yayın uzunluğunu bulmak için orantı kullanalım.

360° lik açıya ⟷ 18 cm lik uzunluk
30° lik açıya ⟷ x cm lik uzunluk

D.O. $360°.x = 30°.18$

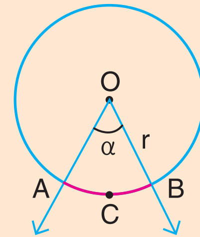
x = 1,5 bulunur. Yani aranan yayın uzunluğu 1,5 cm dir.

Öğrenelim:

Yandaki şekilde O merkezli, r yarıçaplı çemberde AOB merkez açısının gördüğü yay $\overset{\frown}{ACB}$ dir. Bu çember yayının uzunluğu,

$$\frac{|\overset{\frown}{ACB}|}{2.\pi.r} = \frac{m(\widehat{AOB})}{360°}$$ veya

$$|\overset{\frown}{ACB}| = 2.\pi.r.\frac{\alpha}{360°}$$ bağıntısıyla bulunur.

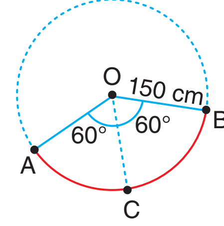


Uygulayalım:

Bir salıncakta sırayla sallanan Kerem ve Cemre birbirlerini sallayarak birbirine yardım etmektedirler. Kerem, Cemre'yi salıncağın sabit durduğu durumdan 60° geriye çekip 60° ileriye ölçülü açı ile sallamaya başlar. Salıncağın bağlandığı zincirin uzunluğu 150 cm ise salıncağın bir geri, bir ileri hareketi sonucunda kaç cm hareket ettiğini bulalım ($\pi \cong 3$ alalım.).

Çözelim:

Salıncağın bağlı olduğu zincirin uzunluğu yarıçap olacak şekilde salıncağın tam bir turu, çember hareketidir. Burada salıncak, 60° geri ve ileri hareket eder. Buna göre yandaki şekildeki gibi 120° lik merkez açının gördüğü yay uzunluğunu bulmamız gerekir. Şekle göre



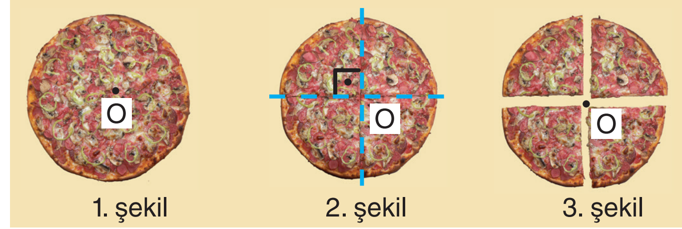
$$|\overset{\frown}{ACB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360} \Rightarrow |\overset{\frown}{ACB}| = 2.3.150 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$|\overset{\frown}{ACB}| = 300 \text{ cm bulunur.}$$

O hâlde bir geri, bir ileri hareketi sonunda salıncağın ucu 300 cm hareket eder.

Uygulayalım:

Sağ tarafta verilen daire biçimli O merkezli 1. şekildeki pizza; 2. şekilde 4 eş parçaya bölünmüş, 3. şekilde ise bu parçalar birbirinden ayrılmıştır. Verilenlere göre 1. şeklin çevresinin 3. şekildeki tüm pizza dilimlerinin çevreleri toplamına oranı kaçtır? Bulalım.



Çözelim:

1. şekildeki O merkezli dairenin yarıçapı r ise çevresi $2.\pi.r$ dir. Bu değer, 1. şeklin çevresidir.

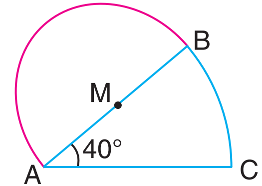
3. şekilde yer alan 1 pizza diliminin çevresi $2.\pi + \frac{\pi.r}{2}$ dir. 4 tane pizza dilimi olduğu için

3. şeklin tüm çevre toplamı $= 4.\left(2.r + \frac{\pi.r}{2}\right) = 8r + 2.\pi.r$ dir.

$$\frac{\text{1. şeklin çevresi}}{\text{3. şeklin çevresi}} = \frac{2.\pi.r}{8.r + 2.\pi.r} = \frac{2.\pi}{8 + 2.\pi} = \frac{\pi}{4 + \pi}$$ olarak bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde M merkezli yarım daire ve A merkezli 40° lik daire dilimi görülmektedir. |MB| = 18 cm ise şeklin çevresi kaç cm dir? Bulalım.



Çözelim:

|MA| = |MB| = 18 cm olduğundan |AB| = |AC| = 36 cm dir.

$$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2.\pi.18 = 18\pi \text{ cm dir.}$$

$$|\overset{\frown}{BC}| = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 2.\pi.36 = 8\pi \text{ cm dir.}$$

Şeklin çevresi $= |\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{BC}| + |CA| = 18\pi + 8\pi + 36 = (26\pi + 36)$ cm bulunur.

Keşfedelim:

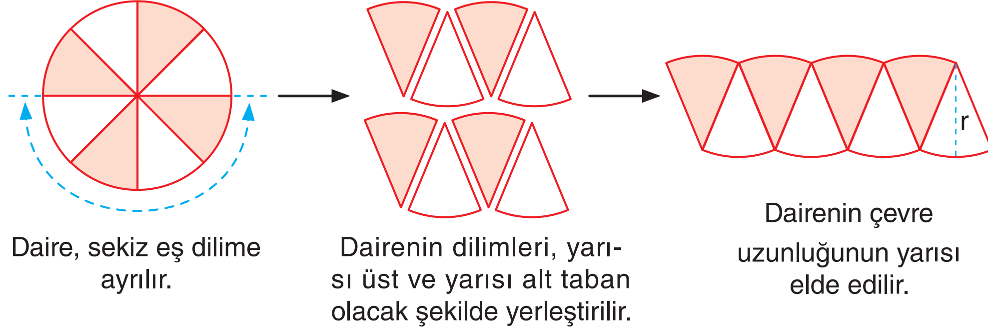
Araç ve gereçler: karton, makas ve pergel

Aşağıdaki etkinlik adımlarını izleyip soruları yanıtlayınız.

1. Kartondan yarıçap uzunlukları r birim olan 3 eş daire kesiniz.

2. Birinci daireyi 4, ikinci daireyi 8, üçüncü daireyi 16 eş dilime ayırınız. Her birinden elde ettiğiniz dilimlerin yarısını (birinci dairede 2, ikinci dairede 4, üçüncü dairede 8 tanesini) boyayınız.

3. Her bir dairenin dilimlerini, yarısı üst ve yarısı alt taban olacak şekilde yan yana yerleştiriniz. Aşağıda 8 eş dilime ayrılan ikinci daireyle ilgili etkinlik adımları görülmektedir. İnceleyiniz.



Daire, sekiz eş dilime ayrılır.

Dairenin dilimleri, yarısı üst ve yarısı alt taban olacak şekilde yerleştirilir.

Dairenin çevre uzunluğunun yarısı elde edilir.

4. Dilim sayısı arttıkça şekil hangi dörtgene benzemektedir? Tartışınız. Dilim sayılarının 32, 64, 128 gibi olduğunu düşününüz.

5. Paralelkenarın alanından faydalanarak dairenin alan bağıntısını bulmaya çalışınız.

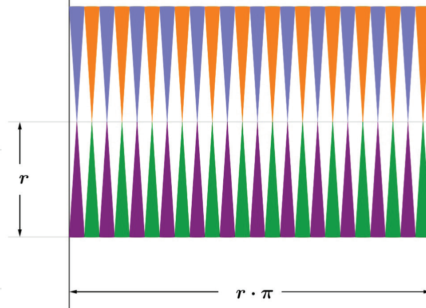
▶ Etkinlik adımlarını inceleyip sonuçları yorumlayınız. “Dairenin alanı, üçgenlerin alanından yararlanılarak bulunabilir mi?" sorusunun yanıtını tartışınız.

Öğrenelim:

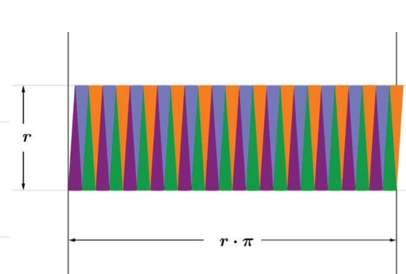
Dairenin alanının nasıl bulunduğunu inceleyelim. Bunun için bir daireyi eş 48 parçaya aşağıdaki gibi ayıralım. Bu eş 48 parçanın farklı dizilişlerini aşağıda adım adım görelim.

1. Adım:

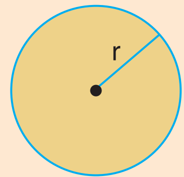
2. Adım:



3. Adım:



Son adımda da görüldüğü gibi dairenin alanı eş 48 parçaya ayrıldığından elde edilen alan dikdörtgenin alanına yaklaşmaktadır. Daireyi daha çok eş parçaya ayırdığımızda dikdörtgenin uzun kenarı dairenin çevresinin yarısı yani πr, kısa kenarı da r kadar olacaktır. Bu durumda yarıçap uzunluğu r olan bir dairenin alanı



$A = \pi r . r = \pi r^2$ ile elde edilir.

Uygulayalım:

Yandaki gibi daire şeklinde bir alan yeşillendirilecektir. Çapı 7 m olan dairenin alanını bulalım ($\pi \cong 3{,}14$ alalım.).

Çözelim:

Yeşillendirilecek olan alanın çapı R = 7 m ise

yarıçapı, $R = 2r \Rightarrow r = 3{,}5$ m olur.

O hâlde yeşillendirilecek alan,

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14.(3{,}5)^2 = 38{,}465\ m^2$ dir.

Uygulayalım:

Bir firma yüzünün alanı 3850 cm^2 olan rögar kapağı üretecektir. Bu kapakları yerleştirmek için en az kaç cm lik yarıçapa sahip dairelerin açılması gerektiğini bulalım ($\pi \cong \frac{22}{7}$ alalım.).

Çözelim:

Daire şeklindeki rögar kapağının alanı 3850 cm^2 ise yarıçapını bulabiliriz.

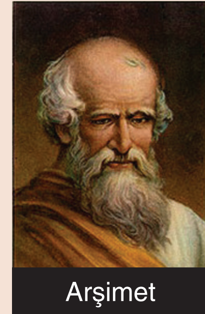
$A = \pi r^2 \Rightarrow 3850 = \frac{22}{7} \cdot r^2$

$r^2 = 1225 \Rightarrow r = 35$ cm bulunur.

O hâlde üretilecek kapaklar için en az yarıçapı 35 cm olan dairelerin açılması gerekmektedir.

Tanıyalım:

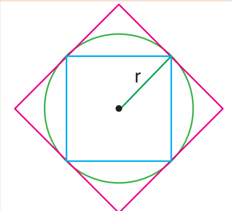
Archimedes (MÖ 287 - 212)

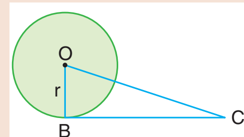

Arşimet

Archimedes (Arşimet), Sicilya Ada'sının Siraküza şehrinde doğmuştur. Arşimet'in bilimsel zakasını çok erken ve zamanında fark eden astronom babası kendi bilgisiyle ona yol gösterici olmuştur.

Archimedes, pi (π) sayısını kendi adıyla anılan yöntemle aşağıdaki gibi tahmin etmiştir.

Çemberin yarıçapı r olmak üzere karelerin çevresi ile çemberin çevresi karşılaştırıldığında $4\sqrt{2}r < 2\pi r < 8r$ eşitsizliği elde edilir. Yani pi sayısı $2\sqrt{2} < \pi < 4$ aralığında kalır. Bu yöntem diğer düzgün çokgenler için tekrarlandığında aralık gittikçe daralarak pi değerine yaklaşılacaktır. Archimedes, bahsedilen yöntemde düzgün çokgen olarak 96 kenarlı çokgeni kullanıp $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ aralığını bularak pi değerini daha yakın tahmin edebilmiştir. Archimedes, dairenin alanını yandaki şekilde olduğu gibi tabanı çemberin çevre uzunluğuna eşit dik üçgenden hareketle çevre uzunluğunun yarıçapın yarısı ile çarpımı olarak tanımlamıştır (Baki, 2014, s. 49).

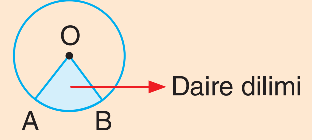




$A(\overset{\frown}{OBC}) = \frac{1}{2} r . 2\pi r = \pi r^2$

Öğrenelim:

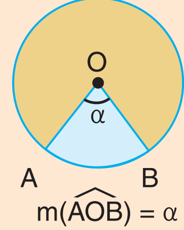
Bir dairede herhangi bir merkez açının iç bölgesi **daire dilimi** olarak adlandırılır. Sağdaki şekli inceleyiniz. Şekildeki taralı bölge bir daire dilimidir.



O merkezli r yarıçaplı şekildeki gibi bir dairede AOB merkez açısının içinde kalan daire diliminin alanını bulmak için

$\frac{\text{daire diliminin alanı}}{\text{dairenin alanı}} = \frac{m(\widehat{AOB})}{360^\circ}$ orantısından yararlanılır.

Buradan daire diliminin alanı, $\pi . r^2 . \frac{\alpha}{360^\circ}$ eşitliğiyle bulunur.



Uygulayalım:

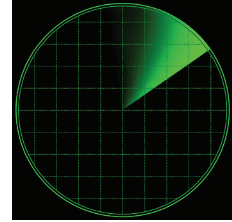
Bir daire, 72° merkez açıya sahip kaç eş daire diliminin birleşmesinden oluşur? Bulalım.

Çözelim:

Dairenin merkezindeki merkez açıların toplamı 360° dir. $\frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$ olduğundan daire 5 tane eş daire diliminin birleşmesinden elde edilir.

Uygulayalım:

Yandaki fotoğraftaki gibi 10 cm uzunluğundaki bir radardaki ibre ekrandaki 30 cm² lik alanı taramaktadır. Buna göre ibrenin en fazla kaç derece açı yaptığını bulalım ($\pi \cong 3$ alalım.).

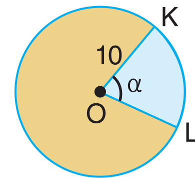


Çözelim:

Radar ibresinin taradığı alanı yandaki gibi gösterelim. Merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı 30 cm² olarak verildiğine göre

$\frac{\text{Daire diliminin alanı}}{\text{Daire alanı}} = \frac{m(\widehat{KOL})}{360^\circ}$ ilişkisinden

$\frac{30}{3.10^2} = \frac{m(\widehat{KOL})}{360^\circ} \Rightarrow m(\widehat{KOL}) = 36^\circ$ olmalıdır.



Uygulayalım:

Bir saat kulesindeki saatin akrebinin uzunluğu 1,2 m dir. Bu akrebin uç noktası, 150 dakikada kaç m lik bir yay çizer? Bulalım.

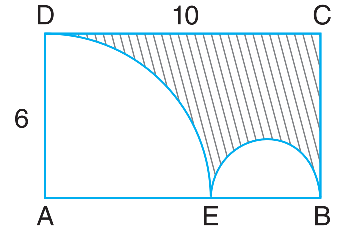
Çözelim:

Önce 150 dakikanın kaç derecelik merkez açıya karşılık geldiğini bulalım. Akrep 12 saatte bir tam tur atar. 1 saat, 60 dakika olduğundan akrep, 12.60 = 720 dakikada 360° lik yay çizer. Yani akrep, her dakikada $\frac{360^\circ}{720} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ lik yay çizer. Buna göre akrebin uç noktası, 150 dakikada $150.\left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 75^\circ$ lik yay çizmiştir.

O hâlde yayın uzunluğu $= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2.1,2.\pi = 0,5.\pi$ m bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki ABCD dikdörtgeninde A, çeyrek çemberin merkezi ve [EB], yarım çemberin çapıdır. |AD| = 6 br ve |DC| = 10 br ise taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir? Bulalım.



Çözelim:

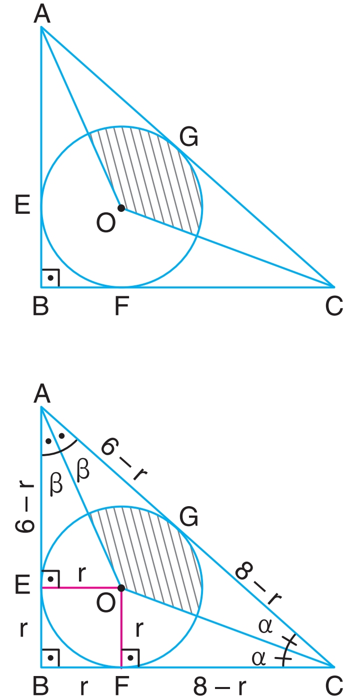
A merkez ise |AD| = |AE| = 6 br dir. ABCD dikdörtgen olduğundan |DC| = |AB| = 10 br dir. |AB| = |AE| + |EB| ⇒ 10 = 6 + |EB|

⇒ |EB| = 4 br dir. [EB] çap olduğundan yarım dairenin yarıçap uzunluğu, $\frac{4}{2} = 2$ br dir. O hâlde taralı bölgenin alanı S = A(ABCD) – "Çeyrek daire dilimin alanı" – "Yarım daire dilimin alanı"

$\Rightarrow S = 6.10 - \frac{6^2.\pi}{4} - \frac{2^2.\pi}{2} = (60 - 11\pi)\ br^2$ dir.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde O merkezli çember, ABC üçgeninin iç teğet çemberidir. [AB] ⊥ [BC], |BC| = 8 br ve |AB| = 6 br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekilde çemberin yarıçap uzunluğu r br olsun.

ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = |AC|^2 \Rightarrow |AC| = 10$ br dir.

|BF| = |EB| = |EO| = |OF| = r br, |AE| = |AG| = (6 – r) br ve |FC| = |GC| = (8 – r) br dir. |AC| = |AG| + |GC| ⇒ 10 = 6 – r + 8 – r

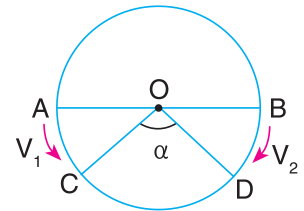
⇒ r = 2 br dir. Diğer taraftan O noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezi ise [AO] ve [CO] açıortaylardır.

Bu durumda $m(\widehat{AOC}) = 90^\circ + \frac{m(\widehat{ABC})}{2} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ$ dir.

O hâlde taralı bölgenin alanı, $\frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot \pi . 2^2 = \frac{3.\pi}{2}$ br^2 bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki AB çaplı, O merkezli dairesel yarış pistinin A ve B noktalarında bulunan iki hareketli, ok yönündeki yay üzerinde aynı anda harekete geçmiştir. Pistin çevresi 300 m, V_1 = 2 m/sn. ve V_2 = 3 m/sn. dir. 10 saniye sonra A dan hareket eden C noktasına, B den hareket eden D noktasına geldiğine göre $m(\widehat{COD}) = \alpha$ kaç derecedir? Bulalım.



Çözelim:

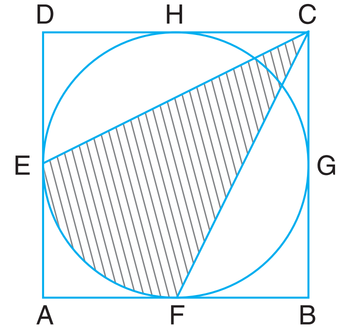
Yol = (hız).(hareket süresi) olduğundan V_1 hareketlisi 10 saniyede $|\widehat{AC}|$ = 10.2 = 20 m, V_2 hareketlisi $|\widehat{BD}|$ = 10.3 = 30 m yol alır. Pistin çevresi 300 m ve [AB] çap olduğundan

$|\widehat{CD}| = \frac{300}{2} - 20 - 30 = 100$ m dir. Pistin çevresi 300 m olduğundan 300 m lik yay 360° lik merkez açı görür. O hâlde 100 m lik yay $\left(100.\frac{360}{300}\right)^\circ$ göreceğinden $m(\widehat{COD}) = \alpha = 120^\circ$ bulunur.

Uygulayalım:

Yandaki çember, ABCD karesinin iç teğet çemberidir.

|AB| = 4 br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir? Bulalım.



Çözelim:

Şekildeki gibi çemberin merkezini O ile adlandırıp [OF], [OE] ve [OC] nı çizelim. E ve F teğet değme noktaları olduğundan AFOE bir karedir. Bu karenin bir kenar uzunluğu, çemberin yarıçap uzunluğu kadardır.

|AB| = 4 br ve |AF| = |FB| = r olduğundan $r = \frac{4}{2} = 2$ br dir.

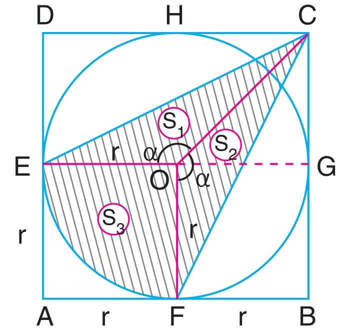
S_3 bölgesi çeyrek daire olduğundan $S_3 = \frac{\pi.2^2}{4} = \pi$ br^2 dir.

EOC ve FOC eş üçgenler olduğundan

$m(\widehat{EOC}) = m(\widehat{COF}) = \frac{360° - 90°}{2} = 135°$ dir. $m(\widehat{EOC}) = 135°$

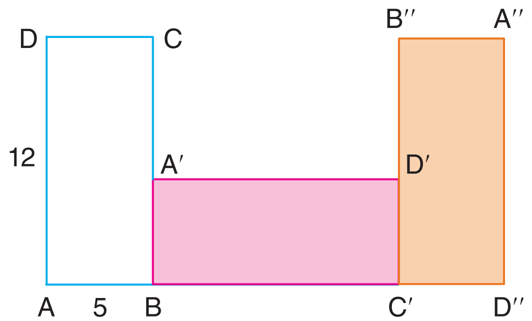
$\Rightarrow m(\widehat{COG}) = 180° - 135° = 45°$ dir. OGC ikizkenar dik üçgen ve |OG| = 2 br olduğundan $|OC| = 2\sqrt{2}$ br dir.

Buna göre $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2.2\sqrt{2}.\sin 135° = 2$ br^2 dir. O hâlde taralı bölgenin alanı, $S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 2 + \pi = (4 + \pi)$ br^2 dir.



Uygulayalım:

Yandaki şekilde ABCD dikdörtgeni sağa doğru B köşesinden devrilerek pembe dikdörtgen, pembe dikdörtgen sağa doğru C′ köşesinden devrilerek turuncu dikdörtgen elde ediliyor. |AB| = 5 br ve |AD| = 12 br olduğuna göre D köşesinin hareket süresince çizdiği yayların toplamı kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

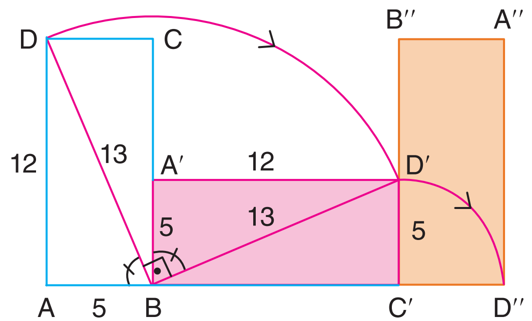
Şekildeki gibi [DB], [BD′] çizilirse |AB| = |A′B|, |AD| = |A′D′| ve $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BA'D'})$ olduğundan $\widehat{ABD} \cong \widehat{A'BD'}$ dir. Buna göre $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{D'BA'})$ ve |DB| = |BD′| dur. $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{D'BA'})$ olduğundan $m(\widehat{DBD'}) = 90°$ dir. ABD üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = |DB|^2$

$\Rightarrow$ |DB| = 13 br dir. D köşesi $\overset{\frown}{DD'}$ çizdiğinden

$|\overset{\frown}{DD'}| = \frac{90°}{360°} \cdot 2.\pi.13 = \frac{13.\pi}{2}$ br dir.

$m(\widehat{B''C'D''}) = 90°$ ve |D′C′| = 5 br olduğundan

$|\overset{\frown}{D'D''}| = \frac{90°}{360°} \cdot 2.\pi.5 = \frac{5.\pi}{2}$ br dir. O hâlde D noktası toplamda

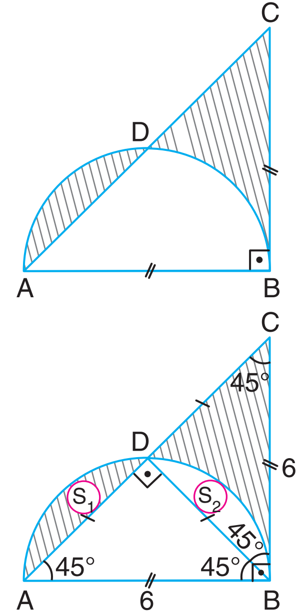


$|\overset{\frown}{DD'}| + |\overset{\frown}{D'D''}| = \frac{13.\pi}{2} + \frac{5.\pi}{2} = 9.\pi$ br lik yay çizmiştir.

Uygulayalım:

Yandaki şekilde [CB], AB çaplı daireye B noktasında teğettir.

|AB| = |BC| = 6 br olduğuna göre taralı bölgelerin alanları toplamı kaç br^2 dir? Bulalım.



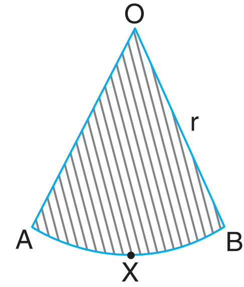
Çözelim:

Şekildeki gibi [DB] nı çizelim. $\widehat{ADB}$, çapı gören çevre açı olduğundan $m(\widehat{ADB}) = 90°$ dir. ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 90°$ ve |AB| = |BC| olduğundan $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$ dir. Buradan ADB ile DBC üçgenlerinin ikizkenar dik üçgen ve |AD| = |DB| = |DC| olduğu sonucuna varılır. |AD| = |DB| olduğundan şekildeki S_1 ile adlandırılmış taralı bölgenin alanı, S_2 ile adlandırılmış kapalı bölgenin alanına eşittir. O hâlde taralı bölgelerin alanları toplamı $A(\widehat{DBC})$ dır. |AD| = |DC| olduğundan

$$A(\widehat{DBC}) = \frac{A(\widehat{ABC})}{2} = \frac{\frac{6.6}{2}}{2} = 9 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

Yandaki daire diliminin merkezi O ve yarıçapı r dir. AOB daire diliminin alanının $|\widehat{AXB}|$ ve r ye bağlı ifadesi nedir? Bulalım.



Çözelim:

$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olsun. AOB daire diliminin alanı A ise $A = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi . r^2$ ve

$|\widehat{AXB}| = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2.\pi.r$ dir. Bulunan eşitlikler taraf tarafa bölünürse

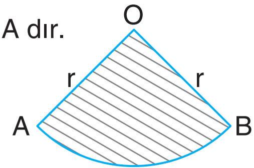
$\dfrac{A}{|\widehat{AXB}|} = \dfrac{\frac{\alpha}{360°}\cdot \pi . r^2}{\frac{\alpha}{360°} \cdot 2.\pi.r} \Rightarrow \dfrac{A}{|\widehat{AXB}|} = \dfrac{r}{2}$ bulunur. Bu ifade içler dışlar çarpımı yapılıp düzendiğinde, $A = \dfrac{|\widehat{AXB}|.r}{2}$ sonucuna ulaşılır.

Uygulayalım:

Çevre uzunluğu 40 cm olan bir daire diliminin alanı, en çok kaç cm^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

Yandaki daire diliminin merkezi O, yarıçapı r, çevre uzunluğu Ç ve alanı A dır.



$Ç = |OA| + |OB| + |\widehat{AB}| \Rightarrow 40 = 2r + |\widehat{AB}| \Rightarrow |\widehat{AB}| = (40 - 2r)$ br dir.

$A = \dfrac{|\widehat{AB}|.r}{2}$ olacağından

$A = \dfrac{(40 - 2.r).r}{2} = (20 - r).r = (-r^2 + 20r)$ br^2 dir. $-r^2 + 20r$ ifadesi r ye bağlı bir paraboldür. Bu parabolün baş katsayısı negatif olduğundan kolları aşağı doğrudur ve parabol en büyük değerini tepe noktasından alır. Bu parabolün tepe noktasının apsisi $x = r = -\dfrac{20}{2.(-1)} = 10$, ordinatı $y = -10^2 + 20.10 = 100$ ve tepe noktasının koordinatları T(10,100) dür. O hâlde bu fonksiyonun değeri en çok 100 dür. Alanın en büyük değeri de 100 cm^2 dir.

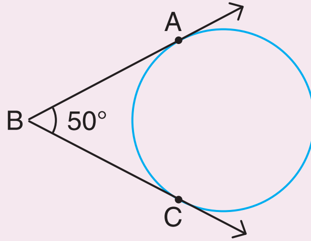
Pekiştirelim:

1.

Yukarıdaki basketbol sahasının eni 15 m ve boyu 28 m dir. Orta yuvarlağın çapı 3,6 m olduğuna göre orta yuvarlağın alanı, sahanın alanının kaçta kaçıdır?

2. Yarıçap uzunluğu 8 cm olan 120° lik bir daire diliminin çevresi kaç cm dir? ($\pi = 3$ alınız.)

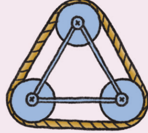
3.



Yukarıdaki şekilde [BA ve [BC, çembere teğettir. AC küçük yayının uzunluğu 13π br olduğuna göre AC büyük yayının uzunluğu kaç π br dir?

4. "Çevresi Ç, yarıçapı r olan dairenin alanının Ç ve r ye bağlı ifadesi ..." cümlesini doğru olacak biçimde tamamlayınız.

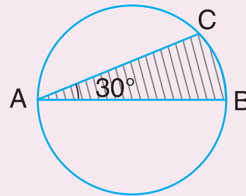
5.



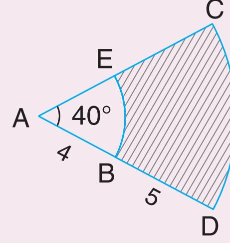
Kenar uzunluğu 20 cm olan bir eşkenar üçgenin köşelerini merkez kabul eden 5 cm yarıçaplı üç eş makara etrafına resimdeki gibi ip sarılmıştır. Buna göre ipin uzunluğu kaç cm dir?

6. Yandaki şekilde [AB], çemberin çapıdır.

$m(\widehat{BAC}) = 30°$ ve çemberin yarıçapı 24 br ise taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

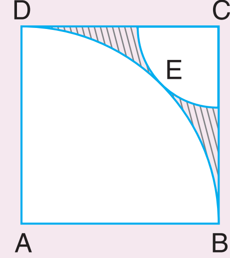


7.



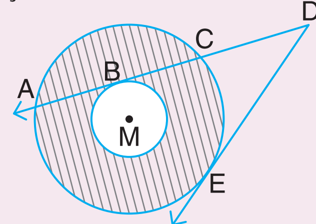
Yukarıdaki şekilde merkezleri çakışık ve 40° açı ölçüsüne sahip iki daire dilimi vardır. $|AB| = 4$ cm ve $|BD| = 5$ cm olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

8.



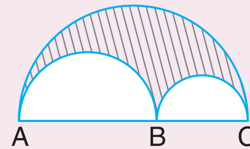
Yukarıdaki şekilde merkezleri ABCD karesinin A ve C köşelerinde olan iki çeyrek daire dilimi, E noktasında dıştan teğettir. $|AB| = 10$ br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

9.



M merkezli iki çemberin olduğu yukarıdaki şekilde [DE büyük çembere [DA küçük çembere sırasıyla E ve B noktalarında teğettir. $|DE| = 10$ br ve $|DC| = 4$ br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

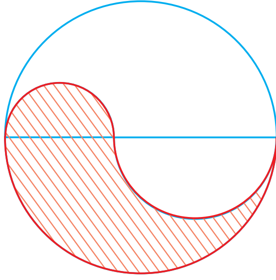
10.



Yukarıdaki şekilde merkezleri [AC] üzerinde olan üç yarım daire görülmektedir. $|AB| = 6$ br ve $|BC| = 4$ br olduğuna göre taralı bölgenin çevresi kaç br dir?

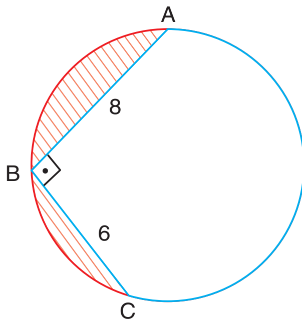
5. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1.



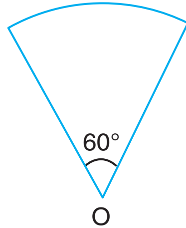
Yukarıdaki şekilde verilen yarım daireler, büyük dairenin çapı üzerindedir. Küçük daire diliminin yarıçapı 6 br ve büyük daire diliminin yarıçapı 8 br ise taralı alan kaç π br^2 dir?

2.

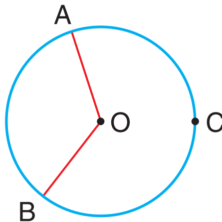


[AB] ve [BC] kirişlerine sahip yukarıdaki dairede $[AB] \perp [BC]$, $|AB| = 8$ br ve $|BC| = 6$ br ise taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

3. Yandaki şekilde O merkezli ve 60° lik merkez açıya sahip daire diliminin gördüğü yayın uzunluğu $8.\pi$ cm ise daire diliminin alanı kaç cm^2 dir?

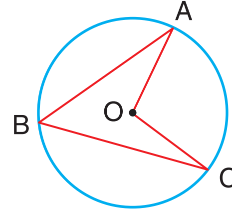


4.



Yukarıdaki şekilde O merkezli çemberde ACB yayının uzunluğu, dairenin çevresinin $\frac{2}{3}$ ü kadardır. Buna göre $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?

5.

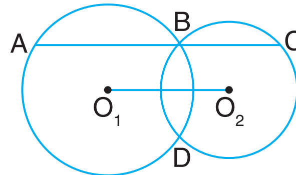


Yukarıdaki şekilde O merkezli çemberde $m(\widehat{ABC}) = 43°$ ise $m(\widehat{AOC})$ kaç derecedir?

6.

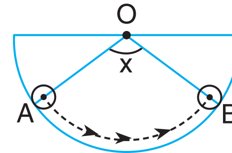
A noktasından D noktasına doğrusal olarak yuvarlanan yukarıdaki top üzerinde eşit aralıklarla A, B ve C noktaları işaretleniyor. Top harekete başladıktan sonra bu noktalar, toplam 7 defa yere değiyor. Son nokta yere değdiğinde top D noktasında durduğuna göre A nın ilk konumu ile D arasındaki uzaklığın dairenin çevresine oranı kaçtır?

7.



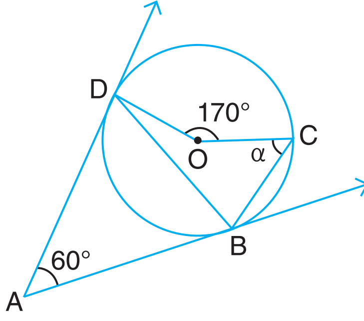
Yukarıdaki şekilde merkezleri O_1 ile O_2 olan çemberler, B ve D noktalarında kesişmektedir. $[O_1O_2] // [AC]$, $|BC| = 4$ br ve $|O_1O_2| = 9$ br ise $|AB|$ kaç br dir?

8.



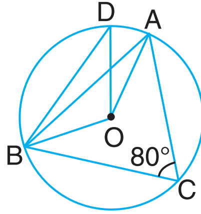
Şekildeki O merkezli ve 12 br yarıçaplı yarım çember içerisindeki 1 br yarıçaplı çember kaydırılmadan A noktasından B noktasına yuvarlanmıştır. Küçük çember 4 tam dönüş yaptığına göre $m(\widehat{AOB}) = x$ kaç derecedir?

9.



Yukarıdaki şekilde O merkezli çemberde B ve D, teğet noktalarıdır. $m(\widehat{BAD}) = 60°$ ve $m(\widehat{COD}) = 170°$ olduğuna göre $m(\widehat{OCB}) = \alpha$ kaç derecedir?

10.



Yukarıdaki şekilde A, B, C ve D noktaları, O merkezli çemberin üzerindedir.

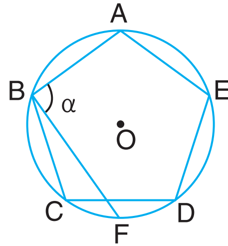
$m(\widehat{BCA}) = 80°$ ve

$|BD| = |BC| = |AC|$

olduğuna göre

$m(\widehat{DOA})$ kaç derecedir?

11.



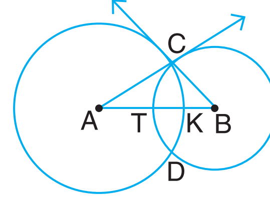
Yukarıdaki şekilde ABCDE düzgün beşgen,

$m(\widehat{CF}) = m(\widehat{FD})$ ve

O noktası çevrel çemberin merkezi olduğuna göre

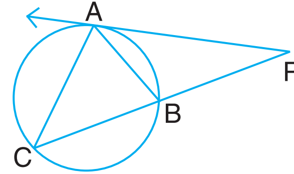
$m(\widehat{FBA}) = \alpha$ kaç derecedir?

12.



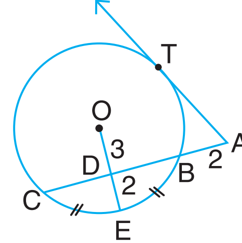
Yukarıdaki şekilde A ve B merkezli çemberler, C ve D noktalarında kesişiyor. [AC ve [BC, C noktasında çemberlere teğettir. $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm olduğuna göre $|TK|$ kaç cm dir?

13.



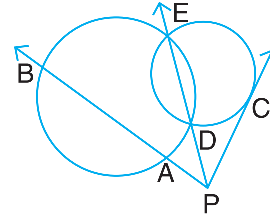
Yukarıdaki şekilde [PA, çembere A da teğettir. P, B ve C doğrusal, $|AP| = 12$ cm, $|AB| = 6$ cm, ve $|BP| = 8$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç cm dir?

14.



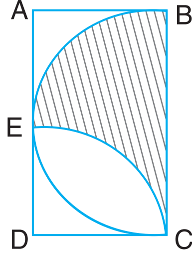
Yukarıdaki şekilde [AT, O merkezli çembere T noktasında teğettir. $[OE] \cap [CA] = \{D\}$, $|\widehat{CE}| = |\widehat{EB}|$, $|OD| = 3$ br ve $|DE| = |BA| = 2$ br olduğuna göre $|AT|$ kaç br dir?

15.



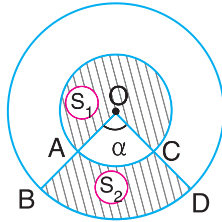
Yukarıdaki şekilde çemberler, D ve E noktalarında kesişmektedir. P, D ve E doğrusal, [PC, C noktasında çemberlerden birine teğettir. $|BP| = 9$ br ve $|AB| = 5$ br olduğuna göre $|PC|$ kaç br dir?

16. Yandaki şekilde ABCD dikdörtgeni, [BC] çaplı yarım çember ile D merkezli [ED] yarıçaplı çeyrek çember verilmiştir. E, değme noktası ve |DC| = 3 br dir.



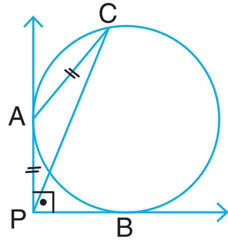
Verilenlere göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

17.



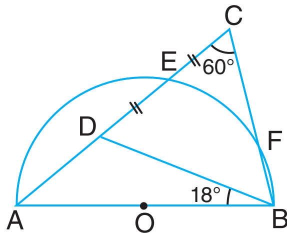
Yukarıdaki şekilde O merkezli çemberler görülmektedir. $m(\widehat{BOD}) = \alpha$, $|OD| = 4.|CD|$ ve $\frac{S_1}{S_2} = 3$ olduğuna göre α kaç derecedir?

18.



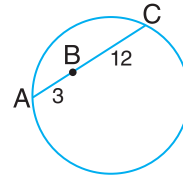
Yukarıdaki şekilde çemberde [AP ve [PB teğet, [PA ⊥ [PB ve |AP| = |AC| olduğuna göre $m(\widehat{ACP})$ kaç derecedir?

19.



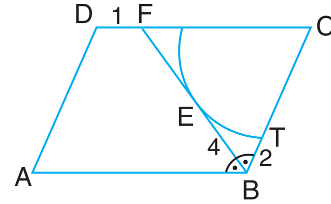
Yukarıdaki şekilde [AB] çaplı yarım çemberin merkezi O, [AC] ∩ [BC] = {C}, |DE| = |EC|, $m(\widehat{ACB}) = 60°$ ve $m(\widehat{ABD}) = 18°$ olduğuna göre $m(\widehat{CAB})$ kaç derecedir?

20.



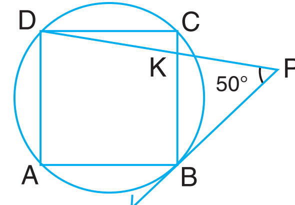
Yukarıdaki çemberde [AC] kiriş, |AB| = 3 br ve |BC| = 12 br olduğuna göre B noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğu kaç br dir?

21.



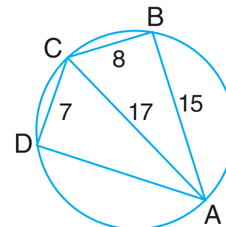
Yukarıdaki ABCD paralelkenarında [FB], B açısının açıortayıdır. [FB], C merkezli çember yayına E noktasında teğettir. |EB| = 4 br, |TB| = 2 br ve |DF| = 1 br olduğuna göre Ç(ABCD) kaç br dir?

22.



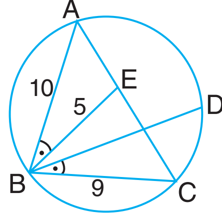
Yukarıdaki ABCD karesinin köşeleri çemberin üzerindedir. [PB, çembere B noktasında teğet ve $m(\widehat{DPB}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{PDC})$ kaç derecedir?

23.



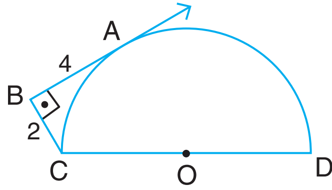
Yukarıdaki şekilde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir. |AB| = 15 br, |BC| = 8 br, |CD| = 7 br ve |AC| = 17 br olduğuna göre |DA| kaç br dir?

24.



Yukarıdaki şekilde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir. $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD})$, $|AB| = 10$ br, $|BE| = 5$ br ve $|BC| = 9$ br olduğuna göre $|DB|$ kaç br dir?

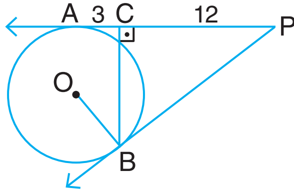
25.



Yukarıdaki şekilde [BA, O merkezli yarım çembere A noktasında teğettir.

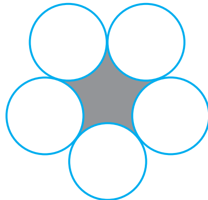
$[BA \perp [BC]$, $|BA| = 4$ br ve $|BC| = 2$ br olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç br dir?

26.



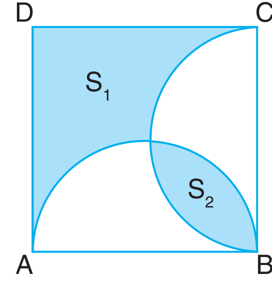
Yukarıdaki şekilde [PA ve [PB, O merkezli çembere sırasıyla A ve B noktalarında teğettir. $[BC] \perp [PA$, $|CP| = 12$ br ve $|AC| = 3$ br olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç br dir?

27.



Yukarıdaki şekilde 5 eş daire, birbirlerine dıştan teğettir. Bu çemberlerin merkezleri bir düzgün çokgenin köşeleri ve yarıçap uzunlukları 4 br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

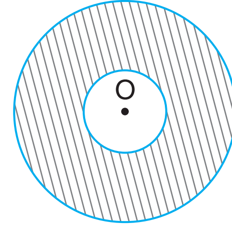
28.



Yukarıdaki şekilde ABCD karesi içine yerleştirilen, çapları [AB] ve [CB] olan iki yarım daire görülmektedir. S_1 ve S_2, bulundukları kapalı bölgelerin alanlarını göstermektedir.

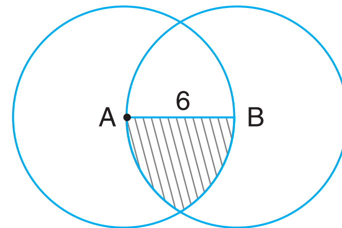
$S_1 + S_2 = \frac{25}{2}$ br^2 olduğuna göre |AB| kaç br dir?

29.



Yukarıdaki şekilde O merkezli iki çember tarafından sınırlanan bölge görülmektedir. Taralı bölgenin çevre uzunluğu $16.\pi$ cm ve alanı $16.\pi$ cm^2 ise çemberlerin yarıçap uzunlukları toplamı kaç cm dir?

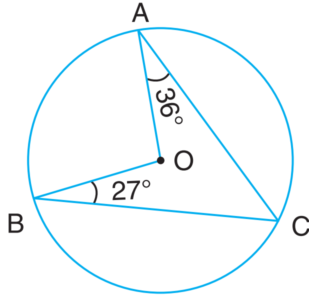
30.



Yukarıdaki şekilde A ve B merkezli çemberlerde |AB| = 6 br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

5. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1.



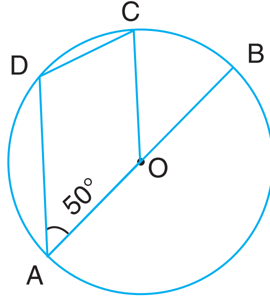
A, B ve C noktaları yukarıdaki O merkezli çemberin üzerindedir.

$m(\widehat{OAC}) = 36°$ ve $m(\widehat{OBC}) = 27°$

olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

A) 62 B) 63 C) 64 D) 65 E) 67

2.



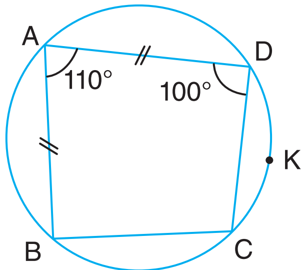
A, B, C ve D noktaları yukarıdaki O merkezli çemberin üzerindedir.

[AD] // [OC] ve $m(\widehat{DAB}) = 50°$

olduğuna göre $m(\widehat{DCO})$ kaç derecedir?

A) 65 B) 60 C) 55 D) 50 E) 45

3.



ABCD kirişler dörtgenidir.

|AB| = |AD|

$m(\widehat{BAD}) = 110°$

$m(\widehat{ADC}) = 100°$ olduğuna göre CKD yayının ölçüsü kaç derecedir?

A) 35 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

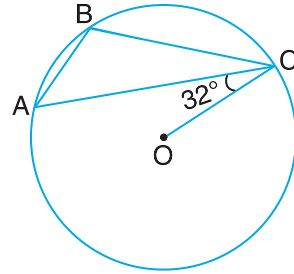
4. Çevresi $18.\pi$ br olan dairenin alanı kaç π br^2 dir?

A) 49 B) 64 C) 81 D) 100 E) 121

5. Yarıçapı 4 br ve alanı $8.\pi$ br^2 olan daire diliminin merkez açısı kaç derecedir?

A) 120 B) 135 C) 150 D) 180 E) 210

6.

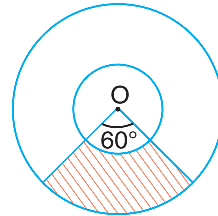


A, B ve C noktaları yukarıdaki O merkezli çemberin üzerindedir.

$m(\widehat{ACO}) = 32°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

A) 116 B) 120 C) 122 D) 124 E) 136

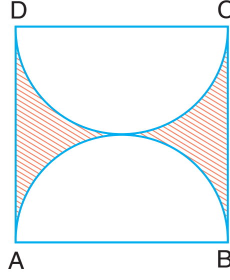
7.



Yukarıdaki O merkezli dairelerin yarıçapları sırasıyla 6 cm ve 12 cm dir. Verilenlere göre taralı alan kaç π cm^2 dir?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

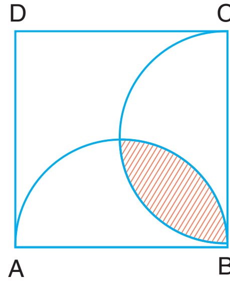
8. Yandaki şekilde bir kenarının uzunluğu 8 br olan kare içinde AB ve DC kenarlarını çap kabul eden yarım daireler görülmektedir. Buna göre taralı alan kaç br^2 dir?



A) $64 - 16.\pi$ B) $32 + 8.\pi$ C) $32 - 8.\pi$

D) $16.\pi$ E) $64 - 8.\pi$

9. Yandaki şekilde bir kenarının uzunluğu 4 cm olan kare içinde [AB] ve [BC] yi çap kabul eden yarım daireler görülmektedir. Buna göre taralı alan kaç cm^2 dir?



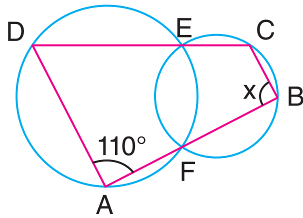
A) $\pi - 2$ B) $\pi + 2$ C) $2.\pi - 2$

D) $2.\pi + 2$ E) $2.\pi - 4$

10. Çevresi $(12 + 8.\pi)$ br olan 6 br yarıçaplı daire diliminin merkez açısı kaç derecedir?

A) 160 B) 180 C) 200 D) 220 E) 240

11.



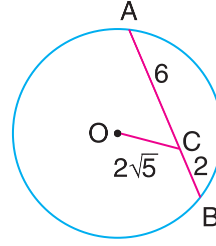
Yukarıdaki şekilde çemberler, E ve F noktalarında kesişmektedir.

$m(\widehat{A}) = 110°$ olduğuna göre

$m(\widehat{B}) = x$ kaç derecedir?

A) 120 B) 110 C) 90 D) 80 E) 70

12.

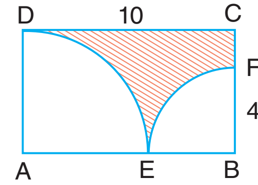


Yukarıdaki O merkezli çemberde

$|AC| = 6$ cm, $|CB| = 2$ cm ve $|OC| = 2\sqrt{5}$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç cm dir?

A) 4 B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 8

13.

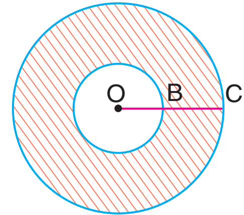


Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgeni ile A ve B merkezli çeyrek çemberler görülmektedir.

$|DC| = 10$ br ve $|FB| = 4$ br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir ($\pi = 3$ alınız.)?

A) 11 B) 21 C) 24 D) 30 E) 33

14.



Yukarıdaki O merkezli dairede

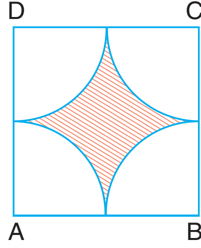
$|OC| = 6$ br ve $|BC| = 4$ br olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $36.\pi$ B) $32.\pi$ C) $30.\pi$ D) $24.\pi$ E) $20.\pi$

15. Bir dairenin çevresinin çapına oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 3 C) π D) $2.\pi$ E) π^2

16.



Yukarıdaki şekilde ABCD karesinin köşelerini merkez kabul eden 4 çeyrek çember görülmektedir. Karenin çevre uzunluğu 32 cm olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç cm^2 dir ($\pi = 3$ alınız.)?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 16 E) 12

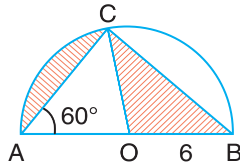
17. Çevresi $36.\pi$ m olan daire şeklindeki bir havuzun bir noktasından suya girip bir doğru boyunca yüzerek diğer bir noktasından dışarı çıkan kişi **en fazla** kaç m yol alır?

A) 24 B) 30 C) 36 D) 40 E) 52

18. br^2 türünden alanının sayısal değeri br türünden çevresinin sayısal değerine eşit olan bir dairenin çapı kaç br dir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

19.



O merkezli yukarıdaki yarım dairede $m(\widehat{CAB}) = 60°$ ve $|OB| = 6$ cm olduğuna göre taralı bölgelerin alanlarının toplamı kaç cm^2 dir?

A) $18.\pi$ B) $12.\pi$ C) $6.\pi$ D) $5.\pi$ E) π

20. Köşeleri, çevresi $24.\pi$ cm olan bir çemberin üzerinde olan eşkenar üçgenin bir kenarı kaç cm dir?

A) 24 B) $12\sqrt{3}$ C) 12 D) $6\sqrt{3}$ E) 6

21. Aşağıda bir çemberin temel ve yardımcı elemanlarıyla ilgili ifadelerden hangisi **kesinlikle yanlıştır?**

A) Çemberin en uzun kirişi çaptır.

B) Çemberin iç bölgesindeki bir noktadan çizilebilecek en kısa kiriş, o noktadan geçen çapa dik olanıdır.

C) Bir çembere üzerindeki bir noktadan farklı iki teğet çizilebilir.

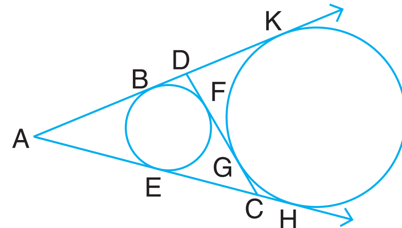
D) Eş kirişleri gören yaylar eştir.

E) Bir kesen, çemberi eş iki yaya ayırıyorsa merkezden geçiyordur.

22. Bir d doğrusu, yarıçapı 5 br olan bir çemberi A ve B noktalarında kesmektedir. $|AB| = 8$ br dir. Çemberin iç bölgesinde bulunan ve verilen çember ile d doğrusunu kesmeyen bir çemberin çap uzunluğunun br cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

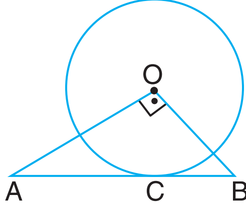
23.



Yukarıdaki şekilde ADC üçgeninin iç teğet çemberi ve dış teğet çemberlerinden biri çizilmiştir. B, E, F, H, G ve K teğetlerin değme noktaları, $|DC| = 5$ br ve $|AC| = 9$ br olduğuna göre $|DK| + |AH|$ kaç br dir?

A) 9 B) 12 C) 14 D) 18 E) 21

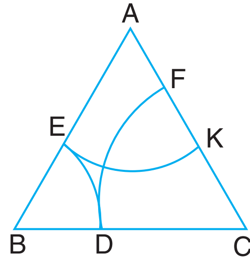
24.



Yukarıdaki şekilde [AB], O merkezli çembere C noktasında teğettir. [AO] ⊥ [OB], |AC| = 9 br ve |CB| = 4 br olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç br dir?

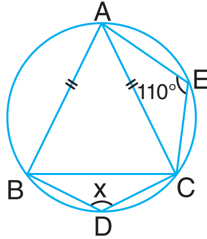
A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

25. Yandaki şekilde merkezleri ABC üçgeninin köşeleri olan üç çember yayı verilmiştir.
|AB| = 7 br,
|BC| = 8 br,
|AC| = 6 br ve
|FK| = 3 br olduğuna göre |BD| kaç br dir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

26.



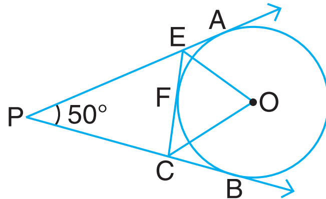
Yukarıdaki çemberde |AB| = |AC| ve

$m(\overset{\frown}{CEA}) = 110°$ olduğuna göre

$m(\overset{\frown}{BDC}) = x$ kaç derecedir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

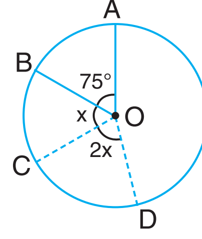
27.



Yukarıdaki şekilde [PA, [PB ve [EC], sırasıyla A, B ve F noktalarında O merkezli çembere teğettir. $m(\overset{\frown}{APB}) = 50°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{COE})$ kaç derecedir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

28.

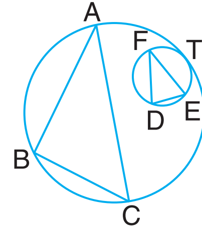


Yukarıdaki şekilde O merkezli çembersel pistte, $m(\overset{\frown}{BOA}) = 75°$, $m(\overset{\frown}{BOC}) = x$ ve $m(\overset{\frown}{COD}) = 2x$ tir.

A ve B noktalarında bulunan iki hareketli aynı anda ve saat yönünün tersine sabit hızla hareket ettiklerinde hızlı olan yavaş olana ilk kez C noktasında yetişmektedir. Aynı sabit hızlarla aynı anda zıt yönlere hareket ettiklerinde ilk kez D noktasında karşılaştıklarına göre yavaş olan hareketlinin hızının, hızlı olan hareketlinin hızına oranı kaçtır?

A) $\frac{2}{17}$ B) $\frac{3}{11}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

29.



Yukarıdaki büyük çember ile küçük çember, T noktasında teğettir. |AB| = 8 br, |DE| = 3 br ve çemberlerin yarıçapları oranı 3 olduğuna göre $\dfrac{\sin(\overset{\frown}{BCA})}{\sin(\overset{\frown}{DFE})}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{8}{9}$

30. Alanı 36π cm^2 olan bir çemberi çevrel çember olarak kabul eden ABC üçgeninde A açısının ölçüsü 30° ise BC kenarının uzunluğu kaç cm dir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

6. Alt Öğrenme Alanı: UZAY GEOMETRİ

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

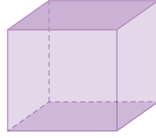
- Küre, dik dairesel silindir ve dik dairesel koninin alan ve hacim bağıntılarını oluşturarak işlemler yapmanız amaçlanmaktadır.

"Başka çoğu şeyde olduğu gibi matematiksel teori için de öyledir: Güzellik algılanabilir fakat açıklanamaz."

Arthur Cayley (Artur Kayley)

6. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1. Yandaki küpün bir ayrıtının uzunluğu 5 cm dir. Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.



a. Küpün ayrıt sayısı .... dir.

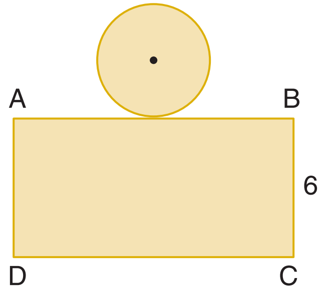
b. Küpün yüz sayısı .... dır.

c. Verilen küpün yüzey alanını bulunuz.

ç. Verilen küpün hacmini bulunuz.

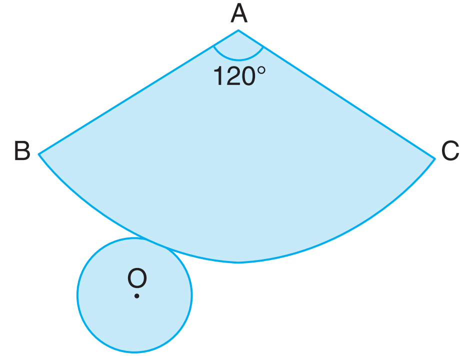
2. Sayısal değerce yüzey alanı ile hacmi eşit olan küpün bir ayrıt uzunluğunu bulunuz.

3.



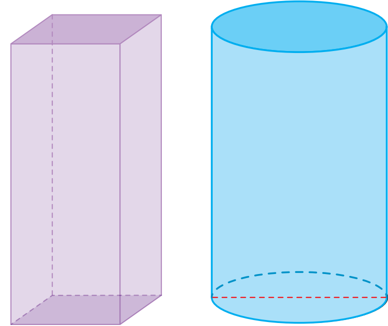
Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgeninin alanı 72 cm^2 ve |BC| = 6 m dir. O merkezli çemberin çevresi dikdörtgenin [AB] kenar uzunluğuna eşit ise çemberin çapı kaç m dir ($\pi \cong 3$ alınız.)?

4.



Yukarıdaki şekilde A merkezli çemberde $|\overset{\frown}{BC}|$, O merkezli çemberin çevresine eşittir. O merkezli çemberin yarıçapı 4 cm ise A merkezli çemberin yarıçapı kaç cm olur ($\pi \cong 3$ alınız.)?

5.



Yukarıdaki dik dairesel silindir ve kare dik prizma yaklaşık olarak eşit miktarda su aldıklarına göre cisimlerin hacimleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

6. Uzayda sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi nasıl bir cisim belirtir?

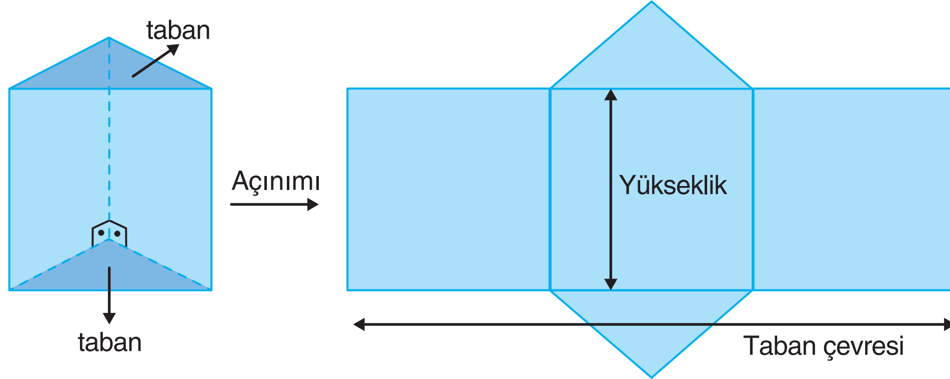
6.1. Katı Cisimler

Aşağıdaki geometrik cisimlerin adlarını söyleyiniz. Siz de günlük yaşantıda bu cisimlere nerelerde rastladığınızı belirtiniz.

6.1.1. Dik Dairesel Silindir, Dik Dairesel Koni ve Küre

Hatırlayalım:

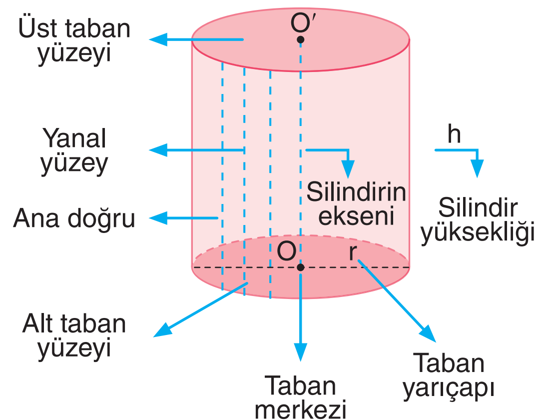
Yanal ayrıtları tabanlara dik olan prizmaya dik prizma denir. Prizmalar tabanlarındaki geometrik şekle göre adlandırılır. Aşağıdaki cisim üçgen dik prizmadır.



Dik prizmanın taban çevresi $T_Ç$ ve yüksekliği h ise yanal alanı $Y_A = T_Ç . h$ olur. Bir dik prizmanın taban alanı T_A ve yanal alanı Y_A olmak üzere yüzey alanı $A = 2\,T_A + Y_A$ ve hacmi $V = T_A . h$ bağıntısıyla bulunur.

Yandaki şekilde silindiri oluşturan düzlemler arasında kalan dikme parçasına silindirin **yüksekliği** (h), silindirin altında ve üstünde oluşan kesitlere **alt ve üst taban yüzeyleri**, silindirik yüzey parçasına silindirin **yanal yüzeyi**, taban yüzeylerinin merkezlerini birleştiren doğruya da **silindirin ekseni** adı verilir. Tabanları karşılıklı iki noktasını birleştiren ve eksene paralel olan doğrulara ise dairesel silindirin **ana doğruları** denir.

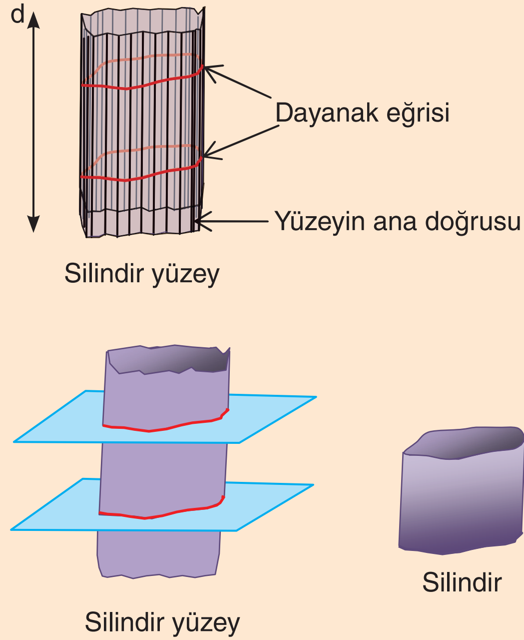
Ana doğruları dayanak eğrisinin bulunduğu düzleme dik olan silindire **dik silindir** denir. Alt ve üst tabanları daire olan dik silindir, **dik dairesel silindir** olarak adlandırılır.



Öğrenelim:

Uzayda kapalı düzlemsel bir eğri ile bu eğri düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verilmiş olsun. Bu eğri üzerindeki her noktadan d doğrusuna paralel çizilen doğruların oluşturduğu yüzeye **silindir yüzey** denir. Verilen eğriye bu yüzeyin **dayanak eğrisi**, yüzeyi oluşturan her bir doğruya yüzeyin **ana doğrusu** adı verilir.

Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan silindir yüzeyin ana doğrularını kesen ve birbirine paralel iki düzlem arasında kalan cisimlere **silindir** adı verilir.

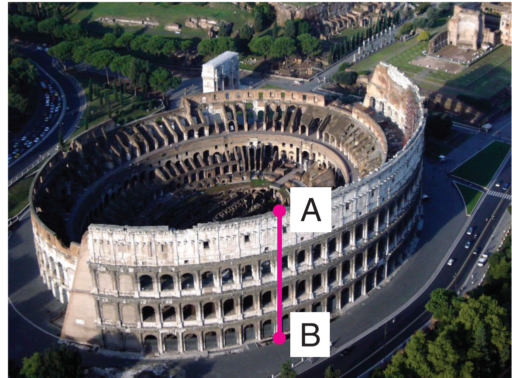


Uygulayalım:

Yanda İtalya'nın Roma şehrinde bulunan Coloesseum (Kolezyum)'un fotoğrafı bulunmaktadır. Bu yapının hangi geometrik cisme benzediğini söyleyip yüksekliğini belirleyelim.

Çözelim:

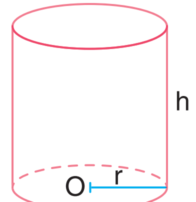
Bu yapı silindir biçimlidir. Yapının duvarları silindirin yüzeyini, şekildeki [AB] silindirin ana doğrusunu oluşturur. Bu yapı dik dairesel silindir olduğundan ana doğru, aynı zamanda yüksekliktir.



Uygulayalım:

Yanda taban merkezi O, taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir dik dairesel silindir görülmektedir.

Bu silindirin alt ve üst taban yüzeyleri arasındaki uzaklık 6 br ve alt tabanı üzerinde seçilen farklı iki nokta arasındaki en uzak mesafe 4 br dir. Verilenlere göre h ve r değerlerini bulalım.



Çözelim:

Verilen silindirin alt ve üst taban yüzeyleri arasındaki uzaklık, yüksekliği kadardır.

O hâlde $h = 6$ br bulunur.

Silindirin alt tabanı üzerinden seçilen farklı iki nokta arasındaki en uzak mesafe, tabandaki dairenin çapı kadardır.

O hâlde $2r = 4 \Rightarrow r = 2$ br bulunur.

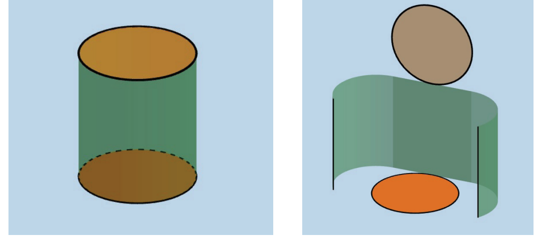
Keşfedelim:

Araç ve gereçler: bilgisayar (tablet, akıllı telefon), İnternet

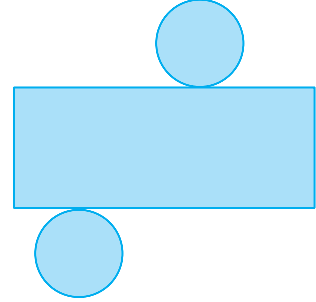
Aşağıdaki ekran görüntüleri bir dik dairesel silindirin açınımına aittir.

Siz de https://www.geogebra.org/m/rCxXxFhE İnternet adresinde GeoGebra yazılımında oluşturulmuş materyali açıp inceleyebilirsiniz.

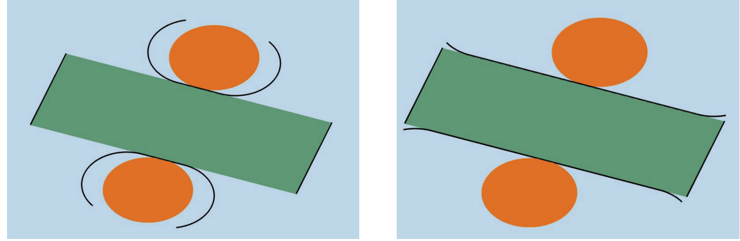
1. Dik dairesel silindirin açınımında yer alan düzlemsel şekiller nelerdir?



2. Dik dairesel silindirin farklı bir açınımını da siz çiziniz. Yandaki açınım dik dairesel silindirin açınımı mıdır? Cevabınızın nedenini açıklayınız.



3. Yandaki dik dairesel silindirin açınımını inceleyerek geometrik şekillerin uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olduğunu tartışınız.



- Buna göre bir dik dairesel silindirin yüzey alan bağıntısını oluşturunuz.

Öğrenelim:

Herhangi bir dik dairesel silindirin taban alanı, T_A ile gösterilsin. Taban alanı bir daire alanına eşit olacağından

$T_A = \pi.r^2$ dir.

Yanal yüz alanı Y_A ile gösterilirse bu değer açınımdaki dikdörtgenin alanına eşit olacağından

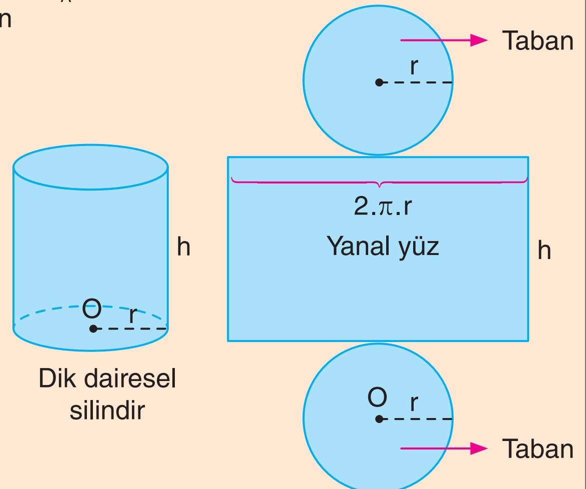
$Y_A = 2.\pi.r.h$ dir.

Yüzey alan A ile gösterilirse yüzey alanı, tüm alanların toplamı olur. Buna göre

$A = 2.T_A + Y_A$

$A = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$

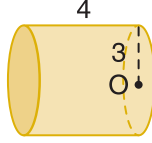
$A = 2.\pi.r.(r + h)$ elde edilir.



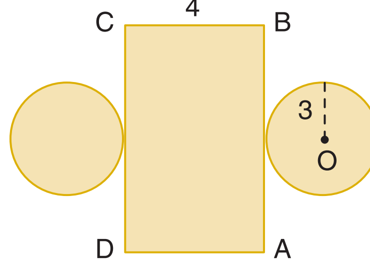
Uygulayalım:

Taban yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 4 cm olan bir dik dairesel silindirin taban alanı, yanal alanı ve yüzey alanı kaç cm^2 dir? Bulalım.

Çözelim:



Dik silindir



Dik dairesel silindir açınımı

Silindir ve açınımı yukarıdaki şekilde verilmiştir. İnceleyiniz.

$|AB|$ nun taban dairesinin çevresi olduğu görülmektedir.

O hâlde $|AB| = 2.\pi.r = 2.\pi.3 = 6.\pi$ cm dir.

Silindirin taban alanı $= \pi.r^2 = \pi.3^2 = 9.\pi$ cm^2 dir.

Silindirin yanal alanı $= A(ABCD) = |AB|.|BC|$

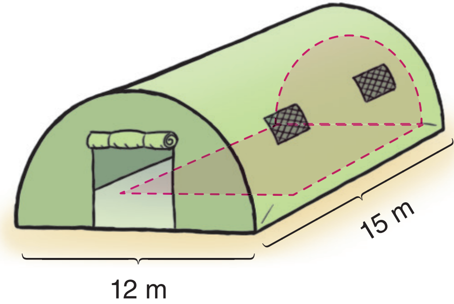
$\Rightarrow Y_A = 6.\pi.4 = 24.\pi$ cm^2 dir.

Silindirin yüzey alanı, 2 eş daire alanı ile yanal alanının toplamından

$A = 2.9.\pi + 24.\pi = 42.\pi$ cm^2 bulunur.

Uygulayalım:

Sağdaki şekilde tabanı dikdörtgen biçiminde bir alana kurulan yarım dairesel silindir biçimli çadırın boyutları verilmiştir. Çadırın tabanı hariç her tarafında çadır kumaşı kullanılmıştır. Verilenlere göre bu çadırın oluşması için en az kaç m^2 kumaş kullanılmıştır? Bulalım.



Çözelim:

Şekildeki çadır, bir dik dairesel silindirin taban alanlarının yarısı ile yanal alanlarının yarısı kadar bir yüzey alanına sahiptir. Çadırın kaç m^2 kumaştan yapıldığını bulmak için bir dik dairesel silindirin yüzey alanının yarısını bulmak yeterli olacaktır.

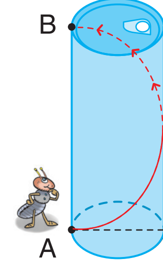
$2.r = 12$
$r = 6$ m
$h = 15$ m

$$\text{Çadırın yüzey alanı} = \frac{\text{dik dairesel silindirin yüzey alanı}}{2} = \frac{2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h}{2}$$

Çadırın yüzey alanı $= \pi.r^2 + \pi.r.h = \pi.6^2 + \pi.6.15 = 126.\pi$ m^2 bulunur.

Uygulayalım:

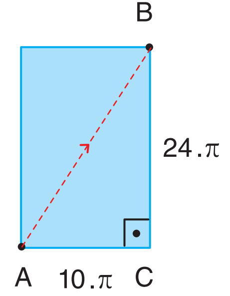
Sağdaki şekilde taban yarıçapı 5 br ve yüksekliği $24.\pi$ br olan demirden yapılmış bir dik dairesel silindir görülmektedir. Bu silindirin taban çevresi üzerindeki A noktasında bulunan bir karınca, tam bu noktanın dikey doğrultusunda üst taban üzerinde bulunan B noktasına hareket edecektir. Karınca bu hareketi sırasında silindir yüzeyi üzerinde bir tam dolanım yapacağına göre karıncanın izlemesi gereken en kısa yolun uzunluğu kaç br dir? Bulalım.



Çözelim:

Verilen silindirin yanal yüzünün açınımı yapıldığında yanda verilen dikdörtgensel bölge oluşur. Bu dikdörtgensel bölge için

$|AC| = 2.\pi.r = 2.\pi.5 = 10.\pi$ br ve $|BC| = h = 24.\pi$ br bulunur.



Karıncanın izlediği en kısa yol, bu açınımda doğrusal bir yola karşılık geleceğinden şekildeki [AB] dır. ACB dik üçgeninden Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AB|^2 = (10.\pi)^2 + (24.\pi)^2 \Rightarrow |AB| = 26.\pi$ br bulunur.

Verilen şartlar altında karıncanın izleyeceği en kısa yolun uzunluğu, $26.\pi$ br dir.

Uygulayalım:

Taban çevresi $10.\pi$ cm ve yüksekliği 4 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanı kaç cm^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

$T_Ç = 2.\pi.r = 10.\pi \Rightarrow r = 5$ cm dir.

$T_A = \pi.r^2 \Rightarrow T_A = \pi.5^2 \Rightarrow T_A = 25.\pi\ cm^2$ dir.

$Y_A = 2.\pi.r.h \Rightarrow Y_A = 2.\pi.5.4 \Rightarrow Y_A = 40.\pi\ cm^2$ dir.

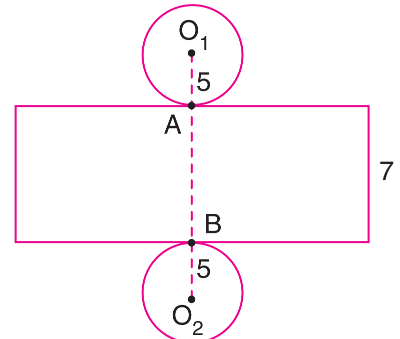
$A = 2.T_A + Y_A \Rightarrow A = 2.25.\pi + 40.\pi \Rightarrow A = 90.\pi\ cm^2$ dir.

Uygulayalım:

Taban yarıçapı 5 br ve yüksekliği 7 br olan bir dik dairesel silindirin açınımında taban merkezleri arası uzaklık en az kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:

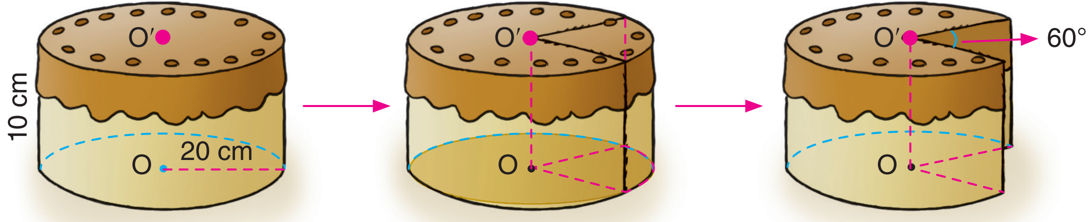
Açınımında taban merkezleri arasındaki uzaklığın en az olması için taban merkezleri ile silindirin bir elemanının aynı doğrultu üzerinde olması gerekir. Buna uygun bir açınım, yandaki gibidir.



$|O_1A| = 5$ br, $|AB| = 7$ br ve $|BO_2| = 5$ br olduğuna göre

$|O_1O_2| = 5 + 7 + 5 = 17$ br bulunur.

Uygulayalım:



Şekildeki gibi taban yarıçapı 20 cm ve yüksekliği 10 cm olan dik silindir biçimli pastanın merkezinden 60° lik kısmı kesilip alınıyor. Pastanın kalan kısmının yüzey alanı kaç cm^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

Bir dik dairesel silindirin 60° lik kısmı, $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ lık kısmına denk gelmektedir. Öncelikle soruda verilen dik silindirin yüzey alanının $\frac{5}{6}$ lık kısmını bulalım. Parça çıkarıldıktan sonra çıkan kısımlarda 2 tane dikdörtgensel yüzey oluşacaktır. Bu yüzeylerin ayrıtları, 20 cm ve 10 cm dir.

İstenilen yüzey alan = dik silindirin yüzey alanının $\frac{5}{6}$ sı + 2 tane dikdörtgenin alanı

İstenilen yüzey alan = $(2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h)\cdot\frac{5}{6} + 2.r.h$

Kalan pastanın yüzey alanı = $(2.\pi.20^2 + 2.\pi.20.10)\cdot\frac{5}{6} + 2.20.10$

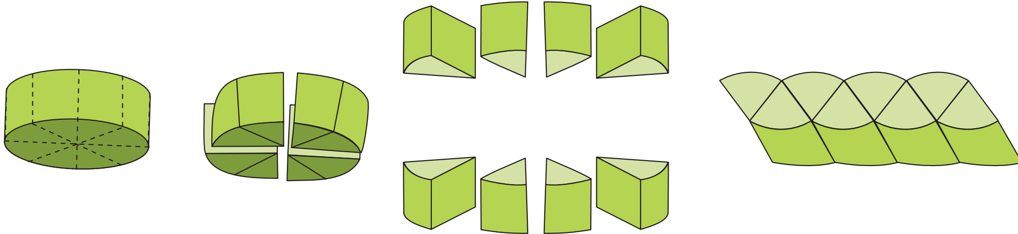
Kalan pastanın yüzey alanı = $\frac{1200.\pi.5}{6} + 400 = (1000.\pi + 400)$ cm^2 bulunur.

Keşfedelim:

Oyun hamuru veya kilden yapılmış olan 3 tane eş dik dairesel silindir alınız.

1. Birinci silindiri 4 eş dilime ayırınız.
2. İkinci silindiri 8 eş dilime ayırınız.
3. Üçüncü silindiri ise 16 eş dilime ayırınız.

Aşağıda 8 eş dilime ayrılan ikinci silindirin dilimlerinin nasıl düzenleneceği verilmiştir.



4. Başka eş silindirler alıp dilim sayısını artırarak benzer işlemleri uygulayınız. Dilim sayısı arttıkça oluşan şeklin hangi geometrik cisme benzeyeceğini tahmin etmeye çalışınız.
5. Oluşan şeklin hacmi ile silindirin hacmi eşit olur mu? Tartışınız.
6. Tüm etkinlik adımlarını inceleyip silindirin hacim bağıntısının nasıl elde edileceğini tahmin etmeye çalışınız.

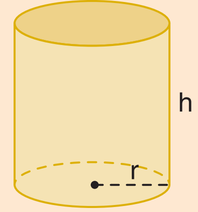
▶ Silindirin hacim bağıntısını silindirin taban alanı ve yüksekliğine bağlı olarak ifade etmeye çalışınız.

Öğrenelim:

Yandaki şekilde görülen dik dairesel silindirin yüksekliği h, taban yarıçapı r ve hacmi V ile gösterilirse silindirin hacmi

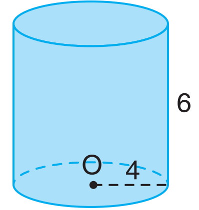
Hacim = taban alanı.yükseklik eşitliğiyle bulunur.

$V = \pi.r^2.h$ ile bulunur.



Uygulayalım:

Taban yarıçapı 4 br ve yüksekliği 6 br olan dik dairesel silindirin hacmi kaç br^3 tür? Bulalım.



Çözelim:

Bir dik dairesel silindir, prizma özelliği taşır. Verilen silindir prizma gibi düşünüldüğünde

$T_A = \pi.r^2 = \pi.4^2 = 16.\pi$ br^2 dir.

Prizmaların hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. Buna göre

Silindirin hacmi = $16.\pi.6 = 96.\pi$ br^3 olarak bulunur.

Uygulayalım:

Taban alanı $25.\pi$ br^2 ve yanal alanı $40.\pi$ br^2 olan bir dik dairesel silindirin hacmi kaç br^3 tür? Bulalım.

Çözelim

$T_A = \pi.r^2$
$25.\pi = \pi.r^2$
$25 = r^2$
5 br $= r$

ve

$Y_A = 2.\pi.r.h$
$40.\pi = 2.\pi.r.h$
$40.\pi = 2.\pi.5.h$
4 br $= h$

ise

$V = \pi.r^2.h$
$V = \pi.5^2.4$
$V = 100.\pi$ br^3
bulunur.

Uygulayalım:

Bir dik dairesel silindirin taban çevresi $16.\pi$ br ve hacmi $128.\pi$ br^3 olduğuna göre yüzey alanı kaç br^2 dir? Bulalım.

Çözelim

$T_Ç = 2.\pi.r$
$16.\pi = 2.\pi.r$
8 br $= r$

ve

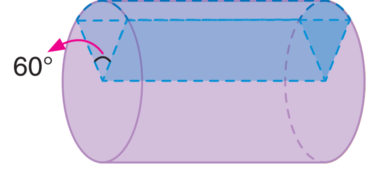
$V = \pi.r^2.h$
$128.\pi = \pi.8^2.h$
2 br $= h$

ise

$A = 2.\pi.r.(r + h)$
$A = 2.\pi.8.(8 + 2)$
$A = 160.\pi$ br^2
bulunur.

Uygulayalım:

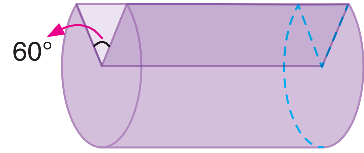
Taban yarıçapı 6 br ve yüksekliği 10 br olan yandaki şekilde görülen dik dairesel silindirin 60° lik kısmı kesilip çıkarılıyor. Silindirin kalan kısmının hacmi kaç br^3 tür? bulalım.



Çözelim:

Silindirin kesilmeden önceki hacmi,

$V = \pi.r^2.h = \pi.6^2.10 = 360.\pi.br^3$ tür.



Kesilen kısım çıkartıldıktan sonra kalan hacmi orantı yoluyla hesaplarsak

360° lik kısım	$360.\pi$	br^3 ise
60° lik kısım	x	br^3 tür.

D.O.

$360°.x = 60°.360.\pi \Rightarrow x = 60.\pi\ br^3$ bulunur. Bu, kesilen parçanın hacmidir.

Kalan kısmın hacmi $= 360.\pi - 60.\pi = 300.\pi\ br^3$ olur.

Uygulayalım:

Uzun kenarı 8 br ve kısa kenarı 6 br olan bir dikdörtgensel kâğıdın uzun kenarı etrafında kıvrılmasıyla oluşan silindirin hacmi V_1, kısa kenarı etrafında kıvrılmasıyla oluşan silindirin hacmi V_2 olduğuna göre $\frac{V_1}{V_2}$ oranı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

1. durumda kâğıt uzun kenarı etrafında kıvrıldığından uzun kenar taban çevresi, kısa kenar ise yükseklik durumundadır.

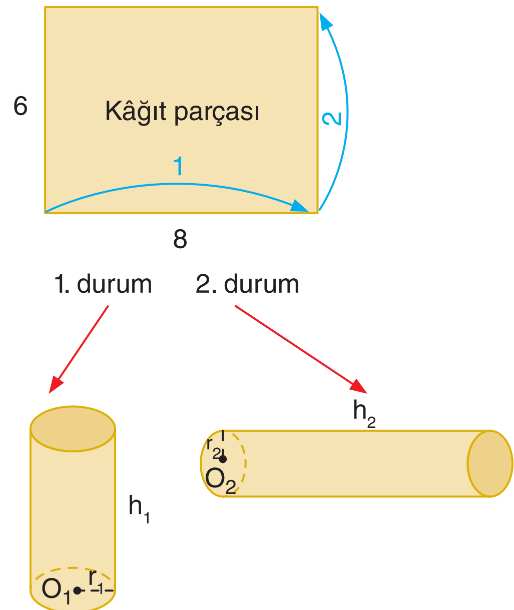
$2.\pi.r_1 = 8 \Rightarrow r_1 = \frac{4}{\pi}$ ve $h_1 = 6$ br dir.

$V_1 = \pi.\left(\frac{4}{\pi}\right)^2.6 \Rightarrow V_1 = \frac{96}{\pi}\ br^3$ bulunur.

2. durumda kâğıt kısa kenarı etrafında kıvrıldığından kısa kenar taban çevresi, uzun kenar yükseklik durumundadır.

$2.\pi.r_2 = 6 \Rightarrow r_2 = \frac{3}{\pi}$ br ve $h_2 = 8$ br dir.

$V_2 = \pi.\left(\frac{3}{\pi}\right)^2.8 \Rightarrow V_2 = \frac{72}{\pi}\ br^3$ bulunur.

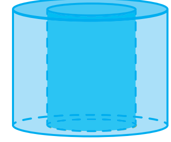


İstenilen oran,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{96}{\pi}}{\frac{72}{\pi}} = \frac{96}{\pi}.\frac{\pi}{72} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Uygulayalım:

Sağdaki şekilde demirden yapılmış borunun dış çapı 16 br, iç çapı 6 br ve yüksekliği 8 br dir. Verilenlere göre bu borunun hacmini ve yüzey alanını bulalım.



Çözelim:

Büyük silindirin yarıçapı = $\frac{16}{2}$ = 8 br ve küçük silindirin yarıçapı = $\frac{6}{2}$ = 3 br dir.

Borunun hacmi bulunurken iki dik dairesel silindirin hacimlerinin farkı alınmalıdır.

$V_{boru} = \pi.8^2.8 - \pi.3^2.8 = 440.\pi$ br^3 bulunur. Yüzey alanını aşağıdaki gibi bulabiliriz:

A = (büyük silindirin yanal alanı) + (küçük silindirin yanal alanı) + (alt daire halkasının alanı) + (üst daire halkasının alanı)

$A = 2.\pi.8.8 + 2.\pi.3.8 + \pi.(8^2 - 3^2) + \pi.(8^2 - 3^2) = 128.\pi + 48.\pi + 55.\pi + 55.\pi$ ise

$A = 286.\pi$ br^2 dir. Yani demir borunun yüzey alanı $286.\pi$ br^2 bulunur.

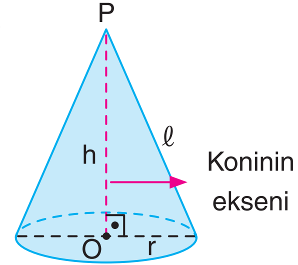
Hatırlayalım:

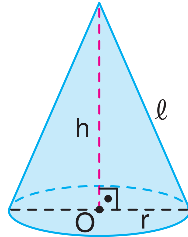
Koninin tabanının merkezi ve tepe noktasından geçen doğruya **koninin ekseni**, eksen taban düzlemine dik ise koniye **dik koni** denir.

Dik koninin tepe noktası ile taban düzlemi arasındaki dikme parçasına dik koninin **yüksekliği**, tabanı daire olan dik koniye ise **dik dairesel koni** adı verilir.

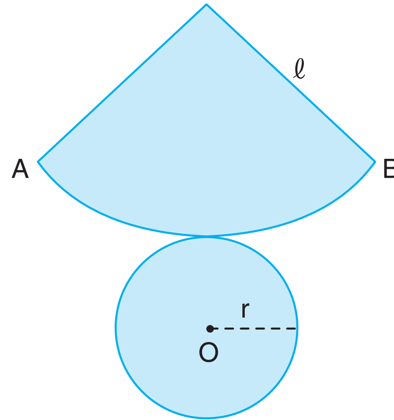
r = taban yarıçapı, PO doğrusu = koninin ekseni

ℓ = ana doğru, h = koninin yüksekliği





1. şekil



2. şekil

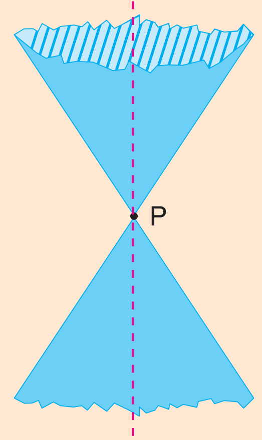
Yukarıda 1. şekildeki dairesel koninin açınımı, 2. şekildeki gibidir. Dikkat edilirse açınım, bir daire ve büyük bir daire diliminden oluşmaktadır.

Verilen dik dairesel konide r = taban yarıçapı, h = cisim yüksekliği ve

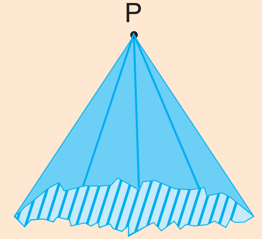
ℓ = ana doğrunun uzunluğu olmak üzere

$r^2 + h^2 = \ell^2$ eşitliği, Pisagor teoreminin bir sonucudur.

Öğrenelim:



Verilen düzlemsel bir eğriyi kesen ve eğri düzleminde olmayan sabit bir noktadan geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konisel yüzey**, bu eğriye **konisel yüzeyin dayanak eğrisi**, konisel yüzey oluşturulurken belirlenen ilk doğruya **konisel yüzeyin üreteci**, her bir doğruya **konisel yüzeyin elemanı**, sabit noktaya **konisel yüzeyin tepe noktası**, tepe noktasının altında ve üstünde oluşan konisel yüzey parçalarına **konisel yüzeyin kanatları** denir.



Dayanak eğrisi kapalı olan konisel yüzeyin bir kanadının sınırladığı bölgenin dayanak eğrisinin düzlemine paralel ve tepe noktasından geçmeyen bir düzlem ile sınırlı parçasına **koni yüzeyi**, bu düzlemsel kesite **koni yüzeyinin tabanı**, diğer kısmına da **koni yüzeyinin yanal yüzeyi** denir. Koni yüzeyi ile sınırlı bölge, **koni** olarak adlandırılır.

Uygulayalım:

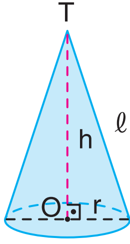
Aşağıdaki koniler üzerinde gösterilen elemanları inceleyelim.

Çözelim:

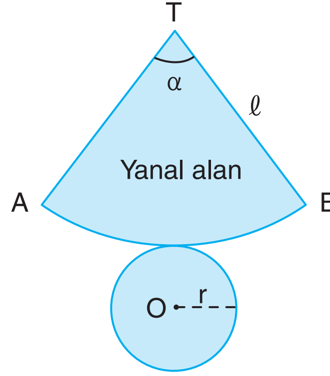
Tanıyalım:

Parlak bir tarih ve ilim geçmişine sahip olan Harran, tarih boyunca birçok devletin hâkimiyetine girdiğinden kültürlerin kaynaştığı bir bölge olmuş ve zengin mimari eserlerle donatılmıştır. Kentin ortasında yer alan höyükte ve sur içerisindeki harabelerde Sin Mabedi ve üniversite dahil en eski mimari eserlerin temel kalıntıları yer almaktadır. Harran'ın zengin mimarisinden sadece surlar, iç surlar, iç kale, Ulu Cami ile konik kubbe biçimli evler günümüze gelmiştir. Harran'ın en çok ilgi çeken yanı, bindirme tekniğinde yapılmış külah biçimindeki konik kubbeli evlerdir. Harran evleri, bindirme tekniğinde örülen tuğlaların gittikçe daralan konik bir külah şeklini almasından oluşan kubbelerle örtülmüştür. Yüksekliği içerden en çok 5 m ye varan kubbeler, 30 - 40 tuğla dizisi ile örülmüştür. (ekitap.kulturturizm.gov.tr adresinden 01.02.2018 tarihinde alınmıştır.)

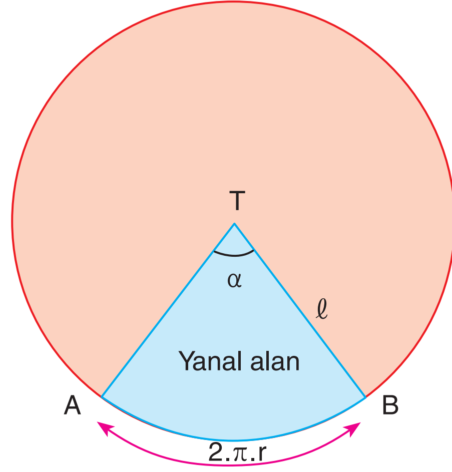
Keşfedelim:



1. şekil



2. şekil



3. şekil

1. 1. şekli inceleyerek koninin yüksekliği, taban yarıçapı ve yanal yüksekliği (ana doğrusu) arasındaki ilişkiyi veren denklemi yazınız.

2. 2. şekil, 1. şekilde verilen koninin açınımıdır. İnceleyiniz.

3. AB yayının uzunluğunun ℓ (ana doğru uzunluğu) cinsinden eşitini, 3. şekli yorumlayarak yazınız.

4. Taban çevre uzunluğu ile AB yayının uzunluğunu ℓ cinsinden ifade ederek yarıçap ve ana doğru uzunluğuna bağlı eşitliği bulunuz.

5. Oluşturduğunuz bağıntıyı daire diliminin alan formülünde yerine yazarak koninin yanal alanının yarıçap ve ana doğruya bağlı eşitini bulunuz.

6. Koninin taban alanını bulunuz.

▶ Koninin yüzey alanını bularak buradan yarıçap ve ana doğru uzunluğuna bağlı olarak yüzey alanının nasıl bulunması gerektiğini açıklayınız.

Öğrenelim:

Sağdaki şekilde açınımı verilen dik dairesel konide

$|\overset{\frown}{AB}| = 2.\pi.r \Rightarrow 2.\pi.\ell.\dfrac{\alpha}{360^\circ} = 2.\pi.r$ eşitliğinden

$\dfrac{r}{\ell} = \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ elde edilir.

Daire diliminin alanı,

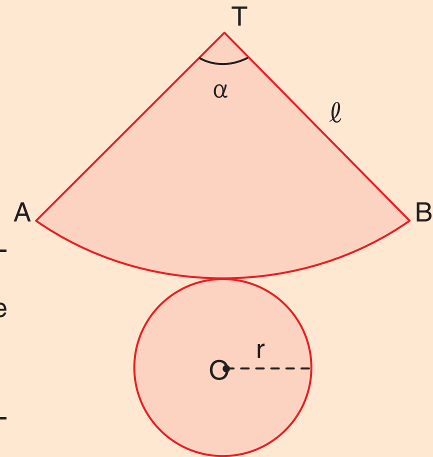
$\pi.\ell^2.\dfrac{\alpha}{360^\circ} = \pi.\ell^2.\dfrac{r}{\ell} = \pi.r.\ell$ olarak bulunur.

Yani koninin yanal alanı, $Y_A = \pi.r.\ell$ bağıntısıyla elde edilir. Bu bağıntının sağ tarafı 2 ile çarpılıp 2 ile bölündüğünde

$Y_A = \dfrac{2.\pi.r.\ell}{2} = \dfrac{T_Ç.\ell}{2}$ bulunur.

Yanal yüz alanı ve daire biçimindeki taban alanlarının toplamı, koninin yüzey alanını verir.

$Alan = T_A + Y_A = \pi.r^2 + \pi.r.\ell = \pi.r.(r + \ell)$ olarak bulunur.



Uygulayalım:

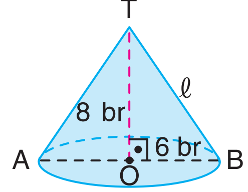
Taban çevresi $12.\pi$ br ve ana doğrusunun uzunluğu 8 br olan dik dairesel koninin yüzey alanı kaç br^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

$T_ç = 2.\pi.r = 12.\pi \Rightarrow r = 6$ br ise $A = \pi.r.(r + \ell) \Rightarrow A = \pi.6.(6 + 8) \Rightarrow A = 84.\pi$ br^2 dir.

Uygulayalım:

Sağdaki şekilde taban yarıçapı 6 br ve yüksekliği 8 br olan bir dik dairesel koni görülmektedir. Bu koninin açınımında oluşan daire diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derecedir? Bulalım.



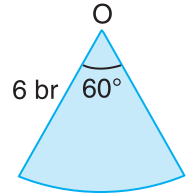
Çözelim:

$r^2 + h^2 = \ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$\Rightarrow \ell = 10$ br ise $\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = 216^\circ$ dir.

Uygulayalım:

Sağdaki şekilde verilen O merkezli ve 60° lik merkez açı ölçüsüne sahip 6 br yarıçaplı daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koniye dönüştürülüyor. Tabanı uygun bir daire ile kapatılan bu koninin yüzey alanı kaç br^2 dir? Bulalım.



Çözelim:

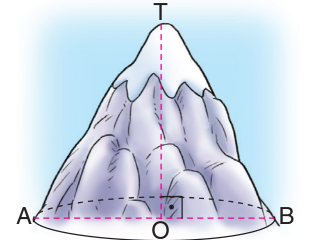
$\alpha = 60^\circ$ ve $\ell = 6$ br ise $\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{r}{6} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r = 1$ br bulunur.

$A = \pi.r.(r + \ell) = \pi.1.(1 + 6) = 7.\pi$ br^2 dir.

Uygulayalım:

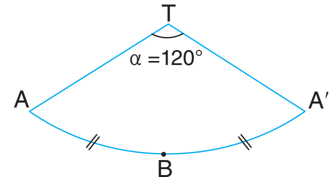
Sağdaki şekil, yer düzleminde bulunan koni biçimindeki bir dağın temsilî çizimidir.

A, O ve B doğrusal, $[TO] \perp [AB]$, $|AO| = 1$ km, $|AT| = 3$ km olduğuna göre bu dağın A noktasında bulunup B noktasına ulaşmaya çalışan biri en az kaç km yürümelidir? Bulalım.



Çözelim:

Dağın hatlarını oluşturan dik koninin açınımı yapıldığında sağdaki şekle benzer bir çizim oluşur.

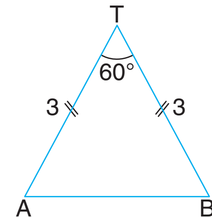


r = 1 km ve $\ell = 3$ km olduğundan

$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$ bulunur.

B noktası, A ve A′ noktalarının tam ortasında olduğundan

$$m(\widehat{ATB}) = \frac{m(\widehat{ATA'})}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{dir.}$$



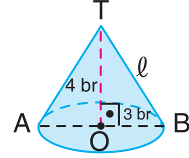
$|TA| = |TB| = \ell = 3$ km olduğundan TAB eşkenar üçgeni oluşur. A dan B ye en kısa yol, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu kadardır. TAB eşkenar üçgen olacağından $|AB| = 3$ km bulunur. Yani yol, en az 3 km dir.

Uygulayalım:

Taban yarıçapı 3 br ve yüksekliği 4 br olarak verilen dik dairesel koninin yüzey alanı kaç br^2 dir? Bulalım.

Çözelim:

Verilenlere göre koninin açınımı yapıldığında merkez açısı α ve yarıçapı ℓ olan daire dilimi ile koninin tabanında yer alan dairenin bulunduğu sağdaki şekil oluşur. Koninin yüzey alanı, bu iki şeklin alanları toplamıdır. TOB dik üçgeninde

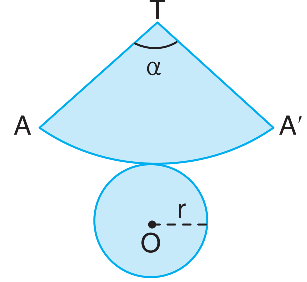


$\ell^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \ell = 5$ br bulunur.

$|\overset{\frown}{AA'}|$ = Taban çevresi,

$\Rightarrow 2.\pi.\ell.\dfrac{\alpha}{360^\circ} = 2.\pi.r$

$\Rightarrow 5.\dfrac{\alpha}{360^\circ} = 3 \Rightarrow \alpha = 216^\circ$ bulunur.



Taban alan = $T_A = \pi.r^2 = \pi.3^2 = 9.\pi$ br^2 dir.

Yanal alan = $\dfrac{\pi.\ell^2.\alpha}{360^\circ} = \dfrac{\pi.5^2.216^\circ}{360^\circ} = 15.\pi$ br^2 dir.

Koninin yüzey alanı = $9.\pi + 15.\pi = 24.\pi$ br^2 bulunur.

Uygulayalım:

Merkez açısının ölçüsü 72° olan 10 br yarıçaplı bir daire diliminin kıvrılması sonucu oluşan dik dairesel koninin yüksekliği kaç br olur? Bulalım.

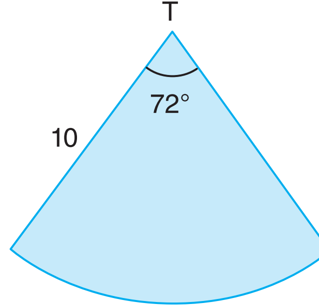
Çözelim:

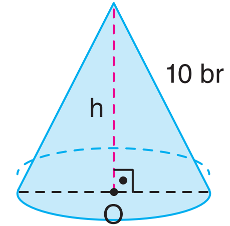
$\alpha = 72^\circ$ ve $\ell = 10$ br ise

$\dfrac{r}{\ell} = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \dfrac{r}{10} = \dfrac{72^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r = 2$ br dir.

$r^2 + h^2 = \ell^2 \Rightarrow 2^2 + h^2 = 10^2$

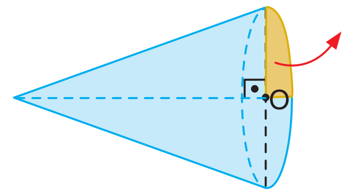
$\Rightarrow h = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ br bulunur.





Uygulayalım:

Şekilde taban yarıçapı $2\sqrt{3}$ br ve yanal ayrıtı uzunluğu 5 br olan dik koninin 90° lik kısmı, koni ekseni boyunca kesilip çıkartılıyor. Kalan cismin yüzey alanı kaç br^2 dir? Hesaplayalım.



Çözelim:

Başlangıçtaki koninin yüzey alanının $\dfrac{3}{4}$ ünü bulup kesilen kısmın oluşturduğu yüzeylerin alanlarını toplamamız gerekir.

Kesilen kısım çıkartıldıktan sonra 2 tane dik üçgen alanı oluşacaktır.

$r^2 + h^2 = \ell^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{13}$ br dir.

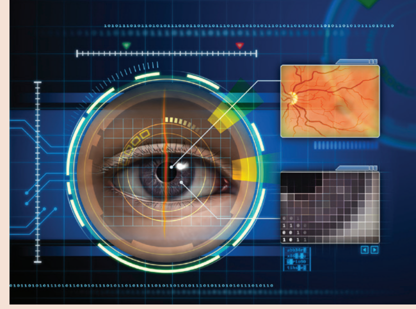
Kalan cismin yüzey alanı = koninin yüzey alanı$\cdot\dfrac{3}{4}$ + 2 dik üçgenin alanı ise

$A = \pi.r.(r + \ell)\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{r.h}{2}\cdot 2 \Rightarrow A = \pi.2\sqrt{3}.(2\sqrt{3} + 5).\dfrac{3}{4} + \dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{13}}{2}\cdot 2$

$A = 2\sqrt{39} + \pi.\left(\dfrac{18 + 15\sqrt{3}}{2}\right)$ br^2 bulunur.

Tanıyalım:

Gözümüzde bulunan retinada milyonlarca sinir ucu vardır. Retinada bulunan ışığa duyarlı iki hücre türünden biri, koni şekline benzediği için **koni hücre** olarak adlandırılmıştır. Koni hücre, retinanın tam ortasında olup 6 milyon tane kadardır. Koni hücreleri, esas olarak renkli görüşten sorumlu ve sadece aydınlıkta işlev görebilmektedir. Bu nedenle de karanlıkta renkleri ayırt edemeyiz. Retina üzerinde görüşün en net olduğu yer olarak bilinen fovea veya sarı leke olarak bilinen bölgede de sadece koni hücreleri bulunmaktadır (www.biltek.tubitak.gov.tr adresinden 20.01.2018 tarihinde alınmıştır.).



Keşfedelim:

Araç ve gereçler: karton, kum

Kartondan tabanları eş ve yükseklikleri eşit dik dairesel silindir ile dik dairesel koniyi oluşturarak aşağıdaki etkinlik adımlarını gerçekleştiriniz.

1. Tabanı açık koninin içine kum doldurarak üst tabanı açık silindirin içine boşaltınız.
2. Bu işlemi silindirin içi doluncaya kadar tekrarlayınız.
3. Bu işlem kaç kez tekrarlandığında silindirin tam olarak dolduğunu belirleyiniz.
4. Silindir ve koninin hacimleri arasındaki ilişkiyi tartışınız.

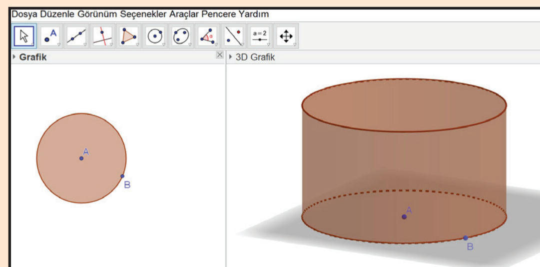
▶ Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik dairesel koninin hacmini r ve h değerine bağlı olarak nasıl bulunması gerektiğini açıklayınız.

Öğrenelim:

Silindirin hacmi ile koninin hacmini ilişkilendirelim. Bunun için bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanalım. GeoGebra yazılımında "Görünüm" sekmesinden 3D Grafik satırını tıklayarak yazılımda "3D Grafik" penceresi ve araç çubuklarını açalım. Bunu yaptıktan sonra aşağıdaki adımlarla aynı taban alanına ve yüksekliğe sahip dik dairesel silindir ile dik dairesel koninin hacimlerini karşılaştıralım.

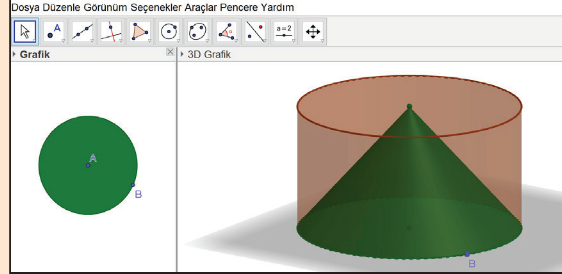
1. Adım:

"Grafik" penceresinde Merkez ve bir noktadan geçen çember araç çubuğu ile herhangi iki noktayı tıkladığınızda çember çizilir. Bu çember aynı zamanda "3D Grafik" penceresinden de çizilmiş olur. Daha sonra "3D Grafik" penceresinde Prizma veya Silindire Dönüştür araç çubuğu seçilerek çizilen çember tıklandıktan sonra ekrana gelen "Yükseklik" penceresine çizilecek silindirin yüksekliğine 3 girip "Tamam" butonuna basılınca silindir aşağıdaki gibi çizilmiş olur.



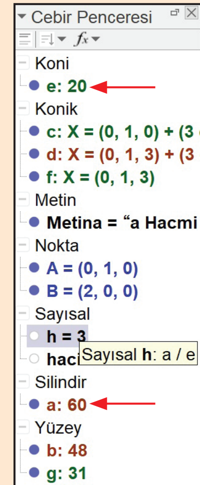
2. Adım:

Bu adımda çizilen silindirle aynı taban alanına ve yüksekliğine sahip koniyi oluşturalım. Piramit veya Koniye Döndür araç çubuğu seçildikten sonra silindirin tabanı olan daire tıklandıktan sonra ekrana gelen "Yükseklik" penceresine koninin yüksekliğine 3 yazılıp "Tamam" butonuna basılır. Aşağıdaki gibi ekran görüntüsü elde edilir.



3. Adım:

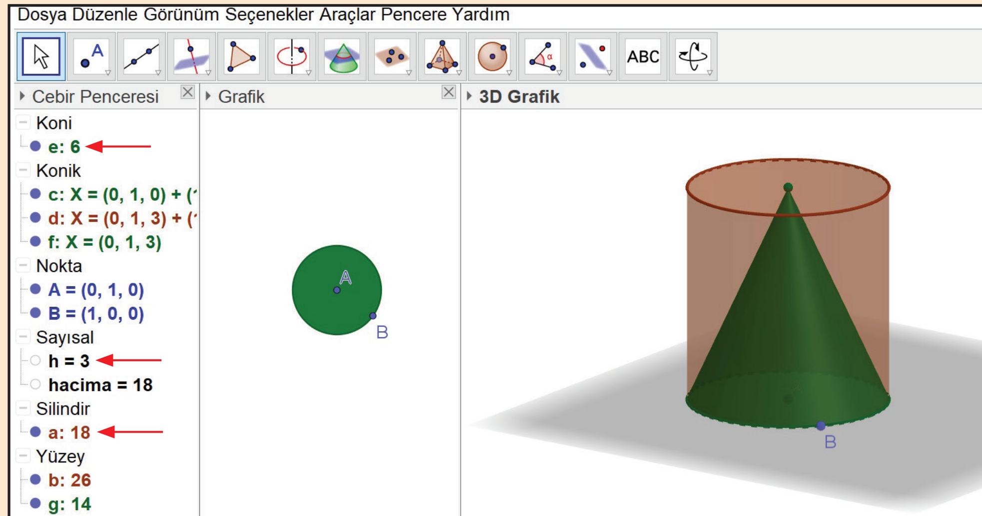
Şimdi yazılım yardımıyla çizilen silindir ve koninin hacmini hesaplatıp birbirine oranını bulduralım. Bunun için Hacim araç çubuğu seçilerek çizilen silindir ve koni tıklandığında hacimler bulunur. Ya da yazılımın "Görünüm" sekmesinden Cebir Penceresi araç çubuğuna tıklandığında "Cebir Penceresi" açılır. Yanda da görüldüğü gibi "Koninin altında hacmine e harfini verdiği 20" , "Silindir" in altında adına a dediği hacmi 60 olarak bulunmuştur. Yazılımın "Giriş" satırına "a/e" yazıldığında "Cebir Penceresinde" yanda da görüldüğü gibi "Sayısal" altında h = 3 bulunur.



Bu değer, silindirin hacminin koninin hacmine oranıdır.

4. Adım:

"Grafik" penceresinden silindir ve koninin tabanı olan daireyi B noktasından tutup sürüklediğimizde bu oranın bozulmadığı görülür.



Herhangi bir dik dairesel koninin hacmi, aynı taban alanı ve yüksekliğe sahip dik dairesel silindirin hacminin $\frac{1}{3}$ ü kadardır.

Bu durumda taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir dik dairesel koninin hacmi,

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ bağıntısı ile bulunur.

Uygulayalım:

Taban yarıçapı $2\sqrt{2}$ br ve yüksekliği 6 br olan dik dairesel koninin hacmi kaç br^3 tür? Bulalım.

Çözelim:

Koni, piramit özelliği taşıyan bir cisimdir. Piramitlerin hacimleri bulunurken izlenen yöntemi kullanalım. Koninin taban alanı,

$T_A = \pi.r^2 = \pi.(2\sqrt{2})^2 = 8.\pi$ br^2 dir.

Koninin hacmi $= \dfrac{T_A.h}{3} = \dfrac{8.\pi.6}{3} = 16.\pi$ br^3 tür.

Uygulayalım:

Taban yarıçapı 15 cm ve yüksekliği 20 cm olan sağdaki dik dairesel koni biçimli pastanın $\frac{1}{4}$ lük kısmı kesilip çıkartılmıştır. Pastanın kalan kısmının hacmi kaç cm^3 tür? Bulalım.

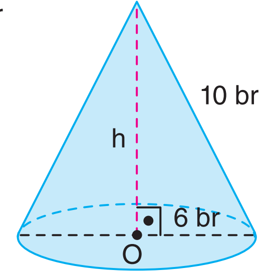
Çözelim:

İlk hacim $= \frac{1}{3}.\pi.15^2.20 = 1500.\pi$ cm^3 tür.

Kesilen kısım $\frac{1}{4}$ ve kalan kısım $\frac{3}{4}$ lük hacme sahiptir.

Kalan kısmın hacmi $= 1500.\pi.\frac{3}{4} = 1125.\pi$ cm^3 bulunur.

Uygulayalım:



Yandaki dik dairesel koninin taban yarıçapı 6 br ve ana doğrusu 10 br ise hacmi kaç br^3 tür? Bulalım.

Çözelim:

$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 + 36 = 100$

$\Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$ br dir.

$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h = \frac{1}{3}.\pi.6^2.8 = 96.\pi$ br^3 olur.

Uygulayalım:

Bir dik dairesel koninin taban yarıçapı 2 kat arttırılıp yüksekliği yarıya indirilirse hacmi kaç katına çıkar? Bulalım.

Çözelim:

İlk taban yarıçapı r ve yükseklik h olsun. Taban yarıçapı 2 kat artırılırsa uzunluğu r + 2.r = 3.r olur. Yükseklik yarıya indirilirse uzunluğu $\frac{h}{2}$ olur.

$V_{ilk} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$ ve $V_{son} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(3r)^2\cdot\frac{h}{2} = \frac{3.\pi.r^2.h}{2}$ olur.

$$\frac{V_{son}}{V_{ilk}} = \frac{\frac{3.\pi.r^2.h}{2}}{\frac{\pi.r^2.h}{3}} = \frac{3.\pi.r^2.h}{2}\cdot\frac{3}{\pi.r^2.h} = \frac{9}{2} \text{ bulunur.}$$

Koninin hacmi, $\frac{9}{2}$ katına çıkar.

Öğrenelim:

Uzayda bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların kümesine **küre yüzeyi**, noktaya küre yüzeyinin **merkezi**, sabit uzaklığa küre yüzeyinin **yarıçapı**, küre yüzeyinin sınırladığı cisme **küre** adı verilir.

Aşağıdaki fotoğraflarda modeller üzerinde kürenin bazı elemanları gösterilmiştir.

1. fotoğraf

2. fotoğraf

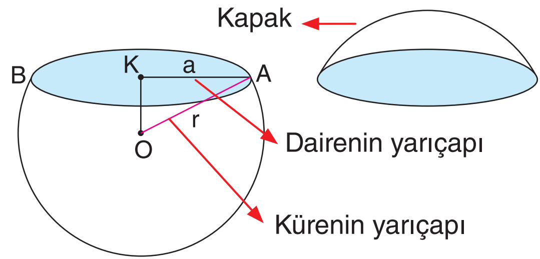
1. fotoğrafta sabit nokta olan büyük kürenin içindeki küçük küreye **kürenin merkezi**, merkezin küre yüzeyine uzaklığına **kürenin yarıçapı** adı verilir. Özel bir küre, merkezi ve yarıçapıyla belirlenir. O merkezli, r yarıçaplı çemberlere kürenin **en büyük çemberi** denir. 2. fotoğrafta da kürenin yüzeyi görülmektedir. Bir küre yüzeyi ile kürenin merkezinden geçen düzlemlerin ara kesitine **küre yüzeyinin büyük çemberleri** adı verilir.

Uygulayalım:

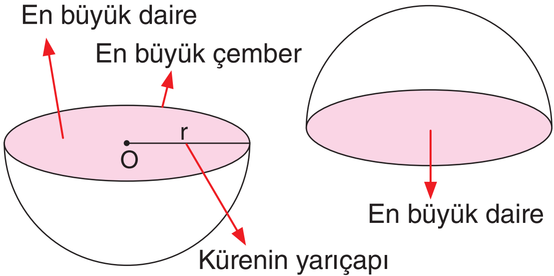
Şekillerdeki küreleri inceleyip temel elemanlarını gösterelim.

Çözelim:

Yandaki K merkezli a yarıçaplı daire, kürenin ortasından değil, herhangi bir yerinden kesilip de oluşturulmuştur. Bu nedenle kürenin yarıçapı ile bu dairenin yarıçapı farklıdır.



Yandaki O merkezli kürenin tam merkezinden geçen düzlem, küreyi iki eş parçaya ayırmıştır. Burada oluşan dairenin yarıçapı, kürenin yarıçapıdır. Tam ortasından kesilerek oluşturulan yarım kürelerdeki daireler, büyük dairelerdir.



Araştıralım:

Küremetrenin ne olduğunu ve ne amaçla kullanıldığını araştırınız.

Keşfedelim:

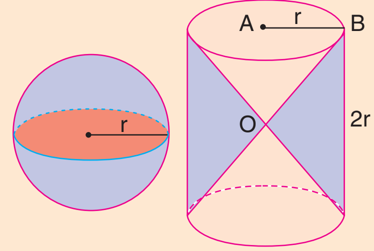
Araç ve gereçler: silindir ve küre modeli, kum, su, kap, ölçekli beher

1. Yüksekliği ve çapı eş bir silindir ile bu silindirin yarıçapına eş yarıçaplı küre modeli edininiz.
2. Kürenin içini kumla, dik silindirin içini su ile doldurunuz. Dik silindirin içine doldurduğunuz su miktarını ölçekli beherle ölçünüz.
3. Dik silindirdeki taşan suyun çevreye dökülmesini önlemek için bir kaba koyunuz. Ölçekli beherdeki suyu tekrar dik silindire aktarınız.
4. İçini kum ile doldurduğunuz küreyi, su dolu silindirin içine bırakınız.
5. Dik silindirden taşan suyu ölçekli behere döküp miktarını ölçünüz. Dik silindire doldurduğunuz su miktarının silindirin kaçta kaçı olduğunu belirleyiniz.

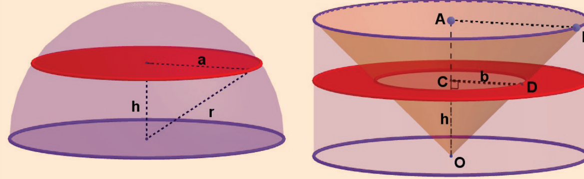
▶ Kürenin hacminin, dik silindirin hacmi yardımıyla nasıl bulunması gerektiğini tartışınız.

Öğrenelim:

Kürenin hacim bağıntısını elde edelim. Bunun için r yarıçaplı içi dolu küre ile taban yarıçapı r ve yüksekliği 2r olan içi dolu silindirden faydalanalım. Yandaki şekilde olduğu gibi silindirin içinden tabanları silindirin tabanları olan eş konileri çıkartalım. Geriye kalan hacim ile kürenin hacimlerini karşılaştıralım.



Kürenin ve silindirin yarısını alarak kürenin merkezinden ve silindirin içindeki konilerin ortak tepe noktasından h birim uzaklıkta bir düzlemle kürenin ve dik dairesel silindirin aşağıdaki gibi ara kesitlerinin alanlarını hesaplayalım. Aşağıdaki fotoğraflarda da görüldüğü gibi r yarıçaplı kürenin bir düzlemde arakesiti, a yarıçaplı bir dairedir.



Bu dairenin alanı $A = \pi a^2$ ve $a^2 = r^2 - h^2$ olduğundan $A = (r^2 - h^2).\pi$ bulunur.

Dik dairesel silindirin tabanına paralel bir düzlemle arakesiti içinden dik dairesel koniyi çıkardığımız için daire halkası elde edilir. Silindirin yüksekliğini kürenin yarıçap uzunluğunun 2 katı kadar aldığımızdan $|OA| = r$ dir. $|AB| = r$ olduğundan $\widehat{OAB}$ ikizkenar üçgendir. $\widehat{OCD} \sim \widehat{OAB}$ olduğundan $|OC| = |CD| = b = h$ elde edilir. Buradan

Arakesit halkasının alanı $= \pi r^2 - \pi b^2$ ve $b = h$ olduğundan

$$= \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2) \text{ bulunur.}$$

O hâlde kürenin ve içinden eş iki dik dairesel koni çıkarılmış dik dairesel silindirin arakesit alanları eşit olduğundan bu iki cisim eş hacimlidir. Bu durumda

Kürenin hacmi V = Silindirin hacmi – 2. Koninin hacmi

$$V = \pi.r^2.2r - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi r^2 = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ elde edilir.}$$

Uygulayalım:

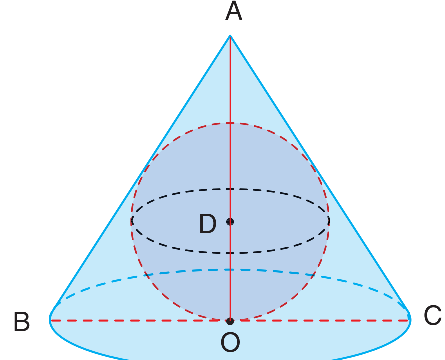
Yarıçap uzunluğu 6 br olan kürenin hacmini bulalım.

Çözelim:

r = 6 br ve $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$ bağıntısına göre $V = \frac{4}{3}.\pi.6^3 = \frac{4.\pi.216}{3} = 288.\pi\ br^3$ bulunur.

Uygulayalım:

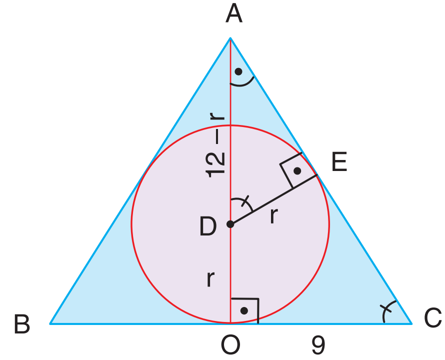
Yandaki şekilde taban yarıçapı 9 br ve yüksekliği 12 br olan bir dik dairesel koninin içinde yüzeylere ve tabana teğet durumda sıkıştırılmış bir küre görülmektedir. Koni ile küre arasında kalan boşluğun hacmi kaç br^3 tür? Bulalım.



Çözelim:

Öncelikle verilen şeklin ABC kesitini düzlemsel olarak çizip benzerlik teoremlerini kullanarak kürenin yarıçapını hesaplayalım.

Sağdaki şekil incelendiğinde teğet özelliğinden $[DE] \perp [AC]$ olmalıdır.



AOC üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2$ ise

$|AC|^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow |AC| = 15$ br dir.

$|DO| = r$, $|DE| = r$ ve $|AD| = (12 - r)$ bulunur.

$\widehat{ADE} \backsim \widehat{ACO}$ yazılabilir.

$\frac{|DE|}{|CO|} = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{12 - r}{15} \Rightarrow 5r = 36 - 3r$

$8r = 36 \Rightarrow r = \frac{9}{2}$ br olur.

Hacim = (koninin hacmi – kürenin hacmi) ile bulunur.

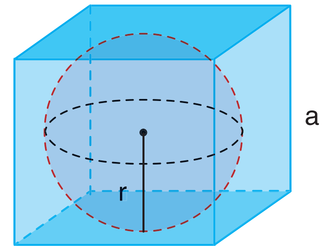
Boşluğun hacmi $= \frac{1}{3}.\pi.9^2.12 - \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{405.\pi}{2}\ br^3$ tür.

Uygulayalım:

Hacmi 216 cm^3 olan bir küpün içine sığabilecek en büyük hacimli kürenin hacmini bulalım.

Çözelim:

Yandaki şekilde görüldüğü gibi küre, küpün yüzeylerine teğet durumlu olmalıdır. Küpün bir ayrıt uzunluğu a ve kürenin yarıçapı r ise



2r = a olmalıdır.

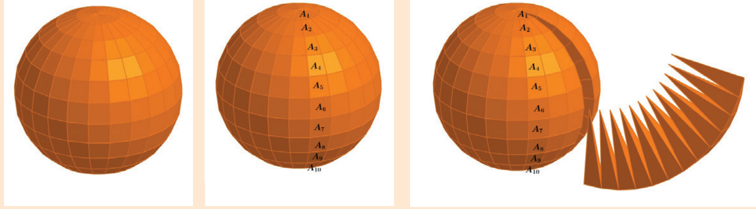
Küpün hacmi $a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$ cm bulunur.

$2r = 6 \Rightarrow r = 3$ cm dır.

O hâlde kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi\ cm^3$ bulunur.

Öğrenelim:

Kürenin yüzey alanının nasıl bulunacağını belirleyelim. Bunun için bir küreyi tepe noktası kürenin merkezinde ve tabanı küre yüzeyinde olan dik piramitle ve ayırıp aşağıdaki gibi bir küre oluşturalım. Bu piramitleri A_1, A_2, ..., A_n olarak isimlendirirsek çok sayıda kullanacağımız tüm piramitlerin hacmi yaklaşık olarak kürenin hacmine eşit olacaktır.



$$\frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + ... + \frac{1}{3}A_nr \approx \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)r \approx \frac{4}{3}\pi r^3$ çok sayıda n aldığımızda

$\frac{1}{3}$ (Piramitlerin taban alanları)r $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{1}{3}$ (Kürenin yüzey alanı)r $= \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{1}{3}A.r = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow A = 4\pi r^2$ elde edilir.

Demek ki yarıçapı r olan kürenin yüzey alanı,

$A = 4\pi r^2$ bağıntısı ile bulunur.

Uygulayalım:

Sadece 3 farklı oyuncak üreten bir firma yetkilisi Alper Bey kendine duyduğu özgüven, bilgi ve cesaretle firmasında bilye üretip satış yapmaya karar verir. Aldığı riskle ilk ay yarıçapı 1 cm ve 2 cm olarak ürettiği bilyelerden 100000 adet sipariş alır. Çok kâr yapmayı düşünmeyen ve iyi mal üretmek isteyen Alper Bey, bilyelerin yüzeyine zararsız fakat koruyucu olan ciladan sürülmek üzere m^2 sine 50 Kr vererek cila alır. Buna göre Alper Bey'in sipariş aldığı bilyeler için kaç TL cila ücreti vereceğini bulalım ($\pi \cong 3,14$ alınız.)

Çözelim:

Yarıçapları 1 cm ve 2 cm olan kürelerin yüzey alanlarını bulalım.

r = 1 için $A_1 = 4\pi r^2 \Rightarrow A_1 = 4 . 3,14 . 1^2 = 12,56\ cm^2$

r = 2 için $A_2 = 4\pi r^2 \Rightarrow A_2 = 4 . 3,14 . 2^2 = 50,24\ cm^2$

Her birinden 100000 adet sipariş aldığına göre tüm bilyelerin yüzey alanları,

$A = 100000A_1 + 100000A_2$

$A = 100000 . 12,5 + 100000 . 50,24 = 6280000\ cm^2$ bulunur.

Bilyelerin tüm yüzey alanlarını m^2 ye çevirip Alper Bey'in cila için vereceği ücreti belirleyelim.

$6280000\ cm^2 = 628\ m^2$

1 m^2 ücreti 50 Kr ise 628 . 50 = 31400 Kr olur.

31400 Kr = 314 TL bulunur.

Uygulayalım:

Yüzey alanı ile hacmi sayısal değerce eşit olan kürenin yarıçap uzunluğu kaç br dir? Bulalım.

Çözelim:

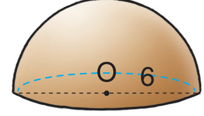
$V = A \Rightarrow \frac{4}{3}.\pi.r^3 = 4.\pi \cdot r^2 \Rightarrow r^3 = 3.r^2 \Rightarrow r = 3$ br olarak bulunur.

Uygulayalım:

Yarıçapı 6 cm olan küre biçimindeki bir tahta parçası iki eş parçaya ayrıldığında parçalardan herhangi birinin hacmini ve yüzey alanını bulalım.

Çözelim:

Hacim, tüm hacmin yarısıdır.Tüm hacim $\frac{4}{3}.\pi.6^3 = 288.\pi$ cm^3 olduğundan



yarım parçanın hacmi $= \frac{288.\pi}{2} = 144.\pi$ cm^3 bulunur.

Parçalardan herhangi birinin yüzey alanını bulmak için verilen kürenin yüzey alanını bulup sonucu yarım kürenin taban alanı ile toplamak gerekir.

Parçalardan birinin yüzey alanı = kürenin yüzey alanının yarısı + taban alan

Parçalardan birinin yüzey alanı $= \frac{4.\pi.r^2}{2} + \pi.r^2$

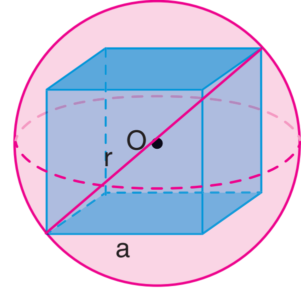
$= 2.\pi.6^2 + \pi.6^2 = 108.\pi$ cm^2 dir.

Uygulayalım:

Bir küre içine tüm köşe noktaları küre üzerinde olan küp yerleştirilmiştir. Küpün hacminin kürenin hacmine oranı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

Yandaki şekilde görüldüğü gibi kürenin yarıçapı r ve küpün ayrıt uzunluğu a olsun.



Şekil incelendiğinde istenilen durumda kürenin çapının küpün cisim köşegenine eşit olması gerekliliği sonucu ortaya çıkar. O hâlde

$2.r = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ bulunur.

Bu durumda $\frac{\text{küpün hacmi}}{\text{kürenin hacmi}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}.\pi.r^3} = \frac{\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4}{3}.\pi.r^3}$

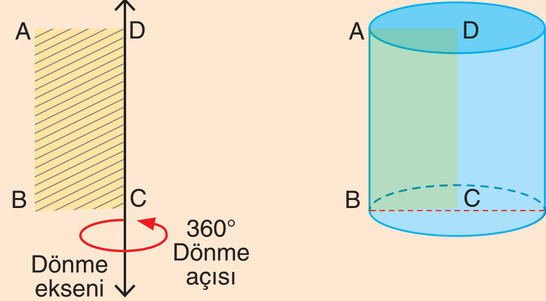
$\Rightarrow \frac{8.r^3}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4.\pi.r^3} = \frac{2}{\pi.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3.\pi}$ olur.

Yani küpün hacminin kürenin hacmine oranı, $\frac{2\sqrt{3}}{3.\pi}$ bulunur.

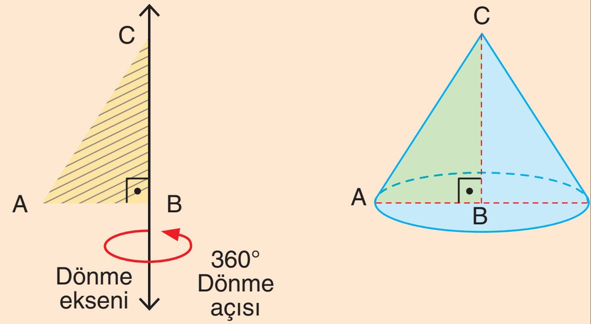
Öğrenelim:

Bu alt öğrenme alanı kapsamında öğrendiğimiz dik dairesel silindir, dik dairesel koni ve küre cisimleri, çeşitli dönme hareketleri sonucunda da elde edilebilir. Aşağıdaki açıklamaları inceleyiniz.

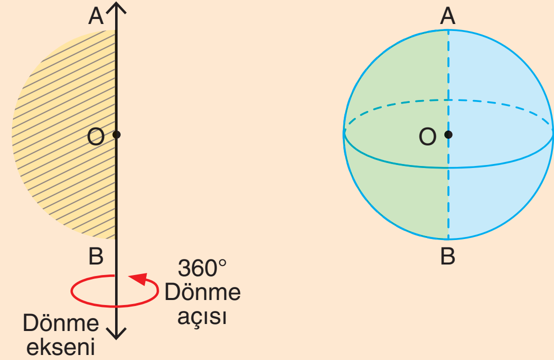
1. Bir dikdörtgenin bir ayrıtı boyunca 360° lik dönme hareketi sonucunda taradığı bölge, bir dik dairesel silindir oluşturur. Sağdaki şekilleri inceleyiniz.



2. Bir dik üçgen herhangi bir dik kenarı boyunca 360° lik dönme hareketi sonucunda taradığı bölge, bir dik dairesel koniyi oluşturur. Sağdaki şekilleri inceleyiniz.



3. Bir yarım dairenin çapı etrafında 360° lik dönme hareketi sonucunda taradığı bölge, bir küre oluşturur. Sağdaki şekilleri inceleyiniz.

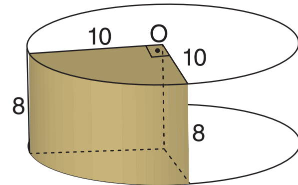


Uygulayalım:

Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları 8 cm ve 10 cm dir. Buna göre dikdörtgenin uzun kenarı etrafında 90° döndürüldüğünde elde edilecek cismin hacminin kaç cm^3 olacağını bulalım.

Çözelim:

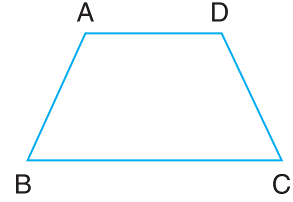
Dikdörtgen uzun kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde yarıçapı 10 cm ve yüksekliği 8 cm olan dik dairesel silindir elde edilir. Fakat 90° döndürüldüğünden elde edilecek cismin hacmi silindirin hacminin $\frac{1}{4}$ i kadar olacaktır.



$V = \pi r^2 h.\frac{1}{4} \Rightarrow V = \pi.10^2.8.\frac{1}{4} = 200\pi$ cm^2 elde edilir.

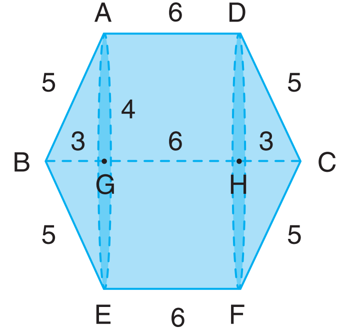
Uygulayalım:

Sağdaki ABCD ikizkenar yamuğunda [AD] // [BC], |AB| = |DC| = 5 br, |AD| = 6 br ve |BC| = 12 br ise ABCD ikizkenar yamuğunun [BC] etrafında 360° dönmesiyle oluşan cismin hacmini ve yüzey alanını bulalım.



Çözelim:

Dönme sonucunda meydan gelen cisim sağdaki şekilde görüldüğü gibi iki eş dik dairesel koni ile bir dik dairesel silindirdir.



|AD| = |GH| = |EF| = 6 br,

$|BG| = |HC| = \dfrac{|BC| - |GH|}{2} = \dfrac{12 - 6}{2} = 3$ br,

$|AG|^2 + |BG|^2 = |AB|^2 \Rightarrow |AG| = 4$ br bulunur.

Cismin hacmi $= 2.\frac{1}{3}.\pi.4^2.3 + \pi.4^2.6 = 32.\pi + 96.\pi$ ise

Cismin hacmi $= 128.\pi$ br^3 olur.

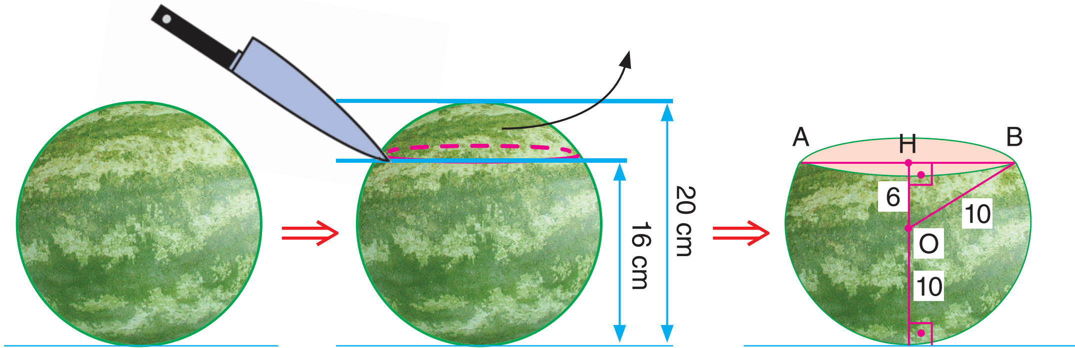
Cismin yüzey alanı = 2 koninin yanal alanı + silindirin yanal alanı

Cismin yüzey alanı $= 2.\pi.4.5 + 2.\pi.4.6 = 88.\pi$ br^2 bulunur.

Uygulayalım:

Düz bir masanın üstünde yarıçapı 10 cm olan küre biçiminde bir karpuz durmaktadır. Karpuz, masa düzlemine paralel ve 16 cm uzaklıktan bir bıçak darbesiyle kesilmiştir. Kesilen parça çıkarıldığında oluşan kesit yüzeyin alanını bulalım.

Çözelim:



Yukarıdaki şekiller incelendiğinde |OB| = r = 10 cm ve |OH| = 16 – r = 6 cm dir.

OHB üçgeninde Pisagor bağıntısını uygularsak

$|HB|^2 = |OB|^2 - |OH|^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow |HB|^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow |HB| = 8$ cm bulunur.

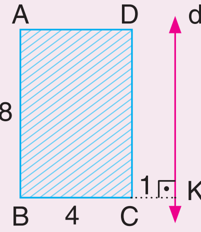
Oluşan kesit yüzey bir daire olup yarıçapı |HB| = 8 cm dir.

Kesit yüzeyin alanı ise $\pi.|HB|^2 = \pi.8^2 = 64.\pi$ cm^2 bulunur.

Pekiştirelim:

1. Taban dairesinin yarıçapı 6 cm ve yanal alanı $60.\pi$ cm^2 olan bir dik silindirin hacmi kaç cm^3 tür?

2. ABCD dikdörtgen, [BK] ⊥ d, |AB| = 8 cm, |BC| = 4 cm, |CK| = 1 cm olduğuna göre dikdörtgenin d ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç cm^3 tür?



3. Taban alanı $25.\pi$ br^2 ve yanal alanı $60.\pi$ br^2 olan silindirin

a. Taban yarıçapı kaç br dir?

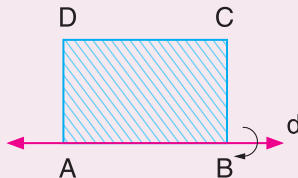
b. Yüksekliği kaç br dir?

c. Hacmi kaç br^3 tür?

ç. Alanı kaç br^2 dir?

4. Bir küpün içine yerleştirilen en büyük hacimli silindirin hacminin, küpün hacmine oranı kaçtır?

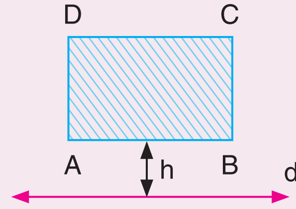
5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninin d doğrusu etrafında 360° dönmesiyle oluşan cismin alanını ve hacmini |AB| ile |BC| cinsinden bulunuz.

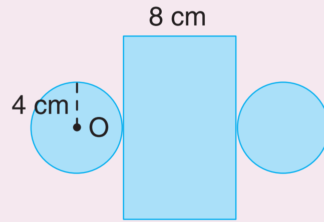
6. Yarıçapı 12 cm olan bir çeyrek dairenin kıvrılmasıyla oluşan dik koninin yüksekliği kaç cm dir?

7.



Yukarıdaki şekilde [AB] // d ve AB doğru parçasının d ye uzaklığı h dir. Buna göre ABCD dikdörtgeninin d doğrusu etrafında 180° dönmesiyle oluşan cismin hacmini |AB|, |BC| ve h cinsinden bulunuz.

8.



Bir dik silindirin açınımı yukarıdaki gibidir. Verilenlere göre bu silindirin hacmini ve alanını bulunuz (O: merkez).

9. Taban dairesinin alanı $36.\pi$ cm^2 ve yüksekliği 8 cm olan dik koninin yanal alanı kaç cm^2 dir?

10. Yüksekliği, yarıçapının $\frac{1}{6}$ sı olan koninin hacmi $12.\pi$ br^3 olduğuna göre bu koninin

a. Yarıçapı kaç br dir?

b. Ana doğrusu kaç br dir?

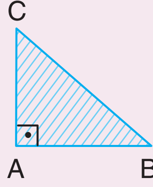
c. Alanı kaç br^2 dir?

11. Bir koninin yarıçapı 2 katına çıkarılıp yüksekliği yarıya indirilirse hacmi kaç katına çıkar?

12. Yarıçapı 13 cm olan bir küre, merkezinden 12 cm uzaklıkta bir düzlemde kesilmiştir. Oluşan kesit dairesinin alanı kaç cm^2 dir?

13. Yarıçapı r olan bir kürenin içine yerleştirilen en büyük hacimli küpün alanının kürenin alanına oranını bulunuz.

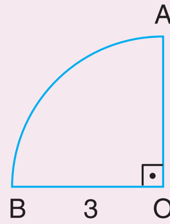
14. Yandaki şekilde [CA] ⊥ [AB] olduğuna göre CAB dik üçgeninin [AB] kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini ve alanını, ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları cinsinden hesaplayınız.



15. Alanı $64.\pi$ cm^2 olan bir kürenin hacmi kaç cm^3 tür?

16. Bir kürenin hacmi, sayısal değerce yüzey alanının 5 katına eşit ise çapı kaç br dir?

17.



Yarıçapı 3 cm olan yukarıdaki çeyrek dairenin AO yarıçapı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç cm^3 tür?

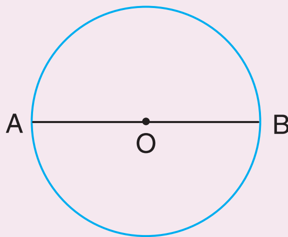
18. Bir küp içine yerleştirilen en büyük hacimli kürenin

a. Alanının küpün alanına oranını bulunuz.

b. Hacminin küpün hacmine oranını bulunuz.

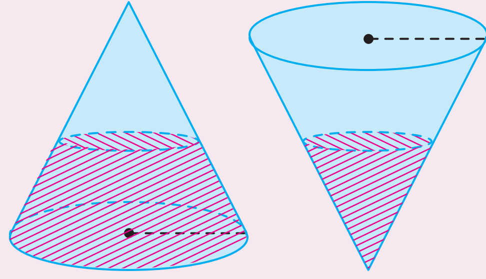
19. Bir madenî küre eritilerek hacimleri eşit 125 tane özdeş küre yapılıyor. Buna göre baştaki kürenin alanının oluşan kürelerden herhangi birinin alanına oranı kaçtır?

20.



Yukarıdaki şekilde O merkezli ve [AB] çaplı dairenin [AB] çapı etrafında 180° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini AB doğru parçasının uzunluğuna bağlı olarak bulunuz.

21.



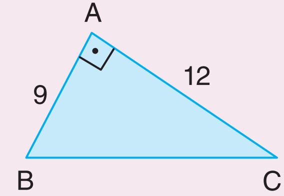
Yukarıda 1. şekilde yüksekliğinin yarısına kadar su ile dolu olan dik koni ile 2. şekildeki yüksekliğinin yarısına kadar su ile dolu koni özdeş olduğuna göre 1. şekildeki konide bulunan suyun hacminin, 2. şekildeki konide bulunan suyun hacmine oranı kaçtır?

22. Yandaki şekilde;

[AB] ⊥ [AC],

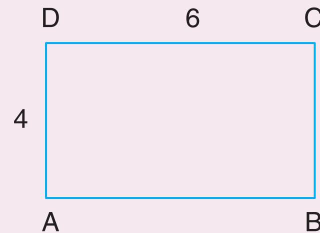
|AB| = 9 br,

|AC| = 12 br dir.



Bu dik üçgen, [BC] etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cismin hacmi kaç br^3 olur?

23.



Yukarıdaki şekilde; ABCD dikdörtgen,

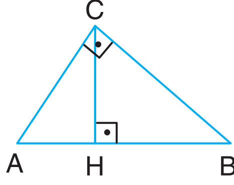
|AD| = 4 br ve

|DC| = 6 br dir.

ABCD dikdörtgeninin kıvrılıp [AB] ile [DC] nın çakıştırılması sonucu oluşan cismin hacmi kaç br^3 olur?

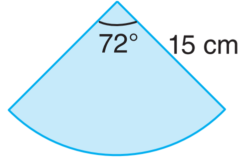
6. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1.



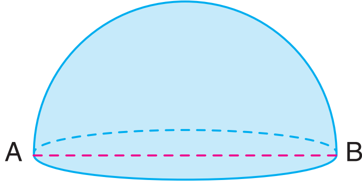
Yukarıdaki şekilde [AC] ⊥ [CB], [CH] ⊥ [AB], |CH| = 12 br ve |AH| = 9 br dir. ABC üçgeninin [AB] etrafında 180° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?

2.



Yukarıda merkez açısı 72° ve yarıçapı 15 cm olan daire dilimi verilmiştir. Bu daire diliminin oluşturduğu dik koninin taban alanı kaç cm^2 dir?

3.

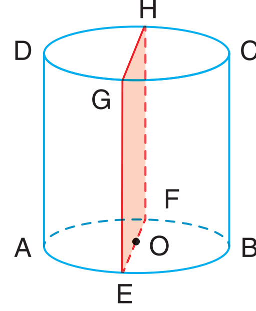


Yukarıdaki şekilde, [AB] çaplı yarım kürenin hacmi $18.\pi$ cm^3 tür. Bu yarım kürenin A noktasından B noktasına kürenin içinden ilerleyerek ulaşmak isteyen bir karıncanın alacağı yol en az kaç cm dir?

4. Hacminin br^3 türünden sayısal değeri taban alanının br^2 türünden sayısal değerine eşit olan bir koninin yüksekliği kaç br dir?

5. Taban çapı, yüksekliğinden (h) büyük olan dik silindirin içine yerleştirilen en büyük hacimli kürenin hacminin h değerine bağlı eşitini bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde dik silindirin içine alt ve üst taban çemberlerinin merkezinden geçecek şekilde EFHG dikdörtgeni çizilmiştir. Silindirin yüksekliği, çapının 2 katıdır. Silindirin taban yarıçapı 4 br olduğuna göre silindirin yüzey alanının dikdörtgenin alanına oranı kaçtır?

7. Yüksekliği taban yarıçapının 3 katı olan bir silindirin hacmi $24.\pi$ br^3 olduğuna göre yanal alanı kaç br^2 dir?

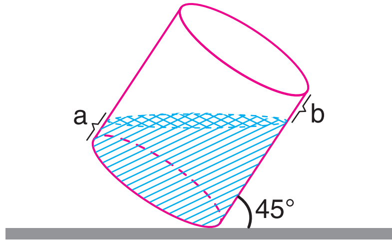
8. Hacmi $36.\pi$ cm^3 olan kürenin en büyük çemberinin sınırladığı alan kaç cm^2 dir?

9. Bir kürenin içine yerleştirilen en büyük hacimli küpün hacmi 64 cm^3 ise kürenin yüzey alanı kaç cm^2 dir?

10. Taban yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 4 cm olan bir dik koninin içine yerleştirilen en büyük hacimli kürenin yarıçapının uzunluğu kaç br dir?

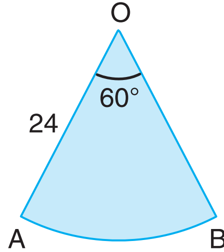
11. Bir küpün iç bölgesinden rastgele bir nokta alınıyor. Bu noktanın küpün tüm yüzeylerine olan uzaklıklarının toplamı 12 br dir. Küpün içine yerleştirilebilen en büyük hacimli kürenin yarıçapı kaç br olur?

12.



Taban yarıçapı 10 cm ve yüksekliği 30 cm olan bir silindir, 45° açı ile eğiliyor. Silindirin içindeki sıvı yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi durmaktadır. b = 8 cm olduğuna göre b – a kaç cm dir?

13.



Yukarıdaki O merkezli daire diliminde,

$|OA| = |OB| = 24$ cm ve $m(\widehat{AOB}) = 60°$ dir.

Bu daire dilimi kıvrılarak bir dik koni oluşturulacaktır. Oluşturulacak koninin taban yarıçapı kaç cm dir?

14. Yüksekliği, taban dairesinin yarıçapının 3 katı olan dik silindir veriliyor. Bu silindirin yanal alanının yüzey alanına oranı kaçtır?

15. Yanal alanı $30.\pi$ cm^2 ve hacmi $45.\pi$ cm^3 olan silindirin

a. Taban yarıçapı kaç cm dir?

b. Yüksekliği kaç cm dir?

c. Alanı kaç cm^2 dir?

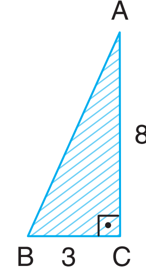
16. Bir silindirin yüksekliği 2 katına ve taban yarıçapı 5 katına çıkartılırsa yanal alanı ve hacmi nasıl değişir?

17. Yandaki şekilde

$[AC] \perp [BC]$,

$|BC| = 3$ cm ve

$|AC| = 8$ cm dir.



ABC dik üçgeninin [AC] etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç cm^3 tür?

18. Yanal alanı taban alanının 4 katı olan bir dik koninin ana doğrusu 12 cm ise bütün alanı kaç cm^2 dir?

19. Taban dairesinin çevresi $8.\pi$ cm ve yüksekliği 6 cm olan dik koninin hacmi kaç cm^3 tür?

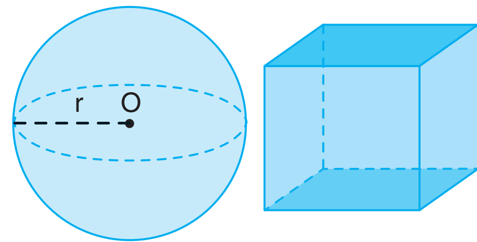
20. Alanı $100.\pi$ cm^2 ve taban çevresi $10.\pi$ cm olan koninin

a. Taban yarıçapı kaç cm dir?

b. Yüksekliği kaç cm dir?

c. Hacmi kaç cm^3 tür?

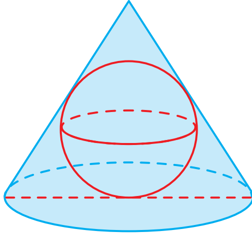
21.



Yukarıdaki şekilde yarıçapı r olan bir küre ve bir küp görülmektedir. Kürenin hacmi; sayısal değer olarak küpün alanına eşit olduğuna göre küpün hacminin r ye bağlı eşitini bulunuz.

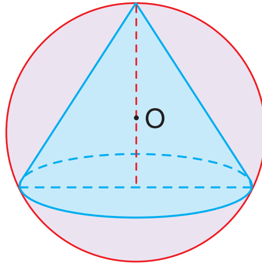
22. Bir ayrıtı a cm olan bir küpün dışına yerleştirilen en küçük hacimli kürenin hacminin a ya bağlı eşitini bulunuz.

23.



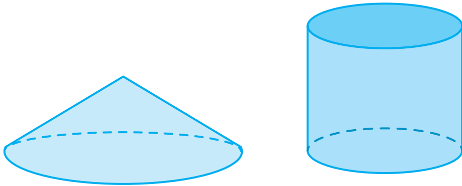
Taban yarıçapının uzunluğu 5 cm ve yüksekliği 12 cm olan şekildeki dik koninin içine teğet olacak biçimde yerleştirilen kürenin hacmi kaç cm^3 tür?

24.



Yukarıdaki şekilde O merkezli kürenin içine ekseni O dan geçen bir dik koni yerleştirilmiştir. Kürenin yarıçapı 10 cm ve O noktasının koninin tabanına uzaklığı 8 cm olduğuna göre koninin hacmi kaç cm^3 tür?

25.



Yukarıdaki şekilde dik koninin taban yarıçapı, silindirin yüksekliğine; silindirin taban yarıçapı, koninin yüksekliğine eşittir. Bu iki cismin hacimleri birbirine eşit olduğuna göre koninin taban alanının silindirin taban alanına oranı kaçtır?

26. Kenarları 30 cm ve 40 cm olan dikdörtgen biçimindeki karton, bükülerek dik silindir biçiminde boru hâline getirilecektir. Bükme işlemi uzun ve kısa kenar üzerine yapıldığında elde edilecek iki farklı silindirin yanal alanları oranı kaç olur?

27. Taban yarıçapı 8 cm ve yanal yüzeyinin alanı 9π cm^2 olan bir dik dairesel koninin yüksekliğinin ana doğrusuna oranı kaçtır?

28. Bir dik kenarı x olan ikizkenar dik üçgenin hipotenüsü etrafında 360° dönmesiyle oluşacak cismin hacmini bulunuz.

29. Güneşin yarıçapı, dünyanın yarıçapının yaklaşık 108 katıdır. Küre biçimindeki bu iki gezegenin hacimleri oranını bulunuz.

30. Bir küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dik dairesel silindirin yüksekliği 8 cm ve hacmi 7π cm^3 olduğuna göre kürenin yarıçapı kaç cm dir?

6. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. Yüksekliği 15 br olan bir dik silindirin taban yarıçapı 6 br arttırılırsa yanal alanı kaç π br^2 artar?

A) 45 B) 90 C) 135 D) 180 E) 200

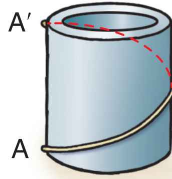
2. Eni 4 br ve boyu 10 br olan dikdörtgen şeklindeki bir kartonun 4 br lik kenarları çakıştırılarak elde edilen silindirin hacminin, 10 br lik kenarları çakıştırılarak elde edilen silindirin hacmine oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 3

3. Dış çapı 24 cm ve iç çapı 22 cm olan demirden yapılmış 3 m boyundaki boru için kaç π cm^3 demir kullanılmıştır?

A) 6000 B) 6300 C) 6600 D) 6900 E) 27600

4.



Yukarıdaki şekilde silindir borunun A noktası ile A′ noktası arasına gergin bir ip, bir kez sarılmıştır. Silindirin taban yarıçapı 8 br ve yüksekliği $12.\pi$ br olduğuna göre A ile A′ noktaları arasındaki gergin ipin uzunluğu **en az** kaç br dir?

A) 10 B) $10.\pi$ C) 20 D) $20.\pi$ E) $24.\pi$

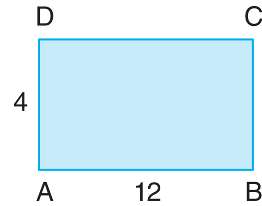
5. Hacmi $288.\pi$ br^3 olan küre biçimindeki bir karpuz, 3 bıçak darbesiyle tümü eş olan 8 küre dilimine ayrılıyor. Bu dilimlerden birinin yüzey alanı kaç br^2 olur?

A) $72.\pi$ B) $63.\pi$ C) $54.\pi$ D) $45.\pi$ E) $16.\pi$

6. Bir dik silindirin hacmini 2 katına çıkarmak için aşağıdaki işlemlerden hangisi yapılmalıdır?

A) Silindirin yarıçapı 2 katına çıkarılmalıdır.
B) Silindirin yarıçapı 4 katına çıkarılıp yüksekliği yarıya düşürülmelidir.
C) Silindirin yarıçapı yarıya düşürülüp yüksekliği 4 katına çıkarılmalıdır.
D) Silindirin yarıçapı 2 katına çıkarılıp yüksekliği yarıya düşürülmelidir.
E) Silindirin yüksekliği yarıya düşürülmelidir.

7.



Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgen, $|AB| = 12$ cm ve $|AD| = 4$ cm dir. ABCD dikdörtgeninin AB kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacminin, AD kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmine oranı aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

8. I. Bir dik silindirin yanal alanı, taban çevresi ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.
II. Bir dik silindirin alanı, taban alanı ile yanal alanının toplamına eşittir.
III. Bir dik silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Yukarıdaki ifadelerden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve III C) II ve III D) I ve II E) I, II ve III

9. Bir küre, merkezinden 3 br uzaklıktan bir düzlemle kesilmiştir. Oluşan kesit yüzeyin alanı $19.\pi$ br^2 olduğuna göre kürenin yarıçapı kaç br dir?

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{22}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $\sqrt{33}$ E) $\sqrt{37}$

10. Ana doğrusu, taban yarıçapının 4 katı olan bir dik koninin yüksekliği $2\sqrt{15}$ cm dir. Buna göre yanal alanı kaç cm^2 dir?

A) 6.π B) 8.π C) 10.π D) 12.π E) 16.π

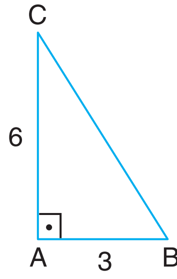
11. Taban yarıçapı $\sqrt{7}$ br ve ana doğrusu 4 br olan dik koninin hacmi kaç br^3 tür?

A) 3.π B) 4.π C) 5.π D) 6.π E) 7.π

12. Taban çevresi 8.π br ve yanal alanı 24.π br^2 olan koninin yüksekliği kaç br dir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{3}$

13. Sağdaki şekilde ABC dik üçgeninin önce AB dik kenarı, sonra AC dik kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle iki cisim oluşuyor. Oluşan ilk cismin hacminin ikinci cismin hacmine oranı kaçtır?



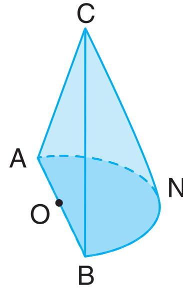
A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) 1

14. Sağdaki şekilde yarısı kesilmiş bir dik koni verilmiştir.

|AB| = 14 cm ve

|AC| = 25 cm

olduğuna göre cismin hacmi kaç cm^3 tür?

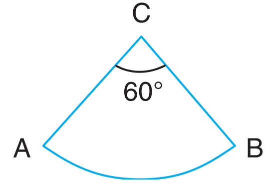


A) 108.π B) 116.π C) 120.π D) 182.π E) 196.π

15. Bir dik koninin yanal alanının tüm alanına oranı $\frac{5}{8}$ dir. Bu koninin yan yüz yüksekliği ℓ, taban yarıçapı r olduğuna göre ℓ ve r arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

A) $8.r = 5.\ell$ B) $3.r = 5.\ell$ C) $5.r = 3.\ell$ D) $5.r = \ell$ E) $r = \ell$

16. Sağdaki şekilde bir dik koninin yanal yüzeyinin açık hâli verilmiştir. Buna göre koninin yüksekliği, taban yarıçapının kaç katıdır?



A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{23}$ C) $\sqrt{30}$ D) $\sqrt{35}$ E) $\sqrt{39}$

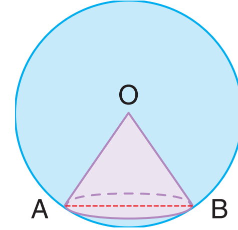
17. Yarıçapı 4 br olan bir küre, merkezinden 2 br uzaklıktan bir düzlemle kesiliyor. Oluşan arakesit dairesinin alanı kaç π br^2 dir?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 24

18. Yarıçapları toplamı 6 br olan iki kürenin alanları farkı 12.π br^2 dir. Buna göre bu kürelerin yarıçapları farkı br cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{7}{2}$

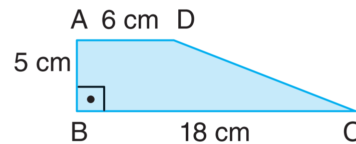
19.



Yukarıdaki şekilde O merkezli kürenin içine yerleştirilen tepesi O ve taban çapı [AB] olan koninin hacmi 96.π br^3 tür. O noktasının [AB] na uzaklığı 8 br olduğuna göre kürenin alanı kaç π br^2 dir?

A) 100 B) 120 C) 200 D) 320 E) 400

20.



Kenar uzunlukları yukarıdaki şekildeki gibi verilen dik yamuk, [BC] etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cismin hacmi kaç cm^3 olur?

A) 375.π B) 350.π C) 275.π D) 250.π E) 200.π

7. Alt Öğrenme Alanı:

OLASILIK

Bu alt öğrenme alanı ile sizlerden

- Koşullu olasılığı açıklayarak problemler çözmeniz, bağımlı ve bağımsız olayları açıklayarak gerçekleşme olasılığını hesaplamanız, bileşik olayı açıklayarak gerçekleşme olasılığını hesaplamanız,
- Deneysel olasılık ile teorik olasılığı ilişkilendirmeniz amaçlanmaktadır.

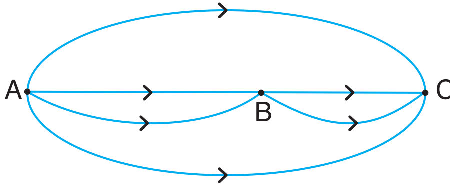
"Matematiğin hiçbir dalı yoktur ki ne kadar soyut olursa olsun, bir gün gerçek dünyada uygulama alanı bulmasın."

Lobachevsky (Loboşevski)

7. Alt Öğrenme Alanı Ön Değerlendirme Soruları

1. 10 farklı roman, 8 farklı öykü ve 9 farklı şiir kitabı arasından 1 kitap kaç farklı şekilde seçilebilir?

2.



Yukarıdaki şekilde A şehrini C şehrine bağlayan yollar görülmektedir. A şehrinden C şehrine gidecek biri kaç farklı yolla bu işi yapabilir?

3. "YARDIMSEVERLİK" kelimesinin her harfini eşit büyüklükte kartlara yazıp bir torbaya atalım. Rastgele bir kart çekelim.

a. Kart çekme deneyine ait örnek uzayı yazıp kaç elemanlı olduğunu belirleyiniz.

b. Torbadan kart çekme olayı eş olasılıklı bir olay mıdır? Nedenini açıklayınız.

c. Torbadan "A" ve "E" harflerinin çekilme olasılığını bulunuz.

4. Bir olayın olasılığı hangi değerler arasındadır? Açıklayınız.

5. Bir zar atma deneyinde üste gelen sayının çift ya da asal sayı olma durumunun olasılığını bulunuz.

6. Bir basketbol maçında bir takımda yedeklerle birlikte 10 oyuncu mavi forma ile diğer takımda 8 oyuncu kırmızı forma ile yer almaktadır. Basketbol maçını mavi veya kırmızı formalı oyunculardan birinin kazanması hangi olay türüne girer? Bu olayın eleman sayısını bulunuz.

7. Bir sınıfta 14 kız ve 11 erkek öğrenci vardır. Kızların 4 ü ve erkeklerin 5 i gözlüklüdür. Sınıftan 19 Mayıs Gençlik ve Spor Bayramı kutlamalarında bir gözlüklü kız öğrenci şiir okumak için seçilecektir. Bu olayın türü ve olasılığını bulunuz.

7.1. Koşullu Olasılık

Günlük yaşantıda birçok olası durumlar üzerine yorumlarda bulunuruz:

- İşin erken biterse birlikte sinemaya gidebiliriz.
- Doğru sözlü ve güvenilir olursan büyük olasılıkla dürüst bir insansın.
- Derslerimde başarılı olursam güzel bir tatil yapacağım.
- Havanın yağmurlu olduğunu bildiğimize göre pikniğe gitme olasılığımız yok.
- Partiye davet ettiğim 30 kişiden 20 si kesin geleceğine göre davetlilerin yaklaşık %50 si bayan olacaktır.
- Hediye çekilişinde bana Eren çıktığına göre sana Emre'nin çıkma olasılığı yüksektir.

Siz de günlük yaşantıdan bu tür durumlara örnekler veriniz.

7.1.1. Koşullu Olasılık Problemleri Çözme

Hatırlayalım:

Herhangi bir durumla, bilinmeyen bir olguyla ilgili gözlem yapma ve veri toplama sürecine **deney**, deneyle elde edilen sonuçların her birine **çıktı**, mümkün olan tüm çıktılara da **örnek uzay** denir. Örnek uzayın her bir alt kümesine de olay adı verilir. Olayın sonucunda elde edilen çıktılara **olayın çıktıları** denir.

Örneğin 1 den 50 ye kadar olan doğal sayıları aynı özellikli kâğıtlara yazıp bir torbaya atalım. Torbadan rastgele çekilen bir sayının asal olması ile ilgili deneyi, çıktıyı, örnek uzayı, olayı ve olayın çıktısını yazalım.

Bu durumda

Deney: 1 den 50 ye kadar olan doğal sayıların aynı özellikteki kâğıtlara yazılıp bir tanesinin çekilmesi

Örnek uzay = E = {1 den 50 ye kadar olan doğal sayılar}

Olay: A = {Torbadan bir asal sayı çekilmesi}

Olayın çıktıları: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ve 47 olur.

Bir A olayının olma olasılığı P(A) ile gösterildiğinde

$$P(A) = \frac{\text{A olayının çıktı sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} \text{ ise } P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ elde edilir.}$$

Örneğimizde torbadaki 1 den 50 ye kadar olan doğal sayılardan asal sayı çekme olasılığı

s(A) = 15 ve s(E) = 50 olduğundan

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

Keşfedelim:

34 kişilik bir sınıftaki tüm öğrenciler, hafta sonu ayrı saatlerde düzenlenen kurslara katılmaktadır. 25 kişi matematik ve 15 kişi de fizik kurslarına gitmektedir.

1. Bu sınıftan rastgele bir öğrenci seçildiğinde örneklem uzayın eleman sayısını bulunuz.

2. Sınıfta fizik kursuna giden öğrenciler arasından rastgele bir öğrenci seçildiğinde örneklem uzayın eleman sayısı kaç olur?

3. Seçilen öğrencinin sadece fizik kursuna giden bir öğrenci olma olasılığını bulunuz.

▶ Buna göre seçilen öğrencinin fizik kursuna giden ya da sadece fizik kursuna giden bir öğrenci olma olasılık değerlerinin neden birbirinden farklı çıktığını açıklayınız.

Öğrenelim:

Lunaparktaki bir dönme dolabın 12 tane kabini bulunmaktadır. Her kabin, 1 den 12 ye kadar numaralanmıştır. Kabinlerden 2 si iki kişilik, 5 i dört kişilik, 5 i de altı kişiliktir. Dört kişilik kabinlerin 3 ü tek sayı, altı kişilik kabinlerin 3 ü çift sayı ile numaralanmıştır.

İlk olarak rastgele bilet alan bir kişinin dört kişilik bir kabine oturma olasılığını bulalım.

Burada kabinlerin dört kişilik olması olayını A ile gösterelim. Dönme dolabın 5 tane kabini 4 kişilik olduğundan s(A) = 5 tir. Örnek uzayın eleman sayısı 12 dir.

Buna göre A olayının olma olasılığı yani bilet alan bir kişinin 4 kişilik kabine binme olasılığı,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{5}{12}$ elde edilir.

Şimdi başka bir durumu inceleyelim. 4 kişi dönme dolaba binmek istiyor. Bekledikleri turda dört kişilik bir kabin geleceğini bildiklerine göre gelen kabinin tek sayıda numaralanmış olma olasılığını bulalım.

	Tek	Çift
İki kişilik	1	1
Dört kişilik	(3)	2
Altı kişilik	2	3

Burada dört kişilik kabinin geleceği bilindiğine göre yeni örnek uzayın eleman sayısı 5 olur. Çünkü 5 tane dört kişilik kabin vardır. Dört kişilik kabin gelme olayı D ise s(D) = 5 olur. Tek sayılı kabin gelme olayı T olsun. s(T) = 6 dır. Fakat dört kişilik kabinin geleceği bilindiğine göre bunların içinden tek numaralı kabin sayısı yandaki tabloda görüldüğü gibi $s(D \cap T) = 3$ olur.

O hâlde istenen olasılık, $\frac{s(D \cap T)}{s(D)} = \frac{3}{5}$ bulunur.

Yukarıdaki olasılık, iki olaydan birinin olma koşulu verildiğinde diğer olayın olma olasılığı ile ilgilidir. Burada eş olumlu E örnek uzayının herhangi iki olayı A ve B olsun. P(B) > 0 ise B olayının gerçekleşmesi hâlinde A olayının olma olasılığına A olayının B ye bağlı **koşullu olasılığı** denir ve **P(A\B)** biçiminde gösterilir. Koşullu olasılık değeri,

$\mathbf{P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}}$ bağıntısıyla hesaplanır.

Uygulayalım:

Herkesin Almanca veya Fransızcadan en az birini bildiği bir turist kafilesinde 28 kişi Almanca, 36 kişi Fransızca ve 18 kişi iki dili de bilmektedir. Kafileden seçilen bir kişinin Almanca konuşabildiği bilindiğine göre bu kişinin Fransızca bilme olasılığını bulalım.

Çözelim:

Almanca bilenleri A, Fransızca bilenleri F ile gösterelim.

$s(A \cap F) = 18$ ise $s(A - F) = s(A) - s(A \cap F) = 28 - 18 = 10$ ve

$s(F - A) = s(F) - s(A \cap F) = 36 - 18 = 18$ olur.

İstenen, bir koşullu olasılıktır. A koşulu altında F nin gerçekleşme olasılığı,

$P(F \setminus A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{18}{28} = \dfrac{9}{14}$ olur.

Uygulayalım:

Bir şirket Bursa'da ilk kurduğu fabrikada televizyonlar için uzaktan kumanda üretmektedir. Talebin çok olması üzerine şirket yetkilileri girişimcilik örneği göstererek ve farklı bölgelerdeki hizmeti daha kolay karşılamak adına İzmir ile Malatya illerinde daha büyük kapasiteli birer tane fabrika kurar. Malatya'da günde 500, İzmir'de günde 450 ve Bursa'da günde 300 adet olmak üzere günde toplam 1250 adet uzaktan kumanda üretilmektedir. Üretilen uzaktan kumandaların Malatya'da %5 i, İzmir'de %6 sı, Bursa'da %2 si bozuk çıkmaktadır. Gün sonunda üretilen uzaktan kumandalardan rastgele seçilen birinin

a. Bozuk çıkma olasılığı,

b. Sağlam çıkma olasılığı,

c. Bozuk çıktıysa Malatya'da üretilmiş olma olasılığı,

ç. Sağlam çıktıysa İzmir'de üretilmiş olma olasılığını bulalım.

Çözelim:

Her üç şehirde üretilen bozuk uzaktan kumanda sayılarını bulalım.

Malatya'da $500 \cdot \dfrac{5}{100} = 25$, İzmir'de $450 \cdot \dfrac{6}{100} = 27$, Bursa'da $300 \cdot \dfrac{2}{100} = 6$ adet

olmak üzere toplam $25 + 27 + 6 = 58$ adet bozuk uzaktan kumanda üretilmiştir. $1250 - 58 = 1192$ tane sağlam uzaktan kumanda olur. Uzaktan kumandanın bozuk çıkma olayı B, sağlam çıkma olayı S ve şehirler M ile İ olarak adlandırılsın.

a. $P(B) = \dfrac{58}{1250} = \dfrac{29}{625}$ olur.

b. $P(S) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{29}{625} = \dfrac{596}{625}$

c. $P(M \setminus B) = \dfrac{25}{58}$ olur.

ç. $P(İ \setminus S) = \dfrac{423}{1192}$ olur.

Uygulayalım:

İki çift zar havaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 10 dan büyük olduğu bilindiğine göre her ikisinin de tek sayı gelme olasılığı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

İki zarın havaya atılması deneyinde 6.6 = 36 çıktı vardır. Soruda belli bir koşul altında olasılık değeri sorulmaktadır. Öncelikle örneklem uzayımızı yazalım.

E = {(2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} dır.

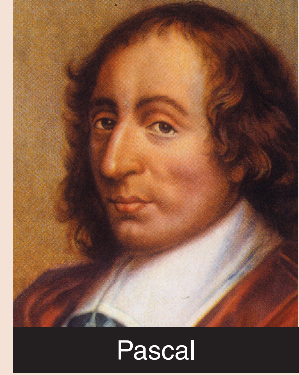
s(E) = 17 olur. Her ikisinin de tek sayı gelme olayı ise

T = {(3, 5), (5, 3), (5, 5)} olup s(T) = 3 tür.

O hâlde $P(T \setminus E) = \frac{s(T)}{s(E)} = \frac{3}{17}$ bulunur.

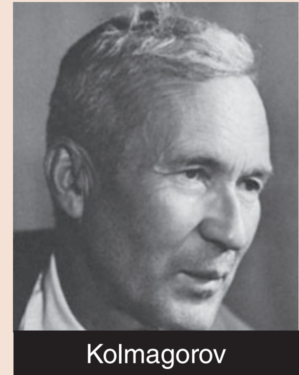
Tanıyalım:

Şans oyunlarının bol olduğu Grek ve Roma toplumlarında yaşamış matematikçiler arasında Thales (Tales), Pyhagoras (Pisagor), Eulides (Öklit), Apollonius ve Archimedes gibi matematikçiler vardır. Oysa bu matematikçilerden kalan çalışmalarda olasılık kuramıyla ilgili tek bir ize dahi rastlanmamaktadır. Bugün olasılık kavramının başlangıcı olarak bilinen 1654 yılında neler olup bittiği enine boyuna bilinmektedir (Korkmaz, 2005). Chevalier de Méré, oyun yaşamındaki deneyimlerinden türettiği iki soruyu (biri zar sorusu, diğeri de bölüştürme sorusu) Blaise Pascal'a (1623 - 1662) yöneltmiş ve o da bu soruları çözmüştür. Fakat o dönemin büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Gilles Persone de Roberval'in eleştirileriyle karşılaşınca (Hacking, 1975, s. 125 aktaran Korkmaz, 2005) yaptıklarından kuşkulanmış, bu kuşkuları kafasından atabilmek için de yine o dönemin en büyük matematikçisi olarak kabul edilen Pierre de Fermat ile yazışmaya başlamıştır. İşte olasılık kuramı bu yazışmalardan doğmuştur. (Gillies, 2000, s. 3 aktaran Korkmaz, 2005).



Pascal

Şans kavramını matematiğe Pascal ve Fermat kazandırmıştır fakat olasılığın kurucusu olarak Laplace bilinir. Bugünkü anlamda gelişimini Poisson'un (1781 - 1840) çalışmalarına borçludur. İlk dönemlerde bir olayın olma olasılığının gözlenmesiyle teorik olarak olma olasılığının bazı durumlarda örtüşmemesi nedeniyle zaman zaman olasılık ilkelerine şüpheyle bakılmıştır. Pascal ve Poisson bu sorunlu durumu çözmek için önemli çalışmalar yapmışlardır. Olasılıktaki kapsamlı gelişmeler Kolmogorov (1903 - 1987) tarafından 1930 yılında yazılan "Olasılık Kavramının Temelleri" kitabı ile başlamıştır. Artık Kolmogorov ile birlikte olasılık aksiyomatik bir temele oturtulmuş olur. (Baki, 2014, s.159).



Kolmagorov

Uygulayalım:

Bir kot pantolon üretim atölyesinde günde 150 tane siyah, 220 tane mavi pantolon üretilmektedir. Siyah pantolonların 20 si, mavi pantolonların 35 i defolu üretilmiştir. Rastgele seçilen bir pantolonun defolu olduğu bilindiğine göre mavi olma olasılığını bulalım.

Çözelim:

Probleme uygun bir tablo yapalım.

	Sağlam (S)	Defolu (D)
Mavi (M)	185	35
Siyah (S)	130	20

Defolu olma koşulu altında mavi olma olasılığı sorulduğundan problem, bir koşullu olasılık sorusudur.

$$P(M \setminus D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{35}{35 + 20} = \frac{7}{11}$$

olur.

Pekiştirelim:

1. 40 kişilik bir sınıfta matematik dersinden başarılı olanlar 25 kişi, fizik dersinden başarılı olanlar 18 kişi, her iki dersten de başarısız olanlar ise 7 kişidir. Bu sınıftan rastgele seçilen birinin matematik dersinden başarılı olduğu bilindiğine göre fizik dersinden de başarılı olma olasılığı kaçtır?

2. Bir çift zar atılıyor. Zarların farklı geldiği bilindiğine göre toplamlarının tek sayı olma olasılığını bulunuz.

3. Bir atölyede günde 150 kırmızı, 180 beyaz tişört üretilmektedir. Kırmızı tişörtlerin 30 u, beyaz tişörtlerin 20 si defolu üretilmiştir. Rastgele seçilen bir tişörtün defolu olduğu bilindiğine göre beyaz olma olasılığını bulunuz.

4. İçlerinde özdeş bilye bulunan iki torbanın birincisinde 6 beyaz, 3 siyah; ikincisinde 5 beyaz, 7 siyah bilye vardır. Birinci torbadan rastgele iki bilye seçilip ikinci torbaya atılıyor. İkinci torbadan rastgele seçilen bir bilyenin beyaz olma olasılığı kaçtır?

5. Bir lisenin 9. sınıflarında 120, 10. sınıflarında 150, 11. sınıflarında 180 ve 12. sınıflarında 100 öğrenci okumaktadır. Her sınıfın mevcudunun %10 u millî bayramımız olan 29 Ekim Cumhuriyet Bayramı'nda tören yürüyüşüne katılacaktır. Bu okuldan rastgele seçilen bir öğrencinin

a. Tören grubunda olma olasılığı,
b. Tören grubunda olmama olasılığı,
c. Tören grubunda olduğu bilindiğine göre 11. sınıfta olma olasılığı,
ç. Tören grubunda olduğu bilindiğine göre 9. sınıfta olma olasılığı kaçtır?

6. Bir zar ve bir madenî para birlikte atılıyor. Zarın üst yüzüne gelen sayı 5 ise madenî paranın yazı gelme olasılığı kaçtır?

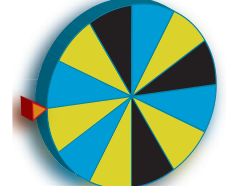
7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Hatırlayalım:

İki olayın birlikte gerçekleşmesi mümkün değilse böyle olaylara **ayrık olay** denir. A ve B olayları için $A \cap B = \varnothing$ ise A ve B ayrık olaylardır.

A ve B olayları için bu iki olayın aynı anda gerçekleşmesi mümkünse ya da $A \cap B \neq \varnothing$ ise A ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

Bir örnek üzerinde bu durumu inceleyelim. Bir çark 12 dilimden oluşmaktadır. Dilimlerden dördü mavi, beşi sarı ve üçü siyah renktedir. Çark rastgele çevrildiğinde ibrenin mavi veya siyah diliminde durma olasılığını hesaplayalım.



M: İbrenin mavi dilimde durması $s(M) = 4$

S: İbrenin siyah dilimde durması $s(S) = 3$

İbrenin mavi ve siyah dilimde durması olayları ayrık olaylardır.

Bir çift zarın havaya atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının tek veya toplamının 8 den büyük olma olasılığında verilen olaylar ayrık olmayan olaylardır. Çünkü kesişim kümeleri boş değildir. Örneğin (5, 5) çıktısı, her ikisi için de geçerlidir.

Keşfedelim:

Bir torbada özdeş 3 kırmızı ve 5 mavi top vardır. Bu torbadan art arda 2 top çekilecektir.

1. Çekilen ilk top torbaya geri atılsın. A olayı, ilk topun kırmızı renk gelme olayı; B olayı, ikinci topun mavi renk gelme olayı olsun. A ve B olaylarının gerçekleşme olasılıklarının birbirini etkileyip etkilemediğine karar veriniz.

2. Çekilen top torbaya geri atılmasın. C olayı, ilk topun kırmızı renk gelme olayı; D olayı, ikinci topun mavi renk gelme olayı olsun. Bu durumda C ve D olaylarının gerçekleşme olasılıklarının birbirini etkileyip etkilemediğine karar veriniz.

3. A ve B olayları ile C ve D olaylarının olasılıklarını bulunuz.

▶ Buna göre olaylar arasındaki farklılığın olasılıkları nasıl etkilediğini açıklayınız.

Öğrenelim:

Bir piyango çekilişinde en büyük ikramiyeyi aşağıdaki biletlerden hangisinin kazanma olasılığının daha az olduğunu belirleyelim.

1. bilet	2. bilet
2 2 2 2 2 2	4 7 8 4 5 1

İlk bakışta 1. biletin kazanma olasılığının daha az olduğu düşünülebilir. Çünkü arka arkaya 2 rakamının gelmesi daha zor bir olasılık gibi görülebilir. Buradaki yanılgı; piyango çekilişindeki 2 numaralı top geldikten sonra diğer topun 2 gelmesi olasılığının düştüğü, sayının diğer sayının gelmesini etkilediği düşüncesidir. Fakat her topun çekilişi bir öncekinden bağımsız olduğundan her iki biletin de kazanma olasılığı aynıdır. Burada birbirini etkileyen olaylar veya durumlar yoktur.

İşte herhangi bir B olayının gerçekleşip gerçekleşmemesinin A olayının gerçekleşmesi olasılığına bir etkisi yoksa A ve B olayları **bağımsız olay** olarak adlandırılır. Bu durum,

$P(A) = P(A \setminus B)$ ile gösterilir. Ya da $\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$ ise **A ve B olayları bağımsızdır** denir.

Şimdi de birbirini etkileyen iki olaya örnek verelim.

Bir satranç turnuvasında son turda şampiyonluğa oynayan A ve B kişileri ile C ve D kişileri karşılaşacaktır. A ve B kişilerinden A kazanırsa şampiyon olacaktır. Eğer B kazanır ve C kişisi D kişisini yenerse C kişisi şampiyon olacaktır. Buna göre C nin turnuvada şampiyon olma olayını ele alalım.

Burada C kişisinin şampiyon olması, A ile B arasındaki karşılaşmaya bağlı bir olaydır. Yani A ile B arasındaki maç, C ile D kişilerini etkilemektedir.

Herhangi bir B olayının gerçekleşmesinin A olayının gerçekleşme olasılığına etkisi varsa A ve B olayına **bağımlı olaylar** adı verilir.

Dikkat Edelim!

Bağımsız olaylar, ayrık olay değildir.

Uygulayalım:

Bir zar ve bir madenî para birlikte atılsın. Paranın yazı ve zarın çift sayı gelmesi olayını yazıp bu olayların bağımsız olay olup olmadığını belirleyelim.

Çözelim:

Zarın ve madenî paranın birlikte atılması deneyinde örnek uzay,

E = {(1, Y), (1, T), (2, Y), (2, T), (3, Y), (3, T), (4, Y), (4, T), (5, Y), (5, T), (6, Y), (6, T)} olur.

A, zarın çift gelme olayı; B, madenî paranın yazı gelme olayı olsun. O hâlde

A = {(2, Y), (2, T), (4, Y), (4, T), (6, Y), (6, T)}

B = {(1, Y), (2, Y), (3, Y), (4, Y), (5, Y), (6, Y)} olur.

Burada $A \cap B$ = {(2, Y), (4, Y), (6, Y)} bulunur.

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ve $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ olurken

$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ tür.

Buradan $P(A).P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olur ve $P(A).P(B) = P(A \cap B)$ elde edilir.

O hâlde A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Bu olayların bağımsız olduklarını başka bir şekilde de anlayabiliriz. Paranın yazı gelme olayı, zarın çift gelme olayını etkilemez. Ya da zar çift sayı geldiğinde bu durumun paranın yazı gelmesi üzerine bir etkisi yoktur. Bunlardan dolayı da A ve B olaylarının bağımsız olaylar olduğu sonucuna varabiliriz.

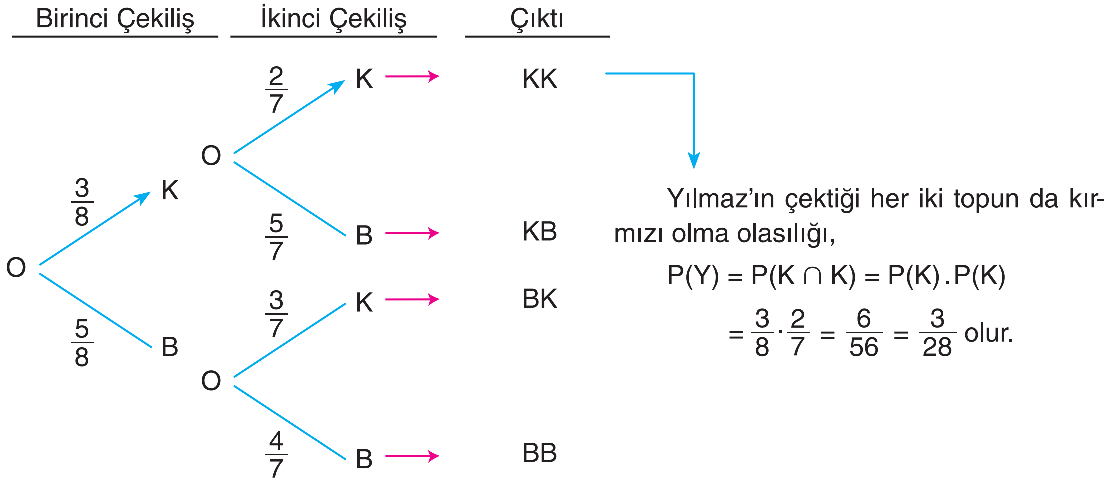
Uygulayalım:

Bir torbada eş büyüklük ve kütlelerde 3 kırmızı ve 5 beyaz top bulunmaktadır. Torbadan çekilen iki topun da kırmızı olması beklenmektedir. Yılmaz, ilk çekilişten sonra topu dışarı bırakıp ikinci çekilişi yapmış; İsmail ise ilk çekilişten sonra topu torbaya atmış ve ikinci çekilişi yapmıştır. İki olayın da bağımlı mı bağımsız mı olduğunu belirleyelim. Hangisinin çektiği iki topun da kırmızı olması olasılığının daha fazla olduğunu bulalım.

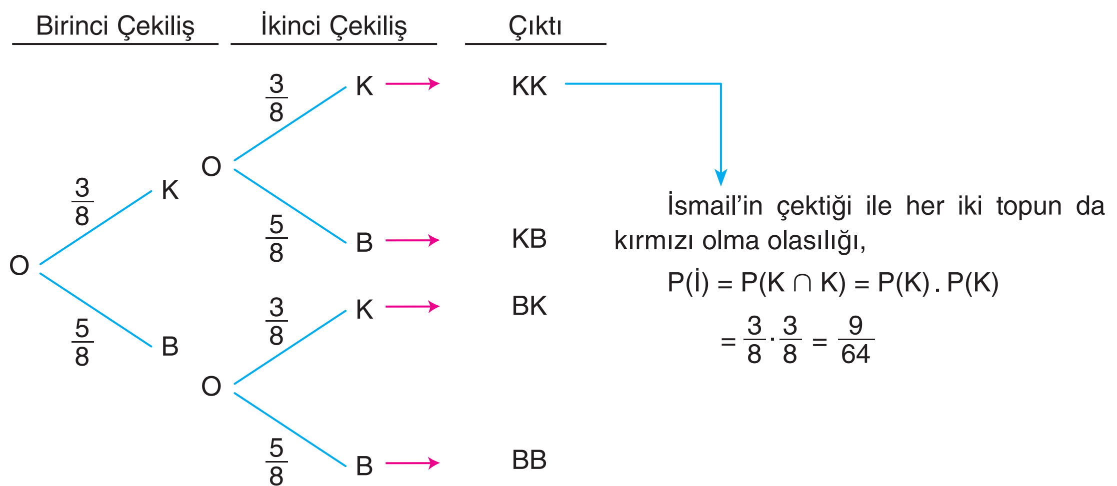
Çözelim:

Çekiliş için aşağıdaki gibi ağaç şeması oluşturalım. K kırmızı topları ve B beyaz topları göstersin.

Yılmaz'ın Çekilişi:



İsmail'in Çekilişi:



Yılmaz'ın çektiği 2. topun kırmızı gelme olasılığı, 1. topun hangi renk olduğu ile ilgilidir. Yani olasılığı etkilemektedir. O hâlde Yılmaz'ın olayı, bağımlı bir olaydır.

İsmail'in çektiği 2. topun kırmızı gelme olasılığı, 1. topun hangi renk olduğu ile ilgili değildir. Yani olasılığı etkilememektedir. O hâlde İsmail'in olayı, bağımsız bir olaydır.

Olasılık değerlerine bakıldığında P(İ) > P(Y) olduğu görülür.

Uygulayalım:

Özdeş topların bulunduğu iki torbadan birinde 4 sarı, 7 mavi; diğerinde 5 sarı, 8 mavi top vardır. Her iki torbadan da rastgele birer top seçildiğinde ikisinin de sarı gelme olasılığını bulalım.

Çözelim:

Toplar her iki torbadan ayrı ayrı seçildiğine göre bu iki olay bağımsızdır. O halde iki topun da sarı gelme olasılığı, ayrı ayrı torbalardan sarı top seçme olasılıklarının çarpımına eşittir.

Bu durumda $P(S) = \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{13} = \frac{20}{143}$ olur.

Uygulayalım:

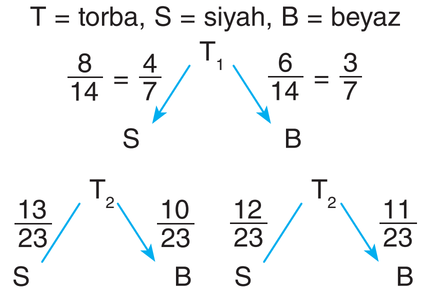
Özdeş bilyelerin bulunduğu iki torbadan birincisinde 6 beyaz, 8 siyah bilye; ikincisinde 10 beyaz, 12 siyah bilye vardır. Birinci torbadan bir bilye alınıp ikinciye atılıyor. Bu durumda ikinci torbadan rastgele seçilen bir bilyenin beyaz gelme olasılığını bulalım.

Çözelim:

Birinci torbadan alınan bir bilyenin siyah veya beyaz gelme durumuna göre ikinci torbadan çekilen bilyenin beyaz gelme olasılığı değişeceğinden bu olaylar bağımlıdır. Bunu şema ile yandaki gibi gösterebiliriz.

Bu durumda ikinci torbadan beyaz bilye çekme olasılığı, beyaz bilyeye giden kolların çarpımlarının toplamına eşittir.

$P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{23} + \frac{4}{7} \cdot \frac{10}{23} = \frac{73}{161}$ olur.



Pekiştirelim:

1. Aziz ile Fatih, bir firmanın hediye paketlerini almak istiyorlar. Bunun için içinde 4 tane kırmızı, 7 tane sarı özdeş top bulunan torbadan çekilen iki topun da sarı olması gerekmektedir. Aziz ilk çekilişten sonra topu torbaya atmış ve ikinci çekilişi yapmıştır. Fatih ise ilk çekilişten sonra topu torbaya atmadan ikinci çekilişi yapmıştır. Her iki durumdaki olayların olma olasılıklarını ağaç şeması kullanarak bulunuz. Bu olayların bağımlı ya da bağımsız olma durumlarına karar veriniz.

2. İki torbadan birincisinde 3 sarı ve 5 mavi, ikincisinde 6 sarı ve 4 mavi özdeş bilye vardır. Önce bir zar atılıyor. Zar tek sayı gelirse ikinci torbadan, çift gelirse birinci torbadan bilye çekiliyor. Zar atıldığında zarın durumuna göre torbaların birinden rastgele bir bilye çekiliyor. Çekilen bilyenin sarı olma olasılığını bulunuz.

3. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı sayılar kartlara yazılıp bir torbaya atılıyor. Torbadan rastgele bir kart çekildiğinde üstünde yazan sayının 3 ün katı olma olasılığı kaçtır?

4. İçinde 3 beyaz, 4 siyah ve 5 kırmızı özdeş bilye bulunan bir torbadan sırasıyla ve geri konulmaksızın rastgele 3 bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin

a. İlk ikisinin beyaz, sonuncunun siyah olma olasılığı,

b. Farklı renkte olma olasılıkları,

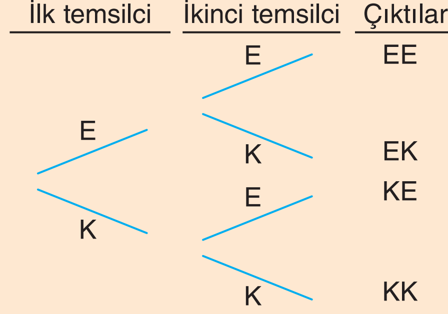
c. Aynı renkte olma olasılıkları kaçtır?

7.1.3. Bileşik Olayların Olasılıkları

Öğrenelim:

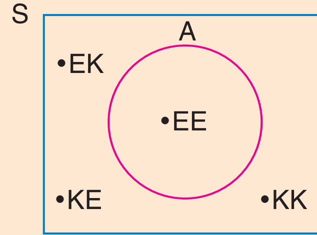
Bir sınıfta öğrenciler arasından iki temsilci seçilecektir. Öğrencilerden kız olanları K, erkek olanları ise E ile gösterelim.

Bu deneyin tüm sonuçlarını ağaç şemasından yararlanarak gösterelim.



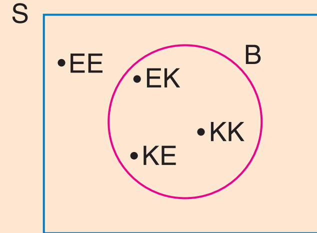
Ağaç şemasında görüldüğü gibi tüm sonuçlar S = {EE, EK, KE, KK} olur.

EE, EK, KE ve KK sonuçlarının her biri temsilci seçme deneyinin **basit olaylarıdır.** Örneğin iki temsilcinin de erkek seçildiği bir A olayı, basit olaydır. Bu durumu aşağıdaki şema ile gösterelim.



Burada A = {EE} olup s(A) = 1 dir.

Fakat en az bir kızın seçildiği bir B olayını düşünelim. Bu olay, bir kız veya iki kız seçilmesi durumunda gerçekleşir. Bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Burada B = {EK, KE, KK} olup s(B) = 3 tür. B olayı, bir **bileşik olay**dır.

A ve B olayları arasındaki fark olayların çıktı sayılarıdır. Basit olayda s(A) = 1 iken bileşik olayda s(B) = 3 olarak elde edilir.

Bileşik olay, birden çok sonuçlu olaylara verilen bir addır. Birden fazla olay çeşidini içerip içinde ve / veya bağlaçları olan olaylardır.

Uygulayalım:

Bir grup insan nükleer santrallerin kurulmasını desteklemekte, bir kısmı da buna karşı çıkmaktadır. Bu gruptan rastgele 2 kişi seçilip nükleer santrallerin kurulması ile ilgili görüşleri sorulmuştur.

a. Her iki kişinin de nükleer santralleri desteklememesi,

b. Bir kişinin nükleer santrallere karşı çıkması

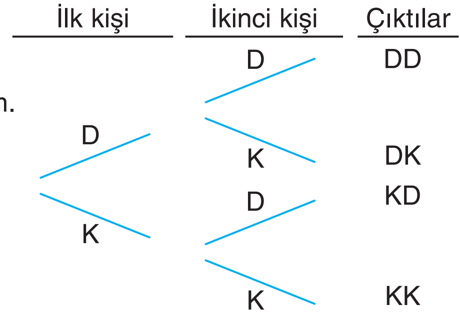
olaylarının basit olay mı bileşik olay mı olup olmadığını belirleyelim.

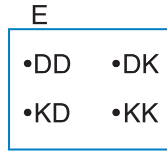
Çözelim:

D: Nükleer santralleri destekleyenler ve

K: Nükleer santrallere karşı çıkanlar olsun.

Bu deneye ilişkin Venn şeması ve ağaç şeması yapalım.





a. Seçilen iki kişinin de nükleer santralleri desteklememesi,

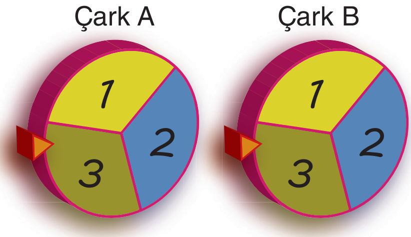
A = {KK} tek elemanlı bir küme olduğundan basit olaydır.

b. Bir kişinin nükleer santrallere karşı çıkması,

B = {DK, KD} dir. Birden çok çıktıya sahip olduğu için bu olay bileşik olaydır.

Uygulayalım:

Üzerinde sayılar yazan yandaki gibi çarklar, aynı anda birlikte döndürülmektedir. 1 defa döndürüldüklerinde ibrenin durduğu yere gelen sayıların toplamına skor diyelim.



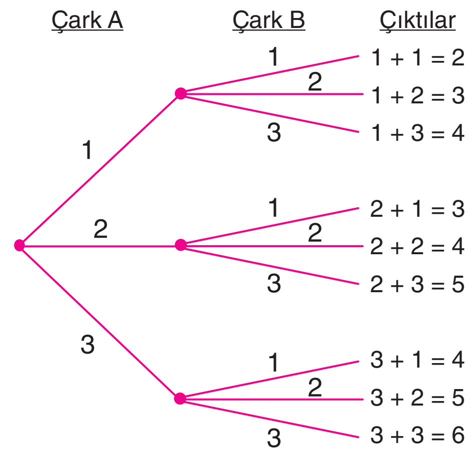
a. Gelebilecek tüm skorları belirleyelim.

b. Toplam skorun 4 olması olasılığını bulalım.

Çözelim:

a. Gelebilecek tüm skorları tablo ve ağaç şemasından yararlanarak bulalım.

		Çark B		
		1	2	3
Çark A	1	2	3	4
	2	3	4	5
	3	4	5	6



Tablo ve ağaç şemasında görüldüğü gibi gelebilecek skorlar,

Örnek uzay = E = {2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6} olup s(E) = 9 dur.

b. Toplam skorun 4 olma olayı A ise

A = {(1, 3), (3, 1), (2, 2)} olup s(A) = 3 bulunur.

Buradan toplam skorun 4 olma olasılığı ise

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ tür.

Uygulayalım:

Bir kutuda 12 sarı, 15 mavi ve 18 yeşil şeker bulunmaktadır.

a. Kutudan rastgele bir şeker çekildiğinde sarı veya yeşil renkli şeker gelme olasılığını

b. Çekilen şekeri geri atmamak şartıyla kutudan iki şeker çekildiğinde ikisinin de mavi renkli gelmesi olasılığını bulalım.

Çözelim:

S sarı renk şeker çekme, M mavi renk şeker çekme ve Y yeşil renk şeker çekme olayları olsun.

s(S) = 12, s(M) = 15, s(Y) = 18 dir. s(E) = 45 olur.

a. Kutudan bir şeker çekildiğinde sarı renk gelme olasılığı $P(S) = \frac{s(S)}{s(E)} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ olur.

Kutudan bir şeker çekildiğinde yeşil renk gelme olasılığı $P(Y) = \frac{s(Y)}{s(E)} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ olur.

O hâlde çekilen bir şekerin sarı veya yeşil gelme olasılığı,

$P(S \cup Y) = P(S) + P(Y) \Rightarrow P(S \cup Y) = \frac{4}{15} + \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$ bulunur.

b. 1. şekerin mavi çekilmesi olasılığı $P(M_1) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ olur.

2. şekerin mavi çekilmesi olasılığı $P(M_2) = \frac{14}{44} = \frac{7}{22}$ olur.

1. şekerin ve 2. şekerin mavi gelme olasılığı,

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1).P(M_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{22} = \frac{7}{66}$ bulunur.

Uygulayalım:

1. torba 2. torba 3. torba

Yukarıdaki şekilde 3 farklı torbada bulunan kırmızı (K) ve mavi (M) topların sayıları verilmiştir. Topların tümü özdeştir. Gözleri kapalı bir şekilde herhangi bir torbadan bir top çekiliyor. Topun mavi renkte olduğu görülüyor. Buna göre çekilen topun 1. torbadaki mavi toplardan biri olma olasılığı kaçtır? Bulalım.

Çözelim:

1. torbadan mavi top çekme olasılığı $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

2. torbadan mavi top çekme olasılığı $P(B) = \frac{3}{5}$ ve

3. torbadan mavi top çekme olasılığı $P(C) = \frac{2}{5}$ tir.

Soruda çözüme ulaşmak için 1. torbadan mavi top çekme olasılığını, üç torbadan mavi top çekme olasılığına bölerek buluruz. Aranan olayın olasılığı D ise

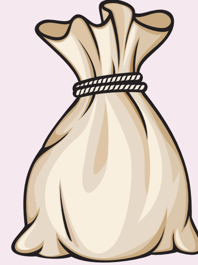
$$P(D) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) + P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Pekiştirelim:

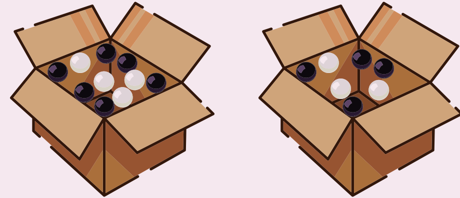
1. Belli uzunlukta vidalar, 3 fabrikada üretilmektedir. 1. fabrikadaki üretim, 2 ve 3. fabrikalardaki üretimin ikişer katı kadardır. 1 ve 3. fabrikalardaki üretimin %3 ü ve 2. fabrikadaki üretimin %5 i hatalıdır. Üretilen vidaların hepsi bir depoya konuluyor. Sonra bir vida seçiliyor. Bu vidanın hatalı bir vida olma olasılığını bulunuz.

2. Bir çiftçi; iki elma ağacının birincisinden 1900 elma, ikincisinden 2300 elma toplamıştır. Birinci ağaçta 120 ve ikinci ağaçta 200 elma çürük çıkmıştır. Bütün elmaları bir depoya koyan çiftçi, rastgele bir elma eline alarak çürük olduğunu görmüştür. Bu çürük çıkan elmanın ikinci ağaçtan gelmiş olma olasılığı kaçtır?

3. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanları ile rakamları farklı üç basamaklı sayılar kartlara yazılarak bir torbaya atılıyor. Torbadan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen kartın 5 ile tam bölündüğü bilindiğine göre bu sayının çift olma olasılığı kaçtır?



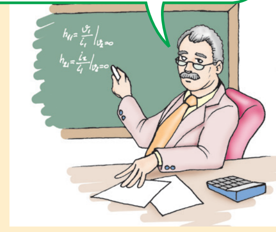
4. İki kutudan birincisinde 4 beyaz ve 6 siyah, ikincisinde 3 beyaz ve 4 siyah top vardır. Herhangi bir kutudan rastgele çekilen bir topun siyah olduğu görülüyor. Bu topun birinci kutudan çekilmiş olma olasılığı kaçtır?



7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

Günlük hayatımızda bazı olası durumlara karşı kendimize yön veririz. Bu olasılıkları, ya deneyimlerimiz sonucuna ya da bilimsel bazı sonuçlara göre tahmin ederiz. Olayların olma olasılığını matematiğin bir alanı olan istatistik alanı inceler. Bazı olayların olabilirliği matematiksel olarak hesaplanarak gerektiğinde bunlara karşı önlemler alınabilir. Aşağıdaki resimlerde bazı kişilerin olasılık hesaplama yöntemleriyle ilgili ifadeler bulunmaktadır. İnceleyiniz.

1. resim



2. resim

Bu olasılık hesaplama yöntemlerini tartışınız. Siz de günlük yaşamda karşılaştığınız durumlarda belirlediğiniz olasılıkları ve bunları nasıl hesapladığınızı ve karar verdiğinizi açıklayınız.

7.2.1. Deneysel ve Teorik Olasılık İlişkisi

Keşfedelim:

Araç ve gereçler: kırmızı ve beyaz renkli boncuklar, içi görünmeyen torba

4-6 kişilik gruplar oluşturunuz. İçi görünmeyen torbanın içine 5 tane beyaz, 5 tane de kırmızı boncuk koyunuz.

1. Torbadan aynı anda gruptan 2 kişi boncuk çekecektir. Bu kişilerden biri beyaz diğeri de kırmızı çekmek istiyor. Buna göre başlangıç koşulları adil midir? Nedenini açıklayınız.
2. Torbadan çekeceğiniz boncuğun kırmızı olma olasılığını hesaplayınız.
3. Çektiğiniz boncuğu torbaya geri atmak şartıyla 20 defa boncuk çekiniz. Her çektiğiniz boncuğun rengini not alıp torbadan çektiğiniz boncuğun kırmızı olma olasılığını hesaplayınız. Sonucunuzu ilk olasılık hesabınız ile karşılaştırınız.
4. 30 defa boncuk çekiniz ve her çektiğiniz boncuğun rengini yazınız. Yazdıklarınızdan yararlanarak torbadan çektiğiniz boncuğun kırmızı olma olasılığını hesaplayınız. Sonucunuzu ilk olasılık hesabınız ile karşılaştırınız.
5. 40 defa boncuk çekiniz ve her çektiğiniz boncuğun rengini yazınız. Yazdıklarınızdan yararlanarak torbadan çektiğiniz boncuğun kırmızı olma olasılığını hesaplayınız. Sonucunuzu ilk olasılık hesabınız ile karşılaştırınız.

▶ Etkinliği yapmadan önce hesapladığınız olasılık değeri ile etkinlik sırasında hesapladığınız olasılık değerini karşılaştırınız.

Öğrenelim:

Bazı durumlarda bir olayın gerçekleşme olasılığı deney yapmadan söylenemez. Yapılan deneyin sonuçları, söz konusu olayın gerçekleşme olasılığı ile ilgili tahminde bulunmayı sağlar. Bir deney gerçekleştirip bu deneyle ulaşılan çıktılara dayanarak hesaplanan olasılığa **deneysel olasılık** denir. **Teorik olasılık** ise daha önceden belirlenen olasılık kurallarına göre yapılan olasılık hesabıdır. Teorik olasılık ile bir deneyde hangi sonuca ulaşılacağı tam olarak hesaplanabilir. Yapılan bir deneyde bütün çıktıların olasılıkları eşit ise çıktılar eş olumludur. Teorik olasılığın hesaplanması için her bir çıktının eş olasılıklı olması gerekmektedir. Eğer deneydeki her bir çıktı eş olasılıklı değilse deneysel olasılıktan yararlanılır.

Deneysel olasılık = $\frac{\text{Gerçekleşme sayısı}}{\text{Deneme sayısı}}$ bağıntısı ile bulunur.

A, E örnek uzayın bir olayı olmak üzere A olayının teorik olasılık değeri $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$ ile bulunur.

Uygulayalım:

3 tane eş özellikte madenî para, aynı anda havaya atılmıştır.

a. Bu deneyin tüm çıktılarını yazalım.

b. Bu denemede paraların üçünün de tura gelme teorik olasılığını hesaplayalım.

c. Üç paranın da yazı gelmesinin teorik olasılığını hesaplayalım.

Çözelim:

a. YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT olmak üzere 8 tane çıktı vardır.

b. 3 madenî para atıldığında 8 farklı durum olacağından üçünün de tura gelme olasılığı $\frac{1}{8}$ dir.

c. Üç paranın atılmasında 8 durum olacağından biri, hepsinin yazı gelmesidir. O hâlde teorik olasılık $\frac{1}{8}$ veya 0,125 olarak bulunur.

Uygulayalım:

Bir grup öğrenci, atılan bir zarın üst yüzündeki sayının 3 olma olayının olasılığını araştırmaktadır. 15 kez zar attıklarında 3, 21 kez zar attıklarında 4 ve 35 kez zar attıklarında 6 kez üst yüze 3 rakamı gelmiştir.

a. Zarın üst yüzüne 3 gelmesinin teorik olasılığını hesaplayalım.

b. Zarın üst yüzüne 3 gelmesinin deneysel olasılığını hesaplayalım.

Çözelim:

a. Zarda 6 yüz bulunduğundan s(E) = 6 dır. Zarın üst yüzüne 3 gelme olayı A ise s(A) = 1 olur.

Buradan $P(A) = \frac{s(A)}{sE)} = \frac{1}{6} \cong 0,166667$ olarak bulunur.

b. Deneysel olasılık = $\frac{\text{Gerçekleşme sayısı}}{\text{Deneme sayısı}}$ olduğundan 15 kez atıldığında 3 kez 3 rakamı gelmesinin deneysel olasılığı $\frac{3}{15} = 0,2$ dir.

21 kez atıldığında 4 kez 3 rakamı gelmesinin deneysel olasılığın $\frac{4}{21} \cong 0,190476$ dır.

35 kez atıldığında 6 kez 3 rakamı gelmesinin deneysel olasılığı, $\frac{6}{35} \cong 0,171429$ dur.

Görüldüğü gibi zarın atılma sayısı arttıkça deneysel olasılık değeri, teorik olasılık değerine yaklaşmaktadır.

Uygulayalım:

3 tane eş özellikte madenî para, aynı anda 20 kez havaya atılmış. Atışların sonunda 10 kez ikisi yazı, 7 kez biri yazı, 2 kez hepsi yazı ve 1 kez hepsi tura gelmiştir. Bu denemede paraların hepsinin tura gelme olayının deneysel olasılığını hesaplayalım.

Çözelim:

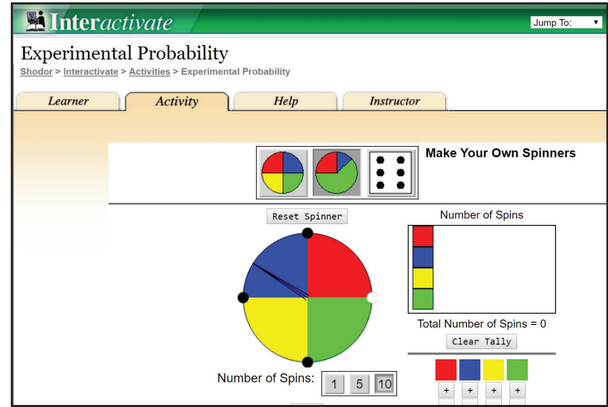
Tüm paralar 1 kez aynı anda tura geldiği için bu olayın deneysel olasılığı $\frac{1}{20}$ dir.

Uygulayalım:

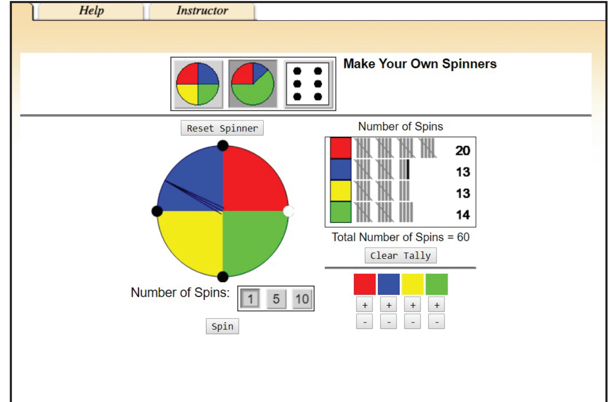
Bir çarkta eş 4 parçaya ayrılmış sarı, kırmızı, mavi ve yeşil renkler bulunmaktadır. Çarkın ibresini 60 kez çevirdiğimizde her bir rengin gelme olasılığını bulalım.

Çözelim:

Bir çarkı 60 kez çevirme sonucunda elde edilen olasılık deneysel olasılıktır. Bu durumu simülasyon şeklinde gerçekleştirelim. Bunun için http://www.shodor.org/interactivate/activities/ExpProbbalility/ adresini açıp bu deneyi yapabilirsiniz. İlk sayfa görüntüsü yandaki gibidir.



İnternet sayfasında çarkın altında Spin butonuna basınca çarkın ibresi dönüp bir yerde durur. Bu tekrarlandıkça hangi rengin kaç kere geldiği ekranda yandaki gibi görünür.



Buna göre her bir rengin gelme olasılığını hesaplayalım. s(E) = 60 dır.

Kırmızı gelme olayının deneysel olasılığı $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$,

Mavi gelme olayının deneysel olasılığı $\frac{13}{60}$,

Sarı gelme olayının deneysel olasılığı $\frac{13}{60}$,

Yeşil gelme olayının deneysel olasılığı $\frac{14}{60} = \frac{7}{30}$ bulunur.

Uygulayalım:

Bir paranın 100 defa havaya atıldığı bir olasılık deneyinde üst yüzde 48 defa yazı ve 52 defa tura gelmiştir. Üst yüze tura gelmesi olayının deneysel olasılığını hesaplayıp sonucu teorik olasılık değeri ile karşılaştıralım.

Çözelim:

Bir paranın 100 defa havaya atılması deneyinde 52 defa tura gelmiştir. Bu olay için

$$\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Gerçekleşme sayısı}}{\text{Deneme sayısı}} \text{ olduğuna göre}$$

$$\text{Deneysel olasılık} = \frac{52}{100} = 0{,}52 \text{ bulunur.}$$

Bir paranın havaya atılması sonucunda tura gelme olayı T ise s(T) = 1 ve tüm çıktıların sayısı da s(E) = 2 olduğundan T olayının teorik olasılığı,

$$P(T) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ bulunur.}$$

Görüldüğü gibi deneysel olasılığa göre tura gelme olasılığı daha yüksek çıkmıştır.

Dikkat Edelim!

Deney sayısı arttıkça deneysel olasılığın değeri teorik olasılık değerine yaklaşır. Deneysel olasılık değeri tahmindir. Teorik olasılık ise kesin bir olasılık değerine sahiptir.

Pekiştirelim:

1. Eren bir madenî parayı 30 kez havaya attığında 10 kez tura gelmiştir. Bu sonuçlara göre madenî paranın tura gelmesi olayının deneysel olasılığını bulunuz.

2. İçinde 5 kırmızı ve 8 yeşil top bulunan torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığının hesaplanması hangi olasılık çeşidine girer? Bu olasılığı hesaplayınız.

3. Bir paranın 100 kez atılması sonucu tura gelmesi olayının deneysel olasılığını hesaplamak için http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/İnternet sitesinden deneyi yapıp olasılığı hesaplayınız.

4. Hilesiz bir zar atıldığında

   a. Zarın 2 gelmesinin teorik olasılığı kaçtır?

   b. Murat, bir zarı attığında kaç kez 2 geleceğini görmek için 80 kez atıyor. Teorik olasılığa göre Murat kaç atışta 2 gelmesini beklemelidir? Açıklayınız.

5. İki arkadaş kırmızı, mavi ve sarı renklerinin olduğu bir dart tahtasına atış yapıyorlar. Suat 15 atış sonucu 3 kez kırmızı, 5 kez mavi ve 7 kez sarıya isabet ettiriyor. Merve ise 30 atış sonucu 12 kez kırmızı, 11 kez mavi ve 7 kez sarıya isabet ettiriyor. İki arkadaşın atışlarına göre her bir rengin gelmesi olayına yönelik deneysel olasılıkları hesaplayınız.

7. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Soruları

1. İki zar atılıyor. Zarların üst yüzlerine gelen sayıların toplamının tek olma olasılığı kaçtır?

2. İki zar havaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının tek veya çarpımlarının 12 olma olasılığı kaçtır?

3. Bir kutuda 5 sarı, 3 mavi ve 2 kırmızı bilye vardır. Bu kutudan rastgele 2 bilye seçildiğinde ikisinin de mavi renkte olma olasılığı kaçtır?

4. Bir eşya piyangosunda satılacak 20 biletten 7 si hediyelidir.

   Bu piyangodan 2 bilet alan bir kişinin en az bir hediye kazanması olasılığı kaçtır?

5. Bir torbada 5 beyaz ve 6 siyah bilye vardır. Bu torbadan, rastgele çekilen 3 bilyeden birinin beyaz diğer ikisinin siyah olma olasılığı kaçtır?

6. Bir zarın 2 yüzü mavi, 2 yüzü beyaz, 2 yüzü siyah renktedir. Bu zar art arda 4 kez atılıyor. 1 defa mavi, 1 defa beyaz ve 2 defa siyah gelme olasılığı kaçtır?

7. Ali'nin hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{5}$, Ayşe'nin hedefi vurma olasılığı $\frac{3}{7}$ dir. Buna göre ikisi birer kez atış yaptığında hedefi yalnız birinin vurma olasılığı kaçtır?

8. 10 kişiden oluşan bir sınıfta kız ve erkek öğrenciler vardır. Sınıftan iki kişi seçildiğinde bunlardan birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı $\frac{7}{15}$ ise bu sınıfta kaç kız öğrenci olabilir?

9. Bir torbada 5 beyaz ve 7 kırmızı bilye vardır. Torbadan art arda 2 bilye alınıyor. İkisinin de beyaz olma olasılığı kaçtır?

10. Bir torbada 3 mavi ve 5 kırmızı bilye vardır. Torbadan art arda iki bilye çekiliyor. Birinin mavi, diğerinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

11. Bir torbada 1 den 9 a kadar numaralanmış kartlar vardır. Her karttan bu kartın üzerinde yazan numara adedince bulunmaktadır. Çekilen iki karttan birinin tek, diğerinin çift numaralı olma olasılığı kaçtır?

12. Bir kutuda 5 sarı ve 7 turuncu renkte özdeş bilye vardır.

    a. Rastgele bir bilye çekiliyor. Çekilen bilyenin rengine ait olasılık çeşidini belirleyip çekilen bilyenin turuncu gelme olasılığını bulunuz.

    b. Çekilen her bilye geriye atılmak üzere 100 kez bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin rengine ait olasılık çeşidini belirleyiniz. 100 kez bilye çekilmesi sonucunda 45 kez turuncu çekildiğine göre bu olayın olasılık değerini hesaplayınız.

13. Üzerinde 1'den 5'e kadar rakamlar yazılı özdeş toplar bir torbadan çekildikten sonra tekrar torbanın içine atılıyor. Torbadan top çekme olayı 50 kez yapıldığında 3 rakamı 24 kez geldiğine göre bu olayın deneysel olasılığını hesaplayıp teorik olasılıkla karşılaştırınız.

14. Bir madenî paranın 1000 kez havaya atılması sonucunda 450 kez yazı geliyor. Buna göre üst yüzüne gelen tarafın yazı olma olayına ait deneysel ve teorik olasılığı bulunuz.

7. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. Bir madenî para, 3 kez havaya atılıyor.

İlk atışta tura geldiği bilindiğine göre sonraki iki atışta **en az** bir kez yazı gelmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

2. Bir okuldaki 100 öğrenciden 30 tanesi matematik, 20 tanesi fizik, 10 tanesi de hem matematik hem fizik dersinden bütünlemeye kalmıştır.

Okuldan rastgele seçilen bir öğrencinin matematik veya fizikten bütünlemeye kalmış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

3. Bir sınıftaki öğrencilerin %60 ı erkektir. Erkeklerin %20 si ve kızların %60 ı voleybol oynamaktadır.

Rastgele seçilen bir öğrencinin voleybol oynayan bir öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{12}{25}$ B) $\frac{9}{25}$ C) $\frac{8}{25}$ D) $\frac{7}{25}$ E) $\frac{6}{25}$

4. 4 kız ve 6 erkek öğrencinin bulunduğu bir okul kafilesinden rastgele 2 öğrenci seçilecektir. Öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{13}{32}$ D) $\frac{11}{30}$ E) $\frac{9}{25}$

5. 5 farklı pozitif, 4 farklı negatif sayı içinden 3 sayı seçiliyor. Seçilen bu sayıların çarpımlarının pozitif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{10}{21}$ C) $\frac{13}{14}$ D) $\frac{13}{21}$ E) $\frac{43}{44}$

6. Bir basketbol takımının maç kaybetme olasılığı, $\frac{3}{5}$ tir.

Bu takımın oynadığı 3 maçtan 2 sini kazanma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{36}{125}$ B) $\frac{24}{125}$ C) $\frac{18}{125}$ D) $\frac{6}{125}$ E) $\frac{1}{125}$

7. Bir eşya piyangosunda satılacak 20 biletten 7 si hediyelidir.

Bu piyangodan 2 bilet alan bir kişinin **en az** bir hediye kazanma olasılığı kaçtır?

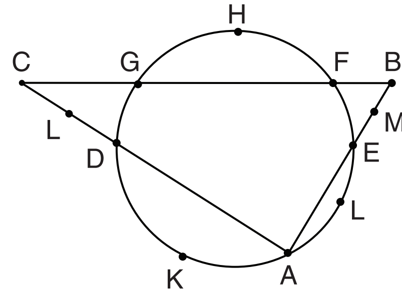
A) $\frac{1}{40}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{39}{95}$ D) $\frac{56}{95}$ E) $\frac{61}{95}$

8. "GARGAMEL" sözcüğünün harfleri kullanılarak 8 harfli anlamlı ya da anlamsız sözcükler yazılıyor.

Bu sözcüklerden biri seçildiğinde seçilen sözcüğün ARA ile başlama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{13}$ B) $\frac{5}{56}$ C) $\frac{1}{84}$ D) $\frac{5}{168}$ E) $\frac{1}{168}$

9.



ABC üçgen olmak üzere, köşeleri yukarıda görülen 12 nokta üzerinde olan üçgenler çiziliyor.

Bu üçgenlerden rastgele seçilen bir üçgenin üç kenarının da çemberin kirişi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{7}{26}$ B) $\frac{20}{51}$ C) $\frac{5}{104}$ D) $\frac{43}{208}$ E) $\frac{65}{208}$

10. Bir torbada 5 beyaz ve 6 siyah bilye vardır.

Bu torbadan rastgele çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{6}{19}$ B) $\frac{4}{13}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{3}{4}$

11. İki torbanın birincisinde 1 den 6 ya kadar ikincisinde 1 den 8 e kadar numaralanmış toplar vardır. Rastgele seçilen bir torbadan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun üzerindeki sayı tek olduğuna göre bu topun birinci torbadan çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{9}{19}$ C) $\frac{3}{23}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{7}$

12. Fatih ile Yılmaz, hilesiz bir para ile yazı tura atacaklardır. İlk yazı atan oyunu kazanacağına ve oyuna Yılmaz'ın başlayacağı bilindiğine göre Yılmaz'ın oyunu kazanma olasılığı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(P : Yılmaz'ın oyunu kazanma olasılığıdır.)

A) P = 0 B) $0 < P < \frac{1}{2}$ C) $P = \frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2} < P < 1$ E) P = 1

13. Bir şehrin belediye başkanlığı seçiminde İlknur'un kazanma olasılığı $\frac{1}{4}$, Öznur'un kazanma olasılığı ise $\frac{2}{5}$ tir. Yapılan bu seçimde İlknur ya da Öznur'un belediye başkanlığını kazanma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{8}{19}$ B) $\frac{9}{20}$ C) $\frac{11}{20}$ D) $\frac{13}{20}$ E) $\frac{1}{2}$

14.

1. kutu	2. kutu	3. kutu
2Y 3K	1Y 2K	2Y 1K

Yukarıda temsilî çizimi görülen üç kutunun içinde yer alan yeşil (Y) ve kırmızı (K) bilye sayıları verilmiştir. Ayşe adında bir öğrenci, gözleri kapalı şekilde kutuların birinden bir bilye alıyor. Gözünü açıp baktığında aldığı bilyenin yeşil renkte olduğunu görüyor.

Verilenlere göre Ayşe'nin bu bilyeyi 1. kutudan çekmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

15. I. Bir madeni para iki kez art arda atılıyor.

II. 2 zar aynı anda atılıyor.

III. Bir torbada 4 kırmızı , 5 beyaz top vardır. Torbadan rastgele 2 top alınıyor.

Yukarıda yapılan deneyler sonucunda elde edilen örnek uzayların eleman sayıları sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2, 6, 9 B) 4, 36, 81 C) 4, 12, 20

D) 4, 36, 36 E) 4, 12, 9

16. "MATEMATİK" kelimesinin harflerinin dördü ile harfler rastgele yan yana konmak şartıyla "TEMA" yazma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{9^4}$ B) $\frac{1}{9^4}$ C) $\frac{1}{9.7.4.4}$

D) $\frac{1}{9.7.6}$ E) $\frac{1}{9.7}$

17. Hilesiz bir madenî paranın havaya atılması deneyinde 20 atış sonucunda paranın 13 kez tura geldiği görülüyor. Bu deneyde paranın yazı gelme olayının deneysel olasılığı yüzde kaçtır?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 50 E) 65

18. Bir zarın havaya atılması deneyinde aşağıda verilen havaya atma sayılarının hangisinde bulunacak olan deneysel olasılık değeri ile teorik olasılık değeri birbirine en yakın olur?

A) 10 B) 100 C) 1000

D) 10000 E) 100000

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$\wedge$	:	ve
$\vee$	:	veya
$\Rightarrow$	:	ise
$\forall$	:	her
$\exists$	:	bazı
$=$	:	eşittir
$\neq$	:	eşit değildir
$\equiv$	:	denktir
$\in$	:	elemanıdır
$\notin$	:	elemanı değildir
$\subseteq$	:	alt küme
$\nsubseteq$	:	alt küme değil
$\cup$	:	birleşim
$\cap$	:	kesişim
$\emptyset$, { }	:	boş küme
[a, b]	:	a, b kapalı aralığı
(a, b)	:	a, b açık aralığı
[a, b)	:	a dan kapalı b den açık aralık
A – B	:	A kümesinin B kümesinden farkı
EKOK(a, b)	:	a ve b nin en küçük ortak katı
EBOB(a, b)	:	a ve b nin en büyük ortak böleni
$\mathbb{N}$	:	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	:	negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	:	irrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	:	negatif gerçek sayılar kümesi
$\sqrt{\ }$	:	karekök
$\sqrt[n]{\ }$	:	n. dereceden kök
$<$	:	küçüktür
$\leq$	:	küçük ya da eşit
$>$	:	büyüktür
$\geq$	:	büyük ya da eşit
$\|x\|$	:	x in mutlak değeri

br	:	birim
cm	:	santimetre
m	:	metre
dk.	:	dakika
sn.	:	saniye
sa.	:	saat
a:b, $\frac{a}{b}$	:	a nın b ye oranı
K.A.K	:	kenar - açı - kenar
A.A.	:	açı - açı
A.K.A	:	açı - kenar - açı
K.K.K	:	kenar - kenar - kenar
$f:A \rightarrow B$	:	A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu
$f(x) = mx + n$	:	doğrusal fonksiyon
Ç	:	çözüm kümesi
1-1	:	bire bir
m	:	eğim
//	:	paralellik
$\perp$	:	diklik
A(x, y)	:	x apsis y ordinatlı A noktası
$\sim$	:	benzer
$\cong$	:	yaklaşık eşit
[AB]	:	AB doğru parçası
|AB|	:	AB doğru parçasının uzunluğu
[AB	:	AB ışını
$\widehat{ABC}$	:	ABC açısı
$m(\widehat{ABC})$	:	ABC açısının ölçüsü
$^\circ$	:	derece
$'$	:	dakika
$''$	:	saniye
r	:	yarıçap
R	:	radyan
π	:	pi sayısı
$\hat{A}$	:	A açısı
$\overset{\frown}{AB}$	:	AB yayı
$\lvert\overset{\frown}{AB}\rvert$	:	AB yayının uzunluğu
$m(\overset{\frown}{AB})$	:	AB yayının ölçüsü
$\overset{\triangle}{ABC}$	:	ABC üçgeni

$A(\widehat{ABC})$	:	ABC üçgeninin alanı
$Ç(\widehat{ABC})$	:	ABC üçgeninin çevresi
V	:	Hacim
θ	:	teta
α	:	alfa
β	:	beta
sin	:	sinüs
cos	:	kosinüs
tan	:	tanjant
cot	:	kotanjant
sec	:	sekant
csc	:	kosekant
T	:	periyot
$f(x + T)$	:	periyodik fonksiyon
arcsin (veya $\sin^{-1}x$)	:	arksinüs
arccos (veya $\cos^{-1}x$)	:	arkkosinüs
arctan (veya $\tan^{-1}x$)	:	arktanjant
$y = ax^2 + bx + c$	:	ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyon
$y = a(x - r)^2 + k$	:	ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyon
$y = a(x_1 - x_2)(x - x_2)$	:	ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyon
$P(A \setminus B)$	:	A olayının B ye bağlı koşullu olasılığı
$P(A \cup B)$	:	A veya B olaylarının olma olasılığı
$P(A \cap B)$	:	A ve B olaylarının olma olasılığı

SÖZLÜK

B

bire bir fonksiyon : Tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsünün diğer elemanların görüntülerinden farklı olduğu fonksiyon.

birim çember : Merkezi (0, 0) noktası ve yarıçapı 1 birim olan çember.

birim fonksiyon : Tanım kümesindeki her değeri kendisiyle eşleyen fonksiyon.

Ç

çözüm kümesi : Bir denklemi ya da eşitsizliği sağlayan tüm değerlerin oluşturduğu küme.

D

değer kümesi : Fonksiyonun tanımlı olduğu “çıktı” değerlerinin oluşturduğu küme.

değişken : Bir problem ya da bir dizi işlem bağlamında değişen (farklı değerler alan) değer.

denklem sistemi : İki veya daha fazla denklemin oluşturduğu sistem.

dış açıortay : Bir çokgenin bir dış açısını iki eş parçaya ayıran ışın.

dış merkez : Dış teğet çemberin merkezi.

dış teğet çemberin merkezi (üçgen) : Üçgenin iki dış açıortayı ile bu dış açılara komşu olmayan iç açısının açıortayının kesim noktası.

derece : Düzlem geometride temel açı ölçme birimi.

dik açı : Ölçüsü 90° olan açı.

doğru orantı : Değişkenlerden biri artarken (veya azalırken) diğerinin de arttığı (veya azaldığı) orantı.

doğrusal fonksiyon : Tanım ve değer kümesi gerçek sayılar olan f(x) = ax + b ($a \neq 0$ ve $b \in \mathbb{R}$) biçimindeki fonksiyon.

E - F - G

esas ölçü : Bir açının [0, 360°) veya [0, 2π) arasında karşılık geldiği ölçü.

eşitlik : İçinde “=” sembolü bulunan matematik ifadesi.

eşitsizlik : İçinde $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ veya $\neq$ sembollerinden en az birinin bulunduğu matematik ifadesi.

fonksiyon : Bir kümenin (tanım kümesinin) her bir elemanını başka bir kümenin (değer kümesinin) bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişki.

gerçek sayılar : Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan sayı kümesi.

görüntü kümesi : Tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu küme.

H - İ

hipotenüs : Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenar.

iç açıortay : Bir çokgenin bir iç açısını iki eş parçaya ayıran ışın.

iç teğet çemberin merkezi (üçgen) : Bir üçgende iç açıortaylarının kesiştiği nokta.

irrasyonel sayılar : Rasyonel olmayan gerçek sayılar.

K - L - M

kare sayı : Bir doğal sayının karesine eşit olan sayı.

kosinüs teoremi : Üçgenin iki kenar uzunluğu ve bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsü ile üçüncü kenarının uzunluğu arasındaki ilişkiyi ifade eden teorem.

O - Ö

oran : İki çokluğun (niceliğin) bölme yoluyla karşılaştırılması.

orantı : İki yada daha fazla oranın eşitliği.

ortalama değişim hızı : Bir aralıkta bir nicelikteki değişimin başka bir niceliğin değişimine oranı

örten fonksiyon : Değer kümesindeki her elemanın tanım kümesinden en az bir elemanla eşleştiği fonksiyon.

P - R - S

periyod : Bir fonksiyonun aynı değerleri aldığı en küçük aralık.

periyodik fonksiyon : Belli aralıklarla sürekli aynı değerleri alan fonksiyon.

radyan : Trigonometride kullanılan açı ölçü birimi.

sabit : Değişmeden kalan değer.

sinüs teoremi : Üçgenin kenar uzunlukları ve kenarların karşılarındaki açı ölçülerinin sinüs değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eden teorem.

T - Ü

tanım kümesi : Bir fonksiyonun tanımlı olduğu küme.

trigonometrik oranlar : Bir dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki oranlar.

üçgenin dış teğet

çemberleri : Bir üçgende kenarlara dıştan teğet olan çemberler.

üçgenin iç teğet çemberi : Bir üçgende kenarlara içten teğet olan çember.

V - Y

yatay doğru testi : x eksenine paralel doğrular çizerek verilen fonksiyon grafiğinden fonksiyonun bire bir veya örtenliğini belirlemek için kullanılan bir yöntem.

yok etme yöntemi : Denklem sistemlerinin çözümü sırasında değişkenlerin ortadan kaldırılması biçiminde uygulanan yöntem.

yönlü açı : Bir kenarı başlangıç (sabit), diğer kenarı bitim (hareketli) olarak düşünülen açı.

YANIT ANAHTARI

1. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. E	2. E	3. E	4. A	5. E	6. A	7. E	8. D	9. D	10. A	11. C	12. B	13. E
14. E	15. C	16. B	17. D	18. C	19. C	20. B	21. B	22. C	23. D	24. C	25. E	26. D
27. C	28. D	29. D	30. C	31. C	32. C	33. D	34. E	35. C	36. D	37. C	38. D	

2. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. A	2. D	3. A	4. A	5. A	6. D	7. A	8. A	9. D	10. B	11. B	12. C	13. D
14. C	15. E	16. B	17. E	18. B	19. E	20. A	21. A	22. E	23. E	24. A	25. C	26. D
27. A	28. C	29. A	30. E									

3. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. C	2. A	3. D	4. D	5. A	6. B	7. D	8. B	9. A	10. C	11. E	12. C	13. A

4. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. E	2. E	3. A	4. C	5. B	6. B	7. A	8. E	9. B	10. B	11. D	12. B	13. E
14. E	15. B	16. A	17. C	18. C	19. B							

5. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. B	2. A	3. E	4. C	5. D	6. C	7. B	8. A	9. E	10. E	11. E	12. C	13. B
14. B	15. C	16. D	17. C	18. C	19. C	20. B	21. C	22. E	23. C	24. B	25. A	26. E
27. D	28. A	29. E	30. B									

6. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. D	2. C	3. D	4. D	5. D	6. D	7. C	8. B	9. C	10. E	11. E	12. D	13. A
14. E	15. C	16. D	17. C	18. B	19. E	20. D						

7. Alt Öğrenme Alanı Genel Değerlendirme Testi

1. A	2. A	3. B	4. B	5. B	6. A	7. D	8. E	9. A	10. C	11. D	12. D	13. B
14. B	15. D	16. D	17. B	18. E								

KAYNAKÇA

Baki, A. (2004). *Matematik Tarihi ve Felsefesi.* Ankara: Pegem Akademi.

Büyük Larousse Sözlük ve Ansiklopedisi (1986). İstanbul: Milliyet AŞ.

Delil, E.Z.(2014). *Trigonometrik İfadelerin Sadeleştirilmesi Süresinin İncelenmesi: Tanıma ve Hatırlama*. Yayımlanmamış Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Dönmez, A. (2005). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, 6. cilt, Türk ve Doğulu Matematikçiler.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Dönmez, A. (2005). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, 7. cilt, Fransız Matematikçiler.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Dönmez, A. (2005). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, 9. cilt, İngiliz Matematikçiler.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Geçmiş, G. (2017). Mandala. *Bilim Çocuk.* Haziran, 21 - 25.

Karadağ, N. (2004). Müzik Fourier Analiz Matematik. *Bilim ve Teknik,* Kasım, 74 - 75.

Korkmaz, A. (2005). Olasılık Kuramının Doğuşu. *Ankara Üniversitesi SBF Dergisi*, 60(2), 171 - 193.

Matematik Dünyası (2004). Çin Kalanlar Teoremi. *Bilim ve Teknik,* Yaz, 13-16.

Matematik Terimleri Sözlüğü (2000). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Meydan Larousse Büyük Lügat ve Ansiklopedisi (1988). İstanbul: Sabah AŞ.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2*018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara: T.C. Millî Eğitim Bakanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) (2*018). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10 , 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: T.C. Millî Eğitim Bakanlığı.

Nesin, A. (2007). *Matematik ve Doğa*. İstanbul: Nesin Matematik Köyü Yayınevi.

Örnek, S.(2007). *Trigonometrik Kavramların Canlandırma Yöntemiyle Öğrenilmesinin Öğrencilerin Matematik Başarısına Etkisi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Topdemir, H. G. (2010). Osmanlı Biliminin Öncülerinden: Takîyüddîn, *Bilim ve Teknik.* 513, 82 - 87.

Topdemir, H. G. (2011). Hipparkhos ve Trigonometrinin Doğuşu. *Bilim ve Teknik*. Ağustos, 88 - 90.

Türkçe Sözlük, (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Yazım Kılavuzu, (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Yenilmez, K. ve Palabıyık, U. (2008). *e Sayısı ve Kayıp Tarihi*. 21. Ulusal Matematik Sempozyumu, 1-4 Eylül, Koç Üniversitesi, İstanbul.

http://portal.ku.edu.tr/~matsem21/files/bildiriler/H.1-10-yenilmez-palabiyik.pdf

http://www.bilgiguvenligi.gov.tr/gizlilik/rsa-algoritması.html adresinden 03.07.2016 tarihinde alınmıştır.

http://biltek.tubitak.gov.tr/gelisim/matematik/nasılanlatir.htm adesinden 06.06.2016 tarihinde alınmıştır.

http://www.geogebra.org/cms/tr/download/ adresinden 10.06.2016 tarihinde alınmıştır.

http://www.megep.meb.gov.tr/mte-program_modul/moduller_pdf/refraktor web adresinde 03.07.2016 tarihinde alınmıştır.

http://www.darphane.gov.tr/tr/products_new.php?parent_id=182&content_id=736#content.php?parent_id=182&content_id=736

https://www.geogebra.org/m/rCxXxFhE

http://ekitap.kulturturizm.gov.tr/TR,80698/harran-ve-harrandaki-mimari-eserler.html adresinden 01.02.2018 tarihinde alınmıştır.

http://www.shodor.org/interactivate/activities/ExpProbability/

GÖRSEL KAYNAKÇA

Kitabın aşağıdaki belirtilen sayfalarında yer alan görseller yayınevinin görsel tasarım ekibi tarafından hazırlanarak yayınevi arşivinden alınmıştır.	
Sayfa Numaraları	11, 16, 51, 53, 136, 165, 173, 249, 256, 270, 272, 273, 280, 294, 295, 296, 302, 313, 335, 336

Kitap içindeki kullanılan diğer tüm görseller 01.09.2017 ile 15.02.2018 tarihleri arasında aşağıdaki sitelerden alınmıştır.	
Site Adresleri	www.123rf.com
	http://tr.depositphotos.com
	www.fotolog.com
	http://www.freestockimages.net/